НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ТОЧНОСТИ ШТРАФНОЙ ФУНКЦИИ*

М. В. Долгополик

maxim.dolgopolik@gmail.com

18 сентября 2014 г.

Аннотация. В докладе приводятся две теоремы о необходимых и достаточных условия, при выполнении которых штрафная функция является точной штрафной. Первая теорема формулируется в терминах «локальной» точности штрафной функции в решениях исходной задачи, в то время как вторая теорема описывает связь между точностью штрафной функции и поведением функции чувствительности оптимизационной задачи.

1°. Лемма о точности штрафной функции. Рассмотрим экстремальную задачу вида

$$f(x) \to \inf_{x \in \Omega}, \tag{1}$$

где Ω — непустое подмножество пространства $\mathbb{R}^n$, а функция f определена на $\mathbb{R}^n$ и принимает вещественные значения. Везде далее мы предполагаем, что решение задачи (1) существует. Обозначим $f^* = \min\limits_{x \in \Omega} f(x)$.

Пусть на $\mathbb{R}^n$ задана неотрицательная функция φ такая, что

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(x) = 0\}.$$

Для любого $\lambda \geqslant 0$ введём штрафную функцию

$$F_\lambda(x) = f(x) + \lambda\varphi(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Напомним (см. [1]), что штрафная функция F_λ называется *точной штрафной*, если существует такое $\lambda^* \geqslant 0$, что для любого $\lambda \geqslant \lambda^*$ множество точек глобального минимума функции F_λ совпадает с множеством решений задачи (1). Обозначим точную нижнюю грань всех таких λ^* через $\lambda^*(f, \varphi)$. Величина $\lambda^*(f, \varphi)$ называется *точным штрафным параметром* для штрафной

*Семинар по конструктивному негладкому анализу и недифференцируемой оптимизации «CNSA & NDO»: `http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/`

функции F_λ. Отметим, что для того чтобы доказать, что штрафная функция F_λ является точной штрафной необходимо и достаточно проверить, что для некоторого неотрицательного λ неравенство $F_\lambda(x) \geqslant f^*$ выполняется для всех $x \in \mathbb{R}^n$.

В работах [1, 2] рассматривались достаточные условия того, что штрафная функция F_λ является точной штрафной. Эти условия опираются на предположение о том, что функция F_λ достигает глобального минимума для всех достаточно больших λ, и на предположение о выполнении некоторого условия регулярности функции φ в некоторой окрестности множества Ω. Целью данного доклада является ослабление данных предположений.

Покажем сначала, что можно отказаться от предположения о том, что штрафная функция достигает глобального минимума для всех достаточно больших λ. Для этого нам потребуется понятие точности штрафной функции на заданном множестве.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $C \subset \mathbb{R}^n$ непустое множество. Будем говорить, что штрафная функция F_λ *точна* на множестве C, если существует такое $\lambda^* \geqslant 0$, что для всех $\lambda \geqslant \lambda^*$ справедливо неравенство

$$F_\lambda(x) \geqslant f^* \quad \forall x \in C.$$

При этом точная нижняя грань всех таких λ^* называется *точным штрафным параметром* функции F_λ на множестве C и обозначается $\lambda^*(C)$.

Ясно, что для любого множества C будет $\lambda^*(C) \leqslant \lambda^*(f, \varphi)$ и $\lambda^*(\mathbb{R}^n) = \lambda^*(f, \varphi)$. Проиллюстрируем понятие точности штрафной функции на заданном множестве на простом примере.

ПРИМЕР 1. Пусть $n = 1$, $\Omega = [-1, 1]$ и

$$f(x) = -x^2, \quad \varphi(x) = \max\{0, |x| - 1\}.$$

Пусть также $C_k = [-k, k]$, $k \in \mathbb{N}$. Нетрудно проверить, что $f^* = -1$ и штрафная функция F_λ не является точной штрафной, поскольку $F_\lambda(x) \to -\infty$ при $x \to \infty$ для любого $\lambda \geqslant 0$.

