НАИЛУЧШАЯ КУСОЧНО-ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ*

В. Н. Малозёмов
malv@math.spbu.ru

24 апреля 2014 г.

Аннотация. Анализируется понятие «разбиение с равными уклонениями».

1°. Пусть $f(t)$ — непрерывная на отрезке $[c, d]$ функция, n — целое неотрицательное число и

$$P(A, t) = a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_n$$

— алгебраический полином степени не выше n (здесь $A = (a_0, a_1, \dots, a_n)$). Для любого отрезка $[\alpha, \beta] \subset [c, d]$ положим

$$E_n\bigl(f; [\alpha, \beta]\bigr) = \min_{A} \max_{t \in [\alpha, \beta]} \bigl| f(t) - P(A, t) \bigr|. \tag{1}$$

Минимум по A в правой части равенства (1) достигается на единственном векторе A^*. Соответствующий полином $P(A^*, t)$ называется *полиномом наилучшего приближения функции* $f(t)$ *на отрезке* $[\alpha, \beta]$.

Зафиксируем натуральное число m и обозначим через T совокупность разбиений τ отрезка $[c, d]$ на m частей,

$$\tau = \{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_m\}, \quad c = \xi_0 < \xi_1 < \ldots < \xi_m = d.$$

Введём величины

$$E_{nm}(f; \tau) = \max_{k \in 1:m} E_n\bigl(f; [\xi_{k-1}, \xi_k]\bigr),$$
$$E_{nm}(f) = \inf_{\tau \in T} E_{nm}(f; \tau).$$

*Семинар по конструктивному негладкому анализу и недифференцируемой оптимизации «CNSA & NDO»: `http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/`

Подробная запись для $E_{nm}(f)$ выглядит так:

$$E_{nm}(f) = \inf_{\tau\in T} \max_{k\in 1:m} \min_{A} \max_{t\in[\xi_{k-1},\xi_k]} \bigl|f(t) - P(A,t)\bigr|.$$

Разбиение $\tau^* \in T$ назовём *оптимальным*, если

$$E_{nm}(f;\tau^*) = E_{nm}(f).$$

Разбиение $\tau = \{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_m\}$ назовём *разбиением с равными уклонениями*, если

$$E_n\bigl(f;[\xi_0,\xi_1]\bigr) = E_n\bigl(f;[\xi_1,\xi_2]\bigr) = \ldots = E_n\bigl(f;[\xi_{m-1},\xi_m]\bigr).$$

В этом докладе, следуя [1], мы показываем, что разбиение с равными уклонениями существует и является оптимальным.

2°. Нам потребуются некоторые свойства величины наилучшего приближения.

ЛЕММА 1. *Если* $[\alpha_0,\beta_0] \subset [\alpha,\beta]$, *то*

$$E_n\bigl(f;[\alpha_0,\beta_0]\bigr) \leqslant E_n\bigl(f;[\alpha,\beta]\bigr).$$

Доказательство. Обозначим через $P_n(t)$ полином наилучшего приближения функции $f(t)$ на $[\alpha,\beta]$. Имеем

$$E_n\bigl(f;[\alpha_0,\beta_0]\bigr) \leqslant \max_{t\in[\alpha_0,\beta_0]} \bigl|f(t) - P_n(t)\bigr| \leqslant$$
$$\leqslant \max_{t\in[\alpha,\beta]} \bigl|f(t) - P_n(t)\bigr| = E_n\bigl(f;[\alpha,\beta]\bigr).$$

$\square$

ЛЕММА 2. *Для произвольных непрерывных на отрезке* $[\alpha,\beta]$ *функций* $f_1(t)$ *и* $f_2(t)$ *справедливо неравенство*

$$\Bigl|E_n\bigl(f_1;[\alpha,\beta]\bigr) - E_n\bigl(f_2;[\alpha,\beta]\bigr)\Bigr| \leqslant \max_{t\in[\alpha,\beta]} \bigl|f_1(t) - f_2(t)\bigr|. \tag{2}$$

