НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ В ТЕОРЕМЕ О МИНИМАКСЕ*

М. В. Долгополик

maxim.dolgopolik@gmail.com

6 ноября 2014 г.

Аннотация. В докладе приводится обобщение классической теоремы о минимаксе [1], опирающееся на результаты работ [2, 3].

1°. Теорема о минимаксе. Пусть P — выпуклое подмножество пространства $\mathbb{R}^n$, Q — произвольное непустое множество и $f\colon P \times Q \to \mathbb{R}$ заданная функция. Предполагается, что функция $f(x, y)$ выпукла по x при каждом $y \in Q$.

Введём две величины:

$$f_* = \sup_{y \in Q} \inf_{x \in P} f(x, y), \quad f^* = \inf_{x \in P} \sup_{y \in Q} f(x, y).$$

Теорема о минимаксе содержит условия, гарантирующие выполнение равенства $f_* = f^*$. Заметим, что всегда справедливо неравенство $f_* \leqslant f^*$. Поэтому можно предполагать, что $f^* > -\infty$.

Простой переформулировкой условия $f_* = f^*$ является следующий результат, который потребуется нам в дальнейшем.

ЛЕММА 1. *Выполнение равенства $f_* = f^*$ эквивалентно каждому из следующих условий:*

1) для любого $\sigma < f^*$ множество $\bigcap_{x \in P} \{y \in Q \mid f(x, y) \geqslant \sigma\}$ непусто;

2) для любого $\sigma > f_*$ множество $\bigcap_{y \in Q} \{x \in P \mid f(x, y) \leqslant \sigma\}$ непусто.

*Семинар по конструктивному негладкому анализу и недифференцируемой оптимизации «CNSA & NDO»: `http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/`

Доказательство. Докажем, что справедливость равенства $f_* = f^*$ эквивалентна выполнению условия 1. Действительно, пусть

$$f_* := \sup_{y\in Q} \inf_{x\in P} f(x,y) = \inf_{x\in P} \sup_{y\in Q} f(x,y) =: f^*.$$

По определению супремума для любого $\sigma < f^*$ существует $y_0 \in Q$ такое, что

$$\inf_{x\in P} f(x,y_0) > \sigma,$$

откуда $f(x,y_0) > \sigma$ для любого $x \in P$, то есть

$$y_0 \in \bigcap_{x\in P} \{y \in Q \mid f(x,y) \geqslant \sigma\}.$$

Значит множество $\bigcap\limits_{x\in P} \{y \in Q \mid f(x,y) \geqslant \sigma\}$ непусто.

Обратно, пусть для любого $\sigma < f^*$ множество $\bigcap\limits_{x\in P} \{y \in Q \mid f(x,y) \geqslant \sigma\}$ непусто. Это означает, что для любого $\sigma < f^*$ существует $y_0 \in Q$ такое, что

$$f(x,y_0) \geqslant \sigma \quad \forall x \in P.$$

Следовательно

$$\inf_{x\in P} f(x,y_0) \geqslant \sigma,$$

и тем более

$$f_* = \sup_{y\in Q} \inf_{x\in P} f(x,y) \geqslant \sigma.$$

Поскольку $\sigma < f^*$ произвольно, то $f_* \geqslant f^*$, и значит справедливо равенство $f_* = f^*$. $\square$

Для доказательства теоремы о минимаксе нам также потребуется следующее утверждение о неразрешимости системы строгих линейных неравенств специального вида.

ЛЕММА 2. *Система строгих линейных неравенств*

$$\begin{cases} \langle v_1, x\rangle + a_1 < \sigma \\ \langle v_2, x\rangle + a_2 < \sigma \end{cases} \tag{1}$$

не имеет решений тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{co}\{(a_1,v_1),(a_2,v_2)\} \cap \big([\sigma,+\infty) \times \{0_n\}\big) \neq \varnothing. \tag{2}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть система (1) не имеет решений, но
$$\mathrm{co}\{(a_1, v_1), (a_2, v_2)\} \cap \big([\sigma, +\infty) \times \{0_n\}\big) = \varnothing.$$
Тогда по теореме об отделимости найдётся ненулевой вектор $(b, w) \in \mathbb{R}^{n+1}$ такой, что

$$\langle (b, w), z_1 \rangle < \langle (b, w), z_2 \rangle \quad \forall z_1 \in \mathrm{co}\{(a_1, v_1), (a_2, v_2)\}, \quad \forall z_2 \in [\sigma, +\infty) \times \{0_n\}.$$