Покажем, что функция F_λ является точной на множестве C_k. Заметим, что из соображений симметрии достаточно показать, что штрафная функция F_λ является точной лишь на множестве $[1, k]$. Если $\lambda \geqslant 2k$, то

$$F'_\lambda(x) = -2x + \lambda \geqslant 0, \quad x \in (1, k].$$

Поэтому F_λ не убывает на $[1, k]$, откуда, учитывая что $F_\lambda(1) = f^* = -1$, получаем, что F_λ является точной на $[1, k]$ и $\lambda^*(C_k) \leqslant 2k$.

Вычислим точный штрафной параметр функции F_λ на множестве C_k. Пусть $\lambda < 2k$. Тогда функция F_λ возрастает на $[1, \lambda/2]$ и убывает на $[\lambda/2, k]$. Значит F_λ достигает минимума на отрезке $[1, k]$ в одном из его концов. Имеем

$$\min_{x\in[1,k]} F_\lambda(x) = \min\{F_\lambda(1), F_\lambda(k)\} = \min\{-1, -k^2 + \lambda(k-1)\}.$$

Поскольку $-k^2 + \lambda(k-1) \geqslant -1$ тогда и только тогда, когда $\lambda \geqslant k+1$ (если $k > 1$), то

$$\min_{x\in[1,k]} F_\lambda(x) \geqslant f^* = -1$$

тогда и только тогда, когда $\lambda \geqslant k+1$. Значит, $\lambda^*(C_k) = k+1$ при $k > 1$. Заметим, что $\lambda^*(C_k) \to \infty$ при $k \to \infty$.

Таким образом, штрафная функция F_λ не является точной штрафной, однако она является точной на любом ограниченном множестве.

Для любого $\delta > 0$ обозначим $\Omega_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(x) < \delta\}$.

ЛЕММА 1 (о точности штрафной функции). *Для того чтобы штрафная функция F_λ была точной штрафной необходимо и достаточно, чтобы*

1) *функция F_μ была ограничена снизу на $\mathbb{R}^n$ для некоторого $\mu \geqslant 0$;*

2) *функция F_λ была точной штрафной на множестве Ω_δ для некоторого $\delta > 0$.*

При этом справедливо неравенство

$$\lambda^*(f, \varphi) \leqslant \max\left\{\lambda^*(\Omega_\delta), \mu + \frac{f^* - c}{\delta}\right\},$$

где $c = \inf_{x\in\mathbb{R}^n} F_\mu(x)$.

Доказательство. Необходимость. Поскольку функция F_λ является точной штрафной, то она, очевидно, точна на множестве Ω_δ для любого $\delta > 0$ и ограничена снизу на $\mathbb{R}^n$ для любого $\lambda > \lambda^*(f, \varphi)$.

Достаточность. Пусть

$$\lambda \geqslant \max\left\{\lambda^*(\Omega_\delta), \mu + \frac{f^* - c}{\delta}\right\}. \tag{2}$$

Тогда по определению точности штрафной функции на множестве получаем

$$F_\lambda(x) \geqslant f^* \quad \forall x \in \Omega_\delta.$$

С другой стороны, если $x \notin \Omega_\delta$, то, по определению, $\varphi(x) \geqslant \delta$ и (см. (2))

$$F_\lambda(x) = F_\mu(x) + (\lambda - \mu)\varphi(x) \geqslant c + (\lambda - \mu)\delta \geqslant f^*,$$

где $c = \inf\limits_{x \in \mathbb{R}^n} F_\mu(x)$. Таким образом,

$$F_\lambda(x) \geqslant f^* \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

то есть F_λ — точная штрафная функция. □

С помощью леммы о точности штрафной функции можно усилить теорему 1 из [1], заменив предположение о том, что штрафная функция F_λ достигает глобального минимума на предположение об ограниченности снизу данной функции. Напомним, что величина

$$\varphi^{\downarrow}(x) = \liminf_{y \to x} \frac{\varphi(y) - \varphi(x)}{\|y - x\|}$$