Доказательство. Обозначим через $P_n^{(1)}(t)$ и $P_n^{(2)}(t)$ полиномы наилучшего приближения функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ соответственно. Имеем

$$E_n\bigl(f_1;[\alpha,\beta]\bigr) \leqslant \max_{t\in[\alpha,\beta]} \Bigl|\bigl(f_1(t) - f_2(t)\bigr) + \bigl(f_2(t) - P_n^{(2)}(t)\bigr)\Bigr| \leqslant$$
$$\leqslant \max_{t\in[\alpha,\beta]} \bigl|f_1(t) - f_2(t)\bigr| + E_n\bigl(f_2;[\alpha,\beta]\bigr),$$
$$E_n\bigl(f_2;[\alpha,\beta]\bigr) \leqslant \max_{t\in[\alpha,\beta]} \Bigl|\bigl(f_2(t) - f_1(t)\bigr) + \bigl(f_1(t) - P_n^{(1)}(t)\bigr)\Bigr| \leqslant$$
$$\leqslant \max_{t\in[\alpha,\beta]} \bigl|f_2(t) - f_1(t)\bigr| + E_n\bigl(f_1;[\alpha,\beta]\bigr).$$

Отсюда очевидным образом следует (2). $\square$

Пусть $\alpha < \beta$ и $\alpha_0 < \beta_0$. Наряду с непрерывной на отрезке $[\alpha, \beta]$ функцией $f(t)$ рассмотрим функцию

$$\varphi(t) = f\Big(\alpha + \frac{\beta - \alpha}{\beta_0 - \alpha_0}(t - \alpha_0)\Big), \quad t \in [\alpha_0, \beta_0].$$

Очевидно, что

$$\varphi\Big(\alpha_0 + \frac{\beta_0 - \alpha_0}{\beta - \alpha}(t - \alpha)\Big) = f(t), \quad t \in [\alpha, \beta].$$

ЛЕММА 3. *Справедливо равенство*

$$E_n\big(\varphi; [\alpha_0, \beta_0]\big) = E_n\big(f; [\alpha, \beta]\big). \tag{3}$$

Доказательство. Обозначим через $P_n(t)$ полином наилучшего приближения функции $f(t)$ на $[\alpha, \beta]$ и положим

$$Q_n(t) = P_n\Big(\alpha + \frac{\beta - \alpha}{\beta_0 - \alpha_0}(t - \alpha_0)\Big).$$

Имеем

$$\begin{aligned} E_n\big(\varphi; [\alpha_0, \beta_0]\big) &\leqslant \max_{t \in [\alpha_0, \beta_0]} \big|\varphi(t) - Q_n(t)\big| = \\ = \max_{t \in [\alpha_0, \beta_0]} &\left| f\Big(\alpha + \frac{\beta - \alpha}{\beta_0 - \alpha_0}(t - \alpha_0)\Big) - P_n\Big(\alpha + \frac{\beta - \alpha}{\beta_0 - \alpha_0}(t - \alpha_0)\Big)\right| = \\ &= \max_{t \in [\alpha, \beta]} \big|f(t) - P_n(t)\big| = E_n\big(f; [\alpha, \beta]\big). \end{aligned} \tag{4}$$

Теперь обозначим через $Q_n(t)$ полином наилучшего приближения функции $\varphi(t)$ на $[\alpha_0, \beta_0]$ и положим

$$P_n(t) = Q_n\Big(\alpha_0 + \frac{\beta_0 - \alpha_0}{\beta - \alpha}(t - \alpha)\Big).$$

Имеем

$$\begin{aligned} E_n\big(f; [\alpha, \beta]\big) &\leqslant \max_{t \in [\alpha, \beta]} \big|f(t) - P_n(t)\big| = \\ = \max_{t \in [\alpha, \beta]} &\left| \varphi\Big(\alpha_0 + \frac{\beta_0 - \alpha_0}{\beta - \alpha}(t - \alpha)\Big) - Q_n\Big(\alpha_0 + \frac{\beta_0 - \alpha_0}{\beta - \alpha}(t - \alpha)\Big)\right| = \\ &= \max_{t \in [\alpha_0, \beta_0]} \big|\varphi(t) - Q_n(t)\big| = E_n\big(\varphi; [\alpha_0, \beta_0]\big). \end{aligned} \tag{5}$$

Из неравенств (4) и (5) следует равенство (3). □

Зафиксируем непрерывную на отрезке $[c,d]$ функцию $f(t)$ и рассмотрим функцию двух переменных

$$E(x,y) = E_n\big(f;[x,y]\big)$$

на множестве $\Omega = \big\{(x,y) \mid c \leqslant x \leqslant y \leqslant d\big\}$. Таким образом, нас интересует величина наилучшего приближения как функция концов отрезка аппроксимации.