В частности, справедливы неравенства

$$ba_i + \langle w, v_i \rangle < b\beta, \quad \forall \beta \geqslant \sigma,\ i \in \{1, 2\}. \tag{3}$$

Следовательно, $b \geqslant 0$. Покажем, что $b > 0$. Действительно, если $b = 0$, то (3) преобразуется к виду
$$\langle v_i, w \rangle < 0, \quad i \in \{1, 2\},$$
откуда вектор tw является решением системы (1) для достаточно большого $t > 0$, что противоречит предположению. Значит $b > 0$. Разделив на b и положив $\beta = \sigma$ в (3), получим, что $\frac{1}{b}w$ является решением системы (1), что противоречит предположению о неразрешимости данной системы.

Достаточность. Пусть выполнено (2), и предположим, что множество решений системы (1) непусто. Для любого решения x системы (1) имеем

$$t\big(\langle v_1, x \rangle + a_1\big) + (1 - t)\big(\langle v_2, x \rangle + a_2\big) < \sigma \quad \forall t \in [0, 1]. \tag{4}$$

С другой стороны, из условия (2) следует, что найдётся $t \in [0, 1]$ такое, что $tv_1 + (1 - t)v_2 = 0_n$ и $ta_1 + (1 - t)a_2 \geqslant \sigma$. Поэтому

$$\langle tv_1 + (1 - t)v_2, x \rangle + ta_1 + (1 - t)a_2 \geqslant \sigma,$$

что противоречит (4). □

Для того чтобы сформулировать теорему о минимаксе в общей форме нам потребуется вспомогательное понятие.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ([3]). Семейство функций $\{f(x, \cdot)\}$, $x \in P$, называется *слабо похожим на вогнутое* (англ. weakly concavelike), если для любых $y_1, y_2 \in Q$ и $t \in [0, 1]$ справедливо неравенство

$$\sup_{y \in Q} \inf_{x \in P} f(x, y) \geqslant \inf_{x \in P} (tf(x, y_1) + (1 - t)f(x, y_2)).$$

Нетрудно проверить, что если Q является выпуклым подмножеством некоторого линейного пространства, а функция f вогнута по y при каждом $x \in P$, то семейство $\{f(x, \cdot)\}$, $x \in P$, является слабо похожим на вогнутое.

Введём дополнительные обозначения. Для любого $y \in Q$ положим

$$\operatorname{supp} f(\cdot, y) = \big\{(a, v) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid f(x, y) \geqslant \langle v, x\rangle + a \quad \forall x \in P\big\}.$$

Заметим, что из выпуклости функции $f(\cdot, y)$ следует, что множество $\operatorname{supp} f(\cdot, y)$ непусто (справедливость данного утверждения вытекает из теоремы об отделимости). Для любой пары $(a, v) \in \mathbb{R}^{n+1}$ и для всех $\sigma \in \mathbb{R}$ обозначим $L((a, v), \sigma) = \{x \in P \mid \langle v, x\rangle + a < \sigma\}$.

Теперь мы можем сформулировать и доказать основной результат.

ТЕОРЕМА (о минимаксе)**.** *Пусть функция f выпукла по x при каждом $y \in Q$. Для того чтобы выполнялось равенство*

$$f_* := \sup_{y\in Q} \inf_{x\in P} f(x, y) = \inf_{x\in P} \sup_{y\in Q} f(x, y) =: f^*$$

необходимо и достаточно, чтобы

1) семейство $\{f(x, \cdot)\}$, $x \in P$, было слабо похожим на вогнутое;

2) для любого $\sigma < f^*$ существовали $y_1, y_2 \in Q$, $(a_1, v_1) \in \operatorname{supp} f(\cdot, y_1)$ и $(a_2, v_2) \in \operatorname{supp} f(\cdot, y_2)$ такие, что $L((a_1, v_1), \sigma) \cap L((a_2, v_2), \sigma) = \varnothing$.