называется *скоростью наискорейшего спуска* функции φ в точке x.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) *функция F_μ ограничена снизу на $\mathbb{R}^n$ для некоторого $\mu \geqslant 0$;*

2) *существуют $\delta > 0$ и $a > 0$ такие, что*

$$\varphi^{\downarrow}(x) \leqslant -a \quad \forall x \in \Omega_\delta \setminus \Omega;$$

3) *функция f удовлетворяет условию Липшица на множестве $\Omega_\delta \setminus \Omega$;*

4) *функции f и φ полунепрерывны снизу.*

Тогда штрафная функция F_λ является точной штрафной.

Доказательство. От противного. Предположим, что функция F_λ не является точной штрафной. Тогда для любого $\lambda \geqslant 0$ существует $x_\lambda \in \mathbb{R}^n$ такое, что

$$F_\lambda(x_\lambda) < f^*.$$

Заметим, что функция F_λ полунепрерывна снизу для любого $\lambda \geqslant 0$ в силу полунепрерывности снизу функций f и φ. Тогда воспользовавшись вариационным принципом Экланда [3], получим, что для любого $\lambda \geqslant \mu$ существует $y_\lambda \in \mathbb{R}^n$ такое, что

$$F_\lambda(y_\lambda) \leqslant F_\lambda(x_\lambda) < f^*, \quad F_\lambda(v) + \|v - y_\lambda\| > F_\lambda(y_\lambda) \quad \forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{y_\lambda\}. \tag{3}$$

Так как функция F_μ ограничена снизу на $\mathbb{R}^n$, то, рассуждая как и при доказательстве леммы о точности штрафной функции, нетрудно показать, что существует $\lambda_0 \geqslant \mu$ такое, что

$$F_\lambda(x) \geqslant f^* \quad \forall x \notin \Omega_\delta \quad \forall \lambda \geqslant \lambda_0.$$

Следовательно, для любого $\lambda \geqslant \lambda_0$ будет $y_\lambda \in \Omega_\delta \setminus \Omega$ (напомним, что $f^* = \inf\limits_{x \in \Omega} f(x)$, поэтому $y_\lambda \notin \Omega$).

Учитывая второе неравенство из (3), получаем

$$F_\lambda^\downarrow(y_\lambda) \geqslant -1. \tag{4}$$

С другой стороны, поскольку $y_\lambda \in \Omega_\delta \setminus \Omega$ для всех $\lambda \geqslant \lambda_0$, то $\varphi(y_\lambda) > 0$ и $\varphi^\downarrow(y_\lambda) \leqslant -a$ для всех достаточно больших λ. Поэтому найдётся последовательность $\{z_k(\lambda)\}$, сходящаяся к точке y_λ, и такая, что

$$\varphi(z_k(\lambda)) - \varphi(y_\lambda) \leqslant -\frac{a}{2}\|z_k(\lambda) - y_\lambda\| \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall \lambda \geqslant \lambda_0.$$

Отсюда вытекает, что $\varphi(z_k(\lambda)) \leqslant \varphi(y_\lambda) < \delta$, то есть $\{z_k(\lambda)\} \subset \Omega_\delta$. Так как функция φ полунепрерывна снизу на множестве Ω_δ и $\varphi(y_\lambda) > 0$, то не ограничивая общности можно считать что $\varphi(z_k(\lambda)) > 0$ для всех k. Поэтому $\{z_k(\lambda)\} \subset \Omega_\delta \setminus \Omega$. Далее

$$\begin{aligned} F_\lambda(z_k(\lambda)) - F_\lambda(y_\lambda) \leqslant f(z_k(\lambda)) - f(y_\lambda) + \lambda\big(\varphi(z_k(\lambda)) - \varphi(y_\lambda)\big) \leqslant \\ \leqslant \Big(L - \frac{a}{2}\lambda\Big)\,\|z_k(\lambda) - y_\lambda\|, \end{aligned}$$