ЛЕММА 4. *Функция $E(x,y)$ непрерывна на множестве Ω.*

Доказательство. Пусть $(\alpha_0,\beta_0) \in \Omega$ и (x_s,y_s), $s = 1,2,\ldots,$ — последовательность точек из Ω, сходящихся к (α_0,β_0). Нужно проверить, что $E(x_s,y_s) \to$ $\to E(\alpha_0,\beta_0)$ при $s \to \infty$.

Предположим сначала, что $\alpha_0 < \beta_0$. В этом случае можно считать, что и $x_s < y_s$ при всех $s = 1,2,\ldots$ Введём функции

$$\varphi_s(t) = f\Big(x_s + \frac{y_s - x_s}{\beta_0 - \alpha_0}(t-\alpha_0)\Big), \quad t \in [\alpha_0,\beta_0].$$

По лемме 3, $E_n\big(\varphi_s;[\alpha_0,\beta_0]\big) = E_n\big(f;[x_s,y_s]\big)$. Принимая во внимание лемму 2, получаем

$$\big|E(x_s,y_s) - E(\alpha_0,\beta_0)\big| = \Big|E_n\big(\varphi_s;[\alpha_0,\beta_0]\big) - E_n\big(f;[\alpha_0,\beta_0]\big)\Big| \leqslant$$
$$\leqslant \max_{t\in[\alpha_0,\beta_0]}\big|\varphi_s(t) - f(t)\big| = \max_{t\in[\alpha_0,\beta_0]}\Big|f\Big(x_s + \frac{y_s - x_s}{\beta_0 - \alpha_0}(t-\alpha_0)\Big) - f(t)\Big|.$$

Обозначим

$$t_s = x_s + \frac{y_s - x_s}{\beta_0 - \alpha_0}(t-\alpha_0).$$

Тогда

$$\big|E(x_s,y_s) - E(\alpha_0,\beta_0)\big| \leqslant \max_{t\in[\alpha_0,\beta_0]}\big|f(t_s) - f(t)\big|. \tag{6}$$

При $t \in [\alpha_0,\beta_0]$ имеем

$$|t_s - t| = \Big|x_s - t + \frac{(y_s-\beta_0)+(\beta_0-\alpha_0)+(\alpha_0-x_s)}{\beta_0-\alpha_0}(t-\alpha_0)\Big| =$$
$$= \Big|x_s - \alpha_0 - \frac{t-\alpha_0}{\beta_0-\alpha_0}(x_s-\alpha_0) + \frac{t-\alpha_0}{\beta_0-\alpha_0}(y_s-\beta_0)\Big| =$$
$$= \Big|\frac{\beta_0-t}{\beta_0-\alpha_0}(x_s-\alpha_0) + \frac{t-\alpha_0}{\beta_0-\alpha_0}(y_s-\beta_0)\Big| \leqslant \frac{\beta_0-t}{\beta_0-\alpha_0}|x_s-\alpha_0| + \frac{t-\alpha_0}{\beta_0-\alpha_0}|y_s-\beta_0| \leqslant$$
$$\leqslant \max\big\{|x_s-\alpha_0|,|y_s-\beta_0|\big\}.$$

Правая часть этого неравенства стремится к нулю при $s \to \infty$. В силу равномерной непрерывности функции $f(t)$ на $[c, d]$ правая часть неравенства (6) также стремится к нулю при $s \to \infty$. Это гарантирует непрерывность функции $E(x, y)$ в точке (α_0, β_0).