Доказательство. Необходимость. Зафиксируем произвольное $\sigma < f^*$. По лемме 1 найдётся $y_0 \in Q$ такое, что $f(x, y_0) \geqslant \sigma$ для всех $x \in P$, т.е. $(\sigma, 0_n) \in \operatorname{supp} f(\cdot, y_0)$. Поскольку $L((\sigma, 0_n), \sigma) = \{x \in P \mid \sigma < \sigma\} = \varnothing$, то

$$L((\sigma, 0_n), \sigma) \cap L((a, v), \sigma) = \varnothing \quad \forall (a, v) \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Следовательно, условие 2 теоремы выполнено для $y_1 = y_0$ и любого $y_2 \in Q$.

Зафиксируем произвольные $y_1, y_2 \in Q$ и $t \in [0, 1]$. По лемме 1 для любого $\sigma > f_*$ найдётся $x_0 \in P$ такое, что $f(x_0, y) \leqslant \sigma$ для всех $y \in Q$. Отсюда

$$tf(x_0, y_1) + (1 - t)f(x_0, y_2) \leqslant \sigma$$

и тем более

$$\inf_{x\in P}(tf(x, y_1) + (1 - t)f(x, y_2)) \leqslant \sigma.$$

Поскольку $\sigma > f_*$ произвольно, то

$$\inf_{x\in P}(tf(x, y_1) + (1 - t)f(x, y_2)) \leqslant f_* = \sup_{y\in Q} \inf_{x\in P} f(x, y),$$

то есть семейство $\{f(x,\cdot)\}$, $x \in P$, является слабо похожим на вогнутое.

Д о с т а т о ч н о с т ь. По условию 2 теоремы существуют y_1, $y_2 \in Q$, $(a_1, v_1) \in \operatorname{supp} f(\cdot, y_1)$ и $(a_2, v_2) \in \operatorname{supp} f(\cdot, y_2)$ такие, что

$$L((a_1, v_1), \sigma) \cap L((a_2, v_2), \sigma) = \varnothing.$$

Данное условие означает, что система строгих линейных неравенств

$$\begin{cases} \langle v_1, x\rangle + a_1 < \sigma \\ \langle v_2, x\rangle + a_2 < \sigma \end{cases}$$

не имеет решений. Следовательно, по лемме 2 будет

$$\operatorname{co}\{(a_1, v_1), (a_2, v_2)\} \cap \big([\sigma, +\infty) \times \{0_n\}\big) \neq \varnothing,$$

то есть существует $t \in [0, 1]$ такое, что $tv_1 + (1-t)v_2 = 0_n$ и $ta_1 + (1-t)a_2 \geqslant \sigma$. Отсюда

$$\langle tv_1 + (1-t)v_2, x\rangle + ta_1 + (1-t)a_2 \geqslant \sigma \quad \forall x \in P.$$

По условию $(a_i, v_i) \in \operatorname{supp} f(\cdot, y_i)$. Значит для любого $x \in P$ справедливы неравенства

$$tf(x, y_1) + (1-t)f(x, y_2) \geqslant \langle tv_1 + (1-t)v_2, x\rangle + ta_1 + (1-t)a_2 \geqslant \sigma,$$

откуда вытекает

$$\inf_{x\in X}(tf(x, y_1) + (1-t)f(x, y_2)) \geqslant \sigma.$$

Теперь воспользовавшись условием 1 получим, что

$$f_* = \sup_{y\in Q}\inf_{x\in P} f(x, y) \geqslant \inf_{x\in X}(tf(x, y_1) + (1-t)f(x, y_2)) \geqslant \sigma.$$

Поскольку $\sigma < f^*$ произвольно, то $f_* \geqslant f^*$, что и требовалось доказать. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. Малозёмов В.Н. *К теореме о минимаксе* [Электронный ресурс] // Семинар «CNSA & NDO» [Официальный сайт]. Избранные доклады. 30.10.2014. URL: `http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/pdf/MinMax.pdf` (дата обращения: 9.11.2014).

2. Bednarczhuk E.M., Syga M. *Minmax theorems for Φ-convex functions with applications* // Control and Cybernetics, 2014. In press.

3. Stefanescu A. *The minimax equality: sufficient and necessary conditions* // Acta Math. Sinica, English Series, 2007. vol. 23. pp. 677–684.