где L — константа Липшица функции f на множестве $\Omega_\delta \setminus \Omega$. Следовательно,

$$F_\lambda^\downarrow(y_\lambda) \leqslant L - \frac{a}{2}\lambda \quad \forall \lambda \geqslant \lambda_0.$$

Поэтому для любого $\lambda > \max\{\lambda_0, (2L+2)/a\}$ будет $F_\lambda^\downarrow(y_\lambda) < -1$, что противоречит (4). Значит штрафная функция F_λ является точной штрафной. $\square$

Замечание 1.1. Следует особо отметить, что основным инструментом доказательства предыдущей теоремы является вариационный принцип Экланда [3]. Исследование того является ли штрафная функция точной штрафной всегда сводится к анализу поведения величины $\inf\limits_{x \in \mathbb{R}^n} F_\lambda(x)$ при изменении λ. Этот анализ существенно упрощается (ср. теорему 1 из [1]) в случае, когда штрафная функция F_λ достигает глобального минимума для любого $\lambda \geqslant 0$. Однако, отсутствие данного предположения, как в предыдущей теореме, почти неизбежно приводит к использованию вариационного принципа Экланда.

Непосредственно из определения точной нижней грани вытекает лишь, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое x_λ, что

$$F_\lambda(x_\lambda) < \inf_{x \in \mathbb{R}^n} F_\lambda(x) + \varepsilon.$$

При этом больше никакой информации об x_λ неизвестно. Однако, вариационный принцип Экланда позволяет получить эту информацию. А именно, согласно этому принципу для любого $r > 0$ найдётся y_λ такое, что

$$\|x_\lambda - y_\lambda\| < r, \quad F_\lambda(y_\lambda) \leqslant F_\lambda(x_\lambda)$$

и при этом «возмущённая» функция

$$g(x) = F_\lambda(x) + \frac{\varepsilon}{r}\|x - y_\lambda\|$$

достигает строгого глобального минимума в точке y_λ. Следует при этом отметить, что для справедливости вариационного принципа Экланда необходима полунепрерывность снизу исследуемой функции и полнота, как метрического пространства, области задания этой функции.

По сравнению с теоремой 1 из [1], в предыдущей теореме добавилось условие полунепрерывности снизу функций f и φ на множестве Ω_δ. Покажем на примере что это условие существенно.

ПРИМЕР 2. Пусть $n = 1$, $\Omega = (-\infty, 0]$, $\varphi(x) = x_+ := \max\{x, 0\}$ и

$$f(x) = \begin{cases} -x, \text{ если } x \leqslant 0, \\ x - 1, \text{ если } x > 0. \end{cases}$$

Заметим, что $f^* = 0$, $\Omega_\delta = (-\infty, \delta)$ для любого $\delta > 0$ и штрафная функция F_λ ограничена снизу на $\mathbb{R}$ для любого $\lambda \geqslant 0$. При этом для всех $\delta > 0$

$$\varphi^{\downarrow}(x) = -1 \quad \forall x \in \Omega_\delta \setminus \Omega$$

и функция f удовлетворяет условию Липшица на $\Omega_\delta \setminus \Omega$ с константой Липшица $L = 1$. Однако, штрафная функция F_λ не является точной штрафной, так как

$$\inf_{x \in \mathbb{R}} F_\lambda(x) = -1 < 0 =: f^* \quad \forall \lambda \geqslant 0.$$

Заметим, что в данном примере штрафная функция F_λ не достигает глобального минимума ни для какого $\lambda \geqslant 0$, а функция f не является полунепрерывной снизу на множестве Ω_δ.