Предположим теперь, что $\alpha_0 = \beta_0$. В этом случае $x_s \to \alpha_0$, $y_s \to \alpha_0$, $y_s - x_s \to 0$ при $s \to \infty$ и $E(\alpha_0, \beta_0) = 0$. Имеем

$$\begin{aligned} \big|E(x_s, y_s) - E(\alpha_0, \beta_0)\big| = E(x_s, y_s) \leqslant \max_{t\in[x_s,y_s]}\Big|f(t) - \tfrac{1}{2}\big[f(x_s) + f(y_s)\big]\Big| \leqslant \\ \leqslant \tfrac{1}{2}\Big\{\max_{t\in[x_s,y_s]}\big|f(t) - f(x_s)\big| + \max_{t\in[x_s,y_s]}\big|f(t) - f(y_s)\big|\Big\}. \end{aligned} \qquad (7)$$

Очевидно, что при $t \in [x_s, y_s]$

$$\max\big\{|t - x_s|, |t - y_s|\big\} \leqslant y_s - x_s.$$

Правая часть этого неравенства стремится к нулю при $s \to \infty$. В силу равномерной непрерывности функции $f(t)$ на $[c, d]$ правая часть неравенства (7) также стремится к нулю при $s \to \infty$. Это гарантирует непрерывность функции $E(x, y)$ в точке (α_0, α_0).

Лемма доказана. $\square$

ЛЕММА 5. *Существует точка $\xi \in (\alpha, \beta)$, такая, что*

$$E(\alpha, \xi) = E(\xi, \beta). \qquad (8)$$

Доказательство. Если $E(\alpha, \beta) = 0$, то в качестве ξ можно взять любую точку из интервала (α, β). Это следует из леммы 1.

Предположим, что $E(\alpha, \beta) > 0$. По лемме 4 разность

$$r(x) = E(\alpha, x) - E(x, \beta)$$

непрерывна на отрезке $[\alpha, \beta]$ и на концах принимает значения разных знаков $-E(\alpha, \beta)$ и $E(\alpha, \beta)$. Значит, существует точка $\xi \in (\alpha, \beta)$, в которой $r(\xi) = 0$. Это равносильно (8).

Лемма доказана. $\square$

ЛЕММА 6. *Пусть $E(\alpha, \xi) = E(\xi, \beta)$ и $E(\alpha, \xi_1) < E(\xi_1, \beta)$ при некоторых $\xi, \xi_1 \in (\alpha, \beta)$. Тогда $\xi_1 < \xi$.*

Доказательство. В противном случае (при $\xi_1 \geqslant \xi$) согласно лемме 1 получим

$$E(\alpha, \xi_1) \geqslant E(\alpha, \xi) = E(\xi, \beta) \geqslant E(\xi_1, \beta),$$

что противоречит условию данной леммы. $\square$

3°. Обратимся к разбиениям отрезка $[c,d]$ на m частей (см. п. 1°).

ЛЕММА 7. *Пусть* $\tau = \{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_m\}$ *и* $\tau_1 = \{\xi_0^{(1)}, \xi_1^{(1)}, \dots, \xi_m^{(1)}\}$ — *произвольные разбиения отрезка* $[c,d]$ *на* m *частей. Тогда при некотором* $k \in 1:m$ *будет*

$$[\xi_{k-1}, \xi_k] \subset [\xi_{k-1}^{(1)}, \xi_k^{(1)}]. \tag{9}$$

Доказательство. Если соотношение (9) не имеет места ни при каком $k \in 1:m$, то последовательно получаем

$$\xi_0 = \xi_0^{(1)} = c,\ \xi_1 > \xi_1^{(1)},\ \xi_2 > \xi_2^{(1)}, \dots, \xi_m > \xi_m^{(1)}.$$

Однако последнее неравенство противоречит тому, что $\xi_m = \xi_m^{(1)} = d$. □

ЛЕММА 8. *Для произвольного разбиения* $\tau = \{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_m\}$ *выполняются неравенства*

$$\min_{k\in 1:m} E_n\big(f; [\xi_{k-1}, \xi_k]\big) \leqslant E_{nm}(f) \leqslant \max_{k\in 1:m} E_n\big(f; [\xi_{k-1}, \xi_k]\big). \tag{10}$$

Доказательство. Правое неравенство в (10) следует из определения величины $E_{nm}(f)$ (см. п. 1°). Проверим левое неравенство.