2°. Локальная точность штрафной функции. Для выполнения условий теоремы 1 требуется, чтобы функция f удовлетворяла условию Липшица на всём множестве $\Omega_\delta \setminus \Omega$, а скорость наискорейшего спуска функции φ была отделена от нуля на этом множестве. Однако, для того чтобы штрафная функция была точной штрафной достаточно, чтобы функции f и φ удовлетворяли этим условиям лишь вблизи решений исходной задачи (1). Для того чтобы более точно сформулировать данный результат нам потребуется следующее определение точности штрафной функции в точке.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $x^* \in \Omega$ является точкой локального минимума в задаче (1). Будем говорить, что штрафная функция F_λ является *точной* в точке x^*, если существует $\lambda^* \geqslant 0$ такое, что для любого $\lambda \geqslant \lambda^*$ точка x^* является точкой локального минимума штрафной функции F_λ. Точная нижняя грань всех таких λ^* называется *точным штрафным параметром* функции F_λ в точке x^* и обозначается через $\lambda^*(x^*)$.

Замечание 1.2. Рассмотрим задачу математического программирования

$$f(x) \to \inf \tag{5}$$

$$g_i(x) \leqslant 0, \quad i \in \{1, \ldots, m\}, \quad h_j(x) = 0, \quad j \in \{1, \ldots, r\}, \tag{6}$$

где все функции f, g_i и h_j определены и непрерывно дифференцируемы на $\mathbb{R}^n$. Определим

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{r} |h_j(x)| + \sum_{i=1}^{m} (g_i(x))_+.$$

Штрафную функцию $F_\lambda = f + \lambda\varphi$ для данной функции φ обычно называют ℓ_1 штрафной функцией.

Можно показать [4, 5], что если в точке x^* локального минимума в задаче (5)–(6) выполнено одно из стандартных условий регулярности [5], то ℓ_1 штрафная функция F_λ является точной в точке x^*.

Оказывается, что при некоторых дополнительных предположениях штрафная функция будет точной штрафной тогда и только тогда, когда она точна в каждом решении исходной задачи (1).

ТЕОРЕМА 2. *Пусть функции f и φ полунепрерывны снизу. Предположим также, что существует $\mu > 0$ такое, что множество Лебега*

$$L(F_\mu, f^*) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid F_\mu(x) < f^*\}$$

ограничено. Тогда для того чтобы штрафная функция F_λ была точной штрафной, необходимо и достаточно, чтобы F_λ была точна в каждом решении задачи (1).

Доказательство. Н е о б х о д и м о с т ь. Если F_λ является точной штрафной функцией, то по определению для достаточно большого λ множество точек глобального минимума функции F_λ совпадает с множеством решений задачи (1). Поэтому для достаточно большого λ каждое решение x^* задачи (1) является точкой минимума функции F_λ, то есть функция F_λ точна в точке x^*.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Заметим, что справедливо включение

$$L(F_\lambda, f^*) \subset L(F_\mu, f^*) \quad \forall \lambda \geqslant \mu.$$

Поэтому, с учётом ограниченности множества $L(F_\mu, f^*)$ получаем, что, либо для всех $\lambda \geqslant \mu$ множество $L(F_\lambda, f^*)$ непусто и содержится в некотором шаре $B(0, R)$, где $R > 0$ не зависит от λ, либо для некоторого $\lambda \geqslant \mu$ это множество пусто и тогда, очевидно, штрафная функция F_λ является точной штрафной.

Пусть множество $L(F_\lambda, f^*)$ непусто для любого $\lambda \geqslant \mu$. Тогда, учитывая полунепрерывность снизу функций f и φ, получаем, что для всех $\lambda \geqslant \mu$ штрафная функция F_λ достигает глобального минимума, причём существует точка глобального минимума $x(\lambda)$ функции F_λ, принадлежащая множеству $B(0, R)$.