Возьмём произвольное разбиение $\tau_1 = \{\xi_0^{(1)}, \xi_1^{(1)}, \dots, \xi_m^{(1)}\}$. По лемме 7 найдётся индекс $k_0 \in 1:m$, такой, что $[\xi_{k_0-1}, \xi_{k_0}] \subset [\xi_{k_0-1}^{(1)}, \xi_{k_0}^{(1)}]$. Учитывая этот факт и лемму 1, записываем

$$\min_{k\in 1:m} E_n\big(f; [\xi_{k-1}, \xi_k]\big) \leqslant E_n\big(f; [\xi_{k_0-1}, \xi_{k_0}]\big) \leqslant E_n\big(f; [\xi_{k_0-1}^{(1)}, \xi_{k_0}^{(1)}]\big) \leqslant$$
$$\leqslant \max_{k\in 1:m} E_n\big(f; [\xi_{k-1}^{(1)}, \xi_k^{(1)}]\big) = E_{nm}(f; \tau_1).$$

Ввиду произвольности τ_1 приходим к требуемому неравенству:

$$\min_{k\in 1:m} E_n\big(f; [\xi_{k-1}, \xi_k]\big) \leqslant \inf_{\tau_1 \in T} E_{nm}(f; \tau_1) = E_{nm}(f).$$

Лемма доказана. □

Очевидным следствием леммы 8 является

ТЕОРЕМА 1. *Разбиение с равными уклонениями является оптимальным.*

Покажем, что оптимальное разбиение может и не быть разбиением с равными уклонениями.

ПРИМЕР. Пусть $[c,d] = [-2,3],\ n=1,\ m=2$ и (см. рис.)

$$f_0(t) = \begin{cases} 2(t+1)^2 - 1 \quad \text{при} \quad t \in [-2,0], \\ \quad 1 \quad \text{при} \quad t \in [0,2], \\ 7 - 3t \quad \text{при} \quad t \in [2,3]. \end{cases}$$

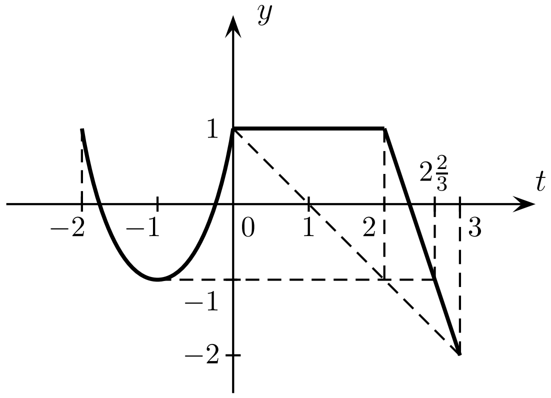

Рис. График функции $f_0(t)$.

В этом случае $E_{1,2}(f_0) = 1$. Все разбиения $\{-2, \xi, 3\}$, где $\xi \in [0, 2\frac{2}{3}]$ являются оптимальными. При этом разбиением с равными уклонениями будет только одно $\tau = \{-2, 0, 3\}$ с полиномами наилучшего приближения

$$P_1^{(1)}(t) \equiv 0 \quad \text{на} \quad [-2, 0] \quad \text{и} \quad P_1^{(2)}(t) = 2 - t \quad \text{на} \quad [0, 3].$$

Отметим, что при $\xi \in [2, 2\frac{2}{3}]$

$$E_1\big(f_0; [-2, \xi]\big) = 1, \quad E_1\big(f_0; [\xi, 3]\big) = 0.$$

4°. Принципиальное значение имеет следующий результат.

ТЕОРЕМА 2. *Разбиение с равными уклонениями существует.*

Доказательство. Мы построим последовательность разбиений $\{\tau_\nu\}$, $\nu = 0, 1, \ldots$, пределом которой будет интересующее нас разбиение.