Выберем произвольную неограниченно возрастающую последовательность $\{\lambda_n\}$ такую, что $\lambda_n \geqslant \mu$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда соответствующая последовательность глобальных минимумов $\{x(\lambda_n)\}$ ограничена. Поэтому из неё можно выбрать подпоследовательность, которую мы также обозначим через $\{x(\lambda_n)\}$, сходящуюся к некоторой точке x^*. По предложению 2 из [1] будет $\varphi(x(\lambda_n)) \to 0$ при $n \to \infty$. Откуда, учитывая полунепрерывность снизу функции φ, получаем, что $\varphi(x^*) = 0$, то есть $x^* \in \Omega$.

Покажем, что x^* — это решение задачи (1). Поскольку $x(\lambda_n)$ — это точка глобального минимума функции F_{λ_n}, то $f(x_{\lambda_n}) < f^*$ (в противном случае множество $L(F_{\lambda_n}, f^*)$ пусто). С другой стороны, учитывая полунепрерывность снизу функции f и тот факт, что $x^* \in \Omega$, имеем

$$f^* \leqslant f(x^*) \leqslant \liminf_{n \to \infty} f(x(\lambda_n)) \leqslant f^*.$$

Отсюда $f(x^*) = f^*$, т. е. x^* — это решение задачи (1) и, следовательно, штрафная функция F_λ точна в точке x^*. Поэтому существуют $r > 0$ и $\lambda_0 \geqslant 0$ такие, что

$$F_\lambda(x) \geqslant F_\lambda(x^*) \quad \forall \lambda \geqslant \lambda_0, \quad \forall x \in B(x^*, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x^*\| \leqslant r\}. \tag{7}$$

Поскольку последовательность $\{x(\lambda_n)\}$ сходится к точке x^*, то начиная с некоторого n будет $x(\lambda_n) \in B(x^*, r)$. Заметим также, что из того факта, что последовательность $\{\lambda_n\}$ неограниченно возрастает, вытекает, что $\lambda_n \geqslant \lambda_0$ для всех достаточно больших n. Поэтому из (7) следует, что

$$F_{\lambda_n}(x(\lambda_n)) \geqslant F_{\lambda_n}(x^*) = f^*,$$

начиная с некоторого n, что противоречит предположению о непустоте множества $L(F_{\lambda_n}, f^*)$. $\square$

Рассуждая как и при доказательстве части «Достаточность» предыдущей теоремы нетрудно проверить справедливость следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть функции f и φ полунепрерывны снизу. Тогда для того чтобы штрафная функция F_λ была точной на любом ограниченном множестве необходимо и достаточно, чтобы F_λ была точна в каждом решении задачи* (1).

3°. Функция чувствительности и штрафные функции. В данном разделе мы кратко опишем альтернативный подход к исследованию штрафных функций [6–8], опирающийся на анализ поведения функции чувствительности. Функция чувствительности играет очень важную роль при исследовании различных вопросов теории экстремальных задач [9–11]. Подробное изложение теории чувствительности в оптимизации можно найти в книгах [12–14].

Для иллюстрации основной идеи мы рассмотрим лишь простейшее возмущение исходной задачи (1). Заметим, что задачу (1) можно переписать в виде

$$f(x) \to \inf,$$
$$\varphi(x) \leqslant 0.$$

Для этой задачи рассмотрим возмущённую экстремальную задачу

$$f(x) \to \inf, \tag{8}$$
$$\varphi(x) \leqslant p, \tag{9}$$

где $p \geqslant 0$. Обозначим множество допустимых планов этой задачи через $\Omega(p)$, и введём *функцию чувствительности* задачи (1)

$$h(p) = \inf_{x \in \Omega(p)} f(x) \quad \forall p \geqslant 0. \tag{10}$$

Заметим, что $h(0) = f^*$. Оказывается, что необходимое и достаточное условие того, что штрафная функция F_λ является точной штрафной, можно выразить в терминах поведения функции h в окрестности нуля.