К начальному разбиению $\tau_0 = \{\xi_0^{(0)}, \xi_1^{(0)}, \ldots, \xi_m^{(0)}\}$, где $\xi_0^{(0)} = c$, $\xi_m^{(0)} = d$, предъявляется единственное требование — выполнение неравенств

$$E(\xi_0^{(0)}, \xi_1^{(0)}) \leqslant E(\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}) \leqslant \ldots \leqslant E(\xi_{m-1}^{(0)}, \xi_m^{(0)}). \tag{11}$$

Здесь используется введённое ранее обозначение $E(\alpha, \beta) = E_n\big(f; [\alpha, \beta]\big)$. Можно поступить, например, так. В качестве $\xi_{m-1}^{(0)}$ взять точку из интервала $(\xi_0^{(0)}, \xi_m^{(0)})$, на которой

$$E(\xi_0^{(0)}, \xi_{m-1}^{(0)}) = E(\xi_{m-1}^{(0)}, \xi_m^{(0)}). \tag{12}$$

По лемме 5 такая точка существует. Точка $\xi_{m-2}^{(0)} \in (\xi_0^{(0)}, \xi_{m-1}^{(0)})$ выбирается из условия

$$E(\xi_0^{(0)}, \xi_{m-2}^{(0)}) = E(\xi_{m-2}^{(0)}, \xi_{m-1}^{(0)}).$$

При этом согласно лемме 1 и равенству (12)

$$E(\xi_{m-2}^{(0)}, \xi_{m-1}^{(0)}) \leqslant E(\xi_0^{(0)}, \xi_{m-1}^{(0)}) = E(\xi_{m-1}^{(0)}, \xi_m^{(0)}).$$

Таким образом, построено разбиение $c = \xi_0^{(0)} < \xi_{m-2}^{(0)} < \xi_{m-1}^{(0)} < \xi_m^{(0)} = d$ со свойством

$$E(\xi_0^{(0)}, \xi_{m-2}^{(0)}) = E(\xi_{m-2}^{(0)}, \xi_{m-1}^{(0)}) \leqslant E(\xi_{m-1}^{(0)}, \xi_m^{(0)}).$$

Этот процесс можно продолжить. Точка $\xi_{m-3}^{(0)} \in (\xi_0^{(0)}, \xi_{m-2}^{(0)})$ обеспечивает равенство

$$E(\xi_0^{(0)}, \xi_{m-3}^{(0)}) = E(\xi_{m-3}^{(0)}, \xi_{m-2}^{(0)})$$

и т. д. Точку $\xi_1^{(0)} \in (\xi_0^{(0)}, \xi_2^{(0)})$ найдём из условия

$$E(\xi_0^{(0)}, \xi_1^{(0)}) = E(\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}).$$

В результате придём к разбиению $\tau_0 = \{\xi_0^{(0)}, \xi_1^{(0)}, \ldots, \xi_m^{(0)}\}$ со свойством (11).

Пусть уже имеется ν-е разбиение $\tau_\nu = \{\xi_0^{(\nu)}, \xi_1^{(\nu)}, \ldots, \xi_m^{(\nu)}\}$, удовлетворяющее условию, аналогичному (11):

$$E(\xi_0^{(\nu)}, \xi_1^{(\nu)}) \leqslant E(\xi_1^{(\nu)}, \xi_2^{(\nu)}) \leqslant \ldots \leqslant E(\xi_{m-1}^{(\nu)}, \xi_m^{(\nu)}).$$

Опишем построение следующего разбиения $\tau_{\nu+1}$.

По определению $\xi_0^{(\nu+1)} = c$, $\xi_m^{(\nu+1)} = d$. Если $E(\xi_0^{(\nu+1)}, \xi_1^{(\nu)}) = E(\xi_1^{(\nu)}, \xi_2^{(\nu)})$, то полагаем $\xi_1^{(\nu+1)} = \xi_1^{(\nu)}$. Иначе (при $E(\xi_0^{(\nu+1)}, \xi_1^{(\nu)}) < E(\xi_1^{(\nu)}, \xi_2^{(\nu)})$) в качестве $\xi_1^{(\nu+1)}$ возьмём точку из интервала $(\xi_0^{(\nu+1)}, \xi_2^{(\nu)})$, на которой

$$E(\xi_0^{(\nu+1)}, \xi_1^{(\nu+1)}) = E(\xi_1^{(\nu+1)}, \xi_2^{(\nu)}). \tag{13}$$