ТЕОРЕМА 4. *Для того чтобы штрафная функция F_λ была точной штрафной необходимо и достаточно, чтобы*

1) функция F_μ была ограничена снизу для некоторого $\mu \geqslant 0$;

2) скорость наискорейшего спуска функции h в нуле была конечной, т. е.

$$h^{\downarrow}(0) = \liminf_{p \to +0} \frac{h(p) - h(0)}{p} > -\infty.$$

Доказательство. Покажем, что $h^{\downarrow}(0) > -\infty$ тогда и только тогда, когда штрафная функция F_λ точна на множестве Ω_δ для некоторого $\delta > 0$. Тогда воспользовавшись леммой о точности штрафной функции, получим требуемый результат.

Пусть $h^{\downarrow}(0) > -\infty$. В этом случае существуют $\delta > 0$ и $\lambda > 0$ такие, что

$$h(p) - h(0) \geqslant -\lambda p \quad \forall p \in [0, \delta).$$

Пусть $x \in \Omega_\delta$. Обозначим $p = \varphi(x)$. Имеем $x \in \Omega(p)$ и $f(x) \geqslant h(p)$. Поэтому

$$f(x) - f^* \geqslant h(p) - f^* = h(p) - h(0) \geqslant -\lambda p = -\lambda \varphi(x)$$

или, что эквивалентно,

$$F_\lambda(x) = f(x) + \lambda \varphi(x) \geqslant f^* \quad \forall x \in \Omega_\delta. \tag{11}$$

Значит штрафная функция F_λ является точной на множестве Ω_δ.

Предположим теперь, что штрафная функция F_λ является точной на множестве Ω_δ. Тогда для любого $\lambda > \lambda^*(\Omega_\delta)$ выполнено (11). Следовательно, для любого $p \in (0, \delta)$ будет

$$f(x) - f^* = f(x) - h(0) \geqslant -\lambda \varphi(x) \geqslant -\lambda p \quad \forall x \in \Omega(p).$$

Поскольку последнее неравенство выполнено для всех $x \in \Omega(p)$, то

$$h(p) - h(0) = \inf_{x \in \Omega(p)} f(x) - h(0) \geqslant -\lambda p \quad \forall p \in [0, \delta),$$

откуда следует, что $h^{\downarrow}(0) \geqslant -\lambda$. □

Приведём два простых примера иллюстрирующих теорему 4.

ПРИМЕР 3. Пусть $\Omega = (-\infty, 0]$ и

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant 0, \\ -\sqrt{x}, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

Положим $\varphi(x) = x_+$. Для любого $p \geqslant 0$ будет $\Omega(p) = (-\infty, p]$ и

$$h(p) = \inf_{x \in (-\infty, p]} f(x) = -\sqrt{p}.$$

Отсюда получаем
$$\liminf_{p\to+0}\frac{h(p)-h(0)}{p}=\liminf_{p\to+\infty}-\frac{1}{\sqrt{p}}=-\infty.$$
Следовательно, штрафная функция F_λ не является точной штрафной. Нетрудно проверить, что данная штрафная функция не является точной в единственном решении $x^*=0$ рассматриваемой задачи.

Положим теперь $\varphi(x)=\sqrt{x}$. Тогда $\Omega(p)=(-\infty,p^2]$ и $h(p)=-p$ для всех $p\geqslant 0$. Поэтому
$$\liminf_{p\to+0}\frac{h(p)-h(0)}{p}=\liminf_{p\to+\infty}-1=-1.$$
Отсюда получаем, что штрафная функция F_λ является точной штрафной.

ПРИМЕР 4. [9–11] Рассмотрим задачу математического программирования
$$f(x)\to\inf \tag{12}$$
$$g_i(x)\leqslant 0,\quad i\in\{1,\dots,s\}. \tag{13}$$
Обозначим
$$\Omega=\big\{x\in\mathbb{R}^n \mid g_i(x)\leqslant 0,\ i\in\{1,\dots,s\}\big\},$$
$$\Omega(v)=\big\{x\in\mathbb{R}^n \mid g_i(x)\leqslant v_i,\ i\in\{1,\dots,s\}\big\}.$$

Здесь $v=(v_1,\dots,v_s)\in\mathbb{R}^s$ — произвольный вектор. Функция
$$h(v)=\inf_{x\in\Omega(v)}f(x)$$
называется *функцией чувствительности* задачи (12)–(13). Множество
$$\partial h(0)=\{y\in\mathbb{R}^s \mid h(v)-h(0)\geqslant\langle y,v\rangle\ \forall v\in\mathbb{R}^s\}$$
называется *субдифференциалом* функции чувствительности h в нуле (заметим, что в данном определении не делается никаких предположений о выпуклости функции h). Обозначим также через h^+ сужение функции h на неотрицательный ортант $\mathbb{R}^s_+$.

Рассуждая как и при доказательстве теоремы 4 нетрудно проверить, что ℓ_1 штрафная функция для задачи (12)–(13), имеющая вид
$$F_\lambda(x)=f(x)+\sum_{i=1}^{s}(g_i(x))_+,$$
является точной штрафной тогда и только тогда, когда функция F_λ ограничена снизу для некоторого $\lambda\geqslant 0$ и скорость наискорейшего спуска функции h^+ в нуле конечна. Можно проверить, что если $\partial h(0)\neq\varnothing$, т. е. если выполнено условие *глобальной регулярности* [10, 11] задачи (12)–(13), то скорость наискорейшего спуска функции h^+ конечна.

ЛИТЕРАТУРА

1. Долгополик М.В. *Точные штрафные функции в негладкой оптимизации* // Семинар «CNSA & NDO». Избранные доклады. 8 мая 2014 г. (`http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/reps14.shtml#0508`)

2. Демьянов В.Ф. *Условия экстремума и вариационное исчисление.* М.: Высш. шк., 2004. 335 с.

3. Ekeland I. *On the variational principle* // Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1974. vol. 47. pp. 324–353.

4. Han S.P., Mangasarian O.L. *Exact penalty functions in nonlinear programming* // Mathematical Programming, 1979. vol. 17. pp. 251–269.

5. Bertsekas D.P., Koksal A.E. *Enhanced optimality conditions and exact penalty functions* // Proceedings of Allerton Conference. 2000. URL: `http://www.web.mit.edu/asuman/www/documents/Allerton_Paper.pdf`

6. Кларк Ф. *Оптимизация и негладкий анализ.* М.: Наука, 1988. 280 с.

7. Burke J.V. *Calmness and exact penalization* // SIAM Journal on Control and Optimization, 1991. vol. 29, no. 2. pp. 493–497.

8. Uderzo A. *Exact penalty functions and calmness for mathematical programming under nonlinear perturbations* // Nonlinear Analysis, 2010. vol. 73, no. 6. pp. 1596–1609.

9. Лазарев А.В. *О соотношении двойственности в математическом программировании* [Электронный ресурс] // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 17.05.2008. URL: `http://www.dha.spb.ru/PDF/duality.pdf` (дата обращения: 25.10.2014).

10. Лазарев А.В. *Необходимые условия глобальной оптимальности* [Электронный ресурс] // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 9.09.2008. URL: `http://www.dha.spb.ru/PDF/GlobalOptimality.pdf` (дата обращения: 25.10.2014).

11. Гаудиозо М., Малозёмов В.Н. *Глобальная регулярность в математическом программировании* [Электронный ресурс] // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 28.10.2008. URL: `http://www.dha.spb.ru/PDF/GlobalRegularity.pdf` (дата обращения: 25.10.2014).

12. Измайлов А.Ф. *Чувствительность в оптимизации.* М.: Физматлит, 2006. 248 с.

13. Bank G., Guddat J., Klatte D., Kummer B., Tammer D. *Non-linear Parametric Optimization.* Basel: Birkhäuser Verlag, 1983. 228 p.

14. Bonnans F., Shapiro A. *Perturbation analysis of optimization problems.* New York: Springer-Verlag, 2000. 601 p.