По лемме 6, $\xi_1^{(\nu)} < \xi_1^{(\nu+1)}$. В обоих случаях $\xi_1^{(\nu)} \leqslant \xi_1^{(\nu+1)} < \xi_2^{(\nu)}$ и выполняется равенство (13). Кроме того,

$$E(\xi_1^{(\nu+1)}, \xi_2^{(\nu)}) \leqslant E(\xi_1^{(\nu)}, \xi_2^{(\nu)}) \leqslant E(\xi_2^{(\nu)}, \xi_3^{(\nu)}). \tag{14}$$

Далее обратимся к отрезку $[\xi_1^{(\nu+1)}, \xi_3^{(\nu)}]$. Если $E(\xi_1^{(\nu+1)}, \xi_2^{(\nu)}) = E(\xi_2^{(\nu)}, \xi_3^{(\nu)})$, то полагаем $\xi_2^{(\nu+1)} = \xi_2^{(\nu)}$. Иначе (когда, согласно (14), $E(\xi_1^{(\nu+1)}, \xi_2^{(\nu)}) < < E(\xi_2^{(\nu)}, \xi_3^{(\nu)})$) в качестве $\xi_2^{(\nu+1)}$ возьмём точку из интервала $(\xi_1^{(\nu+1)}, \xi_3^{(\nu)})$, на которой

$$E(\xi_1^{(\nu+1)}, \xi_2^{(\nu+1)}) = E(\xi_2^{(\nu+1)}, \xi_3^{(\nu)}). \tag{15}$$

По лемме 6, $\xi_2^{(\nu)} < \xi_2^{(\nu+1)}$. В обоих случаях $\xi_2^{(\nu)} \leqslant \xi_2^{(\nu+1)} < \xi_3^{(\nu)}$ и выполняется равенство (15). Кроме того, в силу (13)

$$E(\xi_0^{(\nu+1)}, \xi_1^{(\nu+1)}) \leqslant E(\xi_1^{(\nu+1)}, \xi_2^{(\nu+1)})$$

и
$$E(\xi_2^{(\nu+1)},\xi_3^{(\nu)}) \leqslant E(\xi_2^{(\nu)},\xi_3^{(\nu)}) \leqslant E(\xi_3^{(\nu)},\xi_4^{(\nu)}).$$

Этот процесс можно продолжить, последовательно привлекая к рассмотрению отрезки $[\xi_2^{(\nu+1)},\xi_4^{(\nu)}]$, $[\xi_3^{(\nu+1)},\xi_5^{(\nu)}],\ldots,[\xi_{m-2}^{(\nu+1)},\xi_m^{(\nu)}]$. В результате придём к разбиению $\tau_{\nu+1}=\{\xi_0^{(\nu+1)},\xi_1^{(\nu+1)},\ldots,\xi_m^{(\nu+1)}\}$ со свойствами

$$\xi_k^{(\nu)} \leqslant \xi_k^{(\nu+1)} < \xi_{k+1}^{(\nu)}, \quad k=0,1,\ldots,m-1; \tag{16}$$
$$E(\xi_k^{(\nu+1)},\xi_{k+1}^{(\nu+1)}) = E(\xi_{k+1}^{(\nu+1)},\xi_{k+2}^{(\nu)}), \quad k=0,1,\ldots,m-2; \tag{17}$$
$$E(\xi_0^{(\nu+1)},\xi_1^{(\nu+1)}) \leqslant E(\xi_1^{(\nu+1)},\xi_2^{(\nu+1)}) \leqslant \ldots \leqslant E(\xi_{m-1}^{(\nu+1)},\xi_m^{(\nu+1)}).$$

Построение последовательности разбиений $\{\tau_\nu\}$ завершено.

Согласно (16) при каждом $k\in 0:m$ последовательность узлов $\{\xi_k^{(\nu)}\}$, $\nu = 0,1,\ldots$, монотонно не убывает и ограничена сверху числом d. Значит, все такие последовательности имеют пределы. Пусть

$$\lim_{\nu\to\infty}\xi_k^{(\nu)}=\xi_k^*, \quad k\in 0:m,$$

Условие (16) гарантирует, что

$$c=\xi_0^*\leqslant\xi_1^*\leqslant\ldots\leqslant\xi_m^*=d.$$

Перейдём к пределу при $\nu\to\infty$ в равенстве (17). В силу непрерывности величины наилучшего приближения как функции концов отрезка (лемма 4) получим
$$E(\xi_k^*,\xi_{k+1}^*)=E(\xi_{k+1}^*,\xi_{k+2}^*), \quad k\in 0:m-2,$$
то есть
$$E(\xi_0^*,\xi_1^*)=E(\xi_1^*,\xi_2^*)=\ldots=E(\xi_{m-1}^*,\xi_m^*)=:E^*.$$
При $E^*>0$ все ξ_k^* различны между собой. В этом случае разбиение $\tau^*=\{\xi_0^*,\xi_1^*,\ldots,\xi_m^*\}$ будет искомым разбиением с равными уклонениями.

Пусть $E^*=0$. Тогда среди узлов ξ_k^* могут быть совпадающие. Оставим в каждом блоке равных ξ_k^* по одному узлу и между оставшимися узлами поместим дополнительные попарно различные узлы так, чтобы общее количество узлов было ровно m. Получим разбиение $\tau'=\{\xi_0',\xi_1',\ldots,\xi_m'\}$ со свойством

$$E(\xi_0',\xi_1')=E(\xi_1',\xi_2')=\ldots=E(\xi_{m-1}',\xi_m')=0.$$

Очевидно, что разбиение τ' является разбиением с равными уклонениями.

Теорема доказана. $\square$

З а м е ч а н и е. Приведённое доказательство конструктивно в том смысле, что оно содержит алгоритм построения разбиения с равными уклонениями. При реализации этого алгоритма придётся иметь дело с двумя вспомогательными задачами:

1) находить полином наилучшего приближения функции $f(t)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$,

2) решать уравнение

$$r(x) := E(\alpha, x) - E(x, \beta) = 0.$$

Полином наилучшего приближения можно найти с помощью метода последовательных чебышёвских интерполяций [2, 3] или более общего метода, опирающегося на линейное программирование [4]. Для решения уравнения $r(x) = 0$ можно использовать последовательные линейные интерполяции.

В работе [5] показано, что при выполнении дополнительных условий (функция $f(t)$ непрерывно дифференцируема, величина $E_n\big(f; [\alpha, \beta]\big)$ положительна и разделённые разности $(n + 1)$-го порядка функции $f(t)$ неотрицательны) функция $r(x)$ дифференцируема. В этом случае для решения уравнения $r(x) = 0$ можно применить метод Ньютона.

5°. В монографии Е. Я. Ремеза [2, с. 196–206] детально изучается вопрос о наилучшем приближении выпуклой функции посредством непрерывной кусочно-линейной функции с переменными узлами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вершик А. М., Малозёмов В. Н., Певный А. Б. *Наилучшая кусочно-полиномиальная аппроксимация* // Сибирский матем. журнал, 1975. Т. 16. № 5. С. 925–938.

2. Ремез Е. Я. *Общие вычислительные методы чебышёвского приближения.* Киев: Изд-во АН УССР, 1957. 454 с.

3. Демьянов В. Ф., Малозёмов В. Н. *Введение в минимакс.* М.: Наука, 1972. 368 с.

4. Даугавет В. А. *Решение линейных задач аппроксимации при ограничениях* / В сб.: Вопросы теории и элементы программного обеспечения минимаксных задач. Под ред. В. Ф. Демьянова и В. Н. Малозёмова. Л.: Изд-во ЛГУ, 1977. С. 128–135.

5. Малозёмов В. Н., Певный А. Б. *О наилучшей кусочно-полиномиальной аппроксимации* // Вестник ЛГУ, 1976. № 19. С. 90–96.