ЭТЮД НА ТЕМУ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ ФИЛЬТРОВОЙ ЗАДАЧИ $(n = 1, 2)^*$

Г. Ш. Тамасян

g.tamasyan@spbu.ru

27 ноября 2014 г.

Аннотация. Изучаются свойства решения полиномиальной фильтровой задачи в зависимости от параметра, начатое в докладе [1].

1°. Постановка задачи. Пусть $M > 0$, $b < -1$, $a > 1$, A — вещественные параметры. Обозначим

$$P_n(x,t) = x_0 t^n + x_1 t^{n-1} + x_2 t^{n-2} + \ldots + x_n$$

— алгебраический полином степени не выше n, $n \geqslant 1$.

В докладе [1] изучалась следующая экстремальная задача:

$$\begin{gathered} P_n(x,b) \to \max, \\ \big|P_n(x,t)\big| \leqslant M,\ t \in [-1,1]; \\ P_n(x,a) = A. \end{gathered} \tag{1}$$

Пусть x^* — решение задачи (1). В докладе будут найдены явные формулы зависимости решения задачи (1) от параметра A при n, равном 1 и 2.

Следуя [1], введём обозначения. Положим

$$A_n = MT_n(a), \tag{2}$$

где $T_n(t) = \cos(n \arccos(t))$ — полиномы Чебышёва на отрезке $[-1,1]$.

Пусть $\tau^* = \cos(\frac{\pi}{n})$. Обозначим

$$\hat{A}_n = \Lambda_n(\tau^*, a), \qquad \check{A}_n = V_n(\tau^*, a), \tag{3}$$

где

$$\Lambda_n(\tau^*, a) = MT_n(\tfrac{1+\tau^*}{2}a + \tfrac{1-\tau^*}{2}), \quad V_n(\tau^*, a) = MT_n(\tfrac{1+\tau^*}{2}a - \tfrac{1-\tau^*}{2}).$$

*Семинар по конструктивному негладкому анализу и недифференцируемой оптимизации «CNSA & NDO»: `http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/`

Далее нам потребуются следующие утверждения, справедливые при $n \geqslant 2$ (см. [1], теоремы 1–3, 5 и 6).

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *При $A \in [-A_n, A_n]$ решение задачи (1) существует и единственно.*

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Если $A = \pm A_n$, то единственным решением задачи (1) является полином $\pm MT_n(t)$.*

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. *Если $A = (-1)^{n+1}A_{n-1}$, то единственным решением задачи (1) является полином $(-1)^{n+1}MT_{n-1}(t)$.*

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. *Пусть $A \in (-A_n, A_n)$.*

Для того чтобы план x^* был оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы полином $P_n(x^*, t)$ обладал n-точечным альтернансом, то есть чтобы нашлись n точек $-1 \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_n \leqslant 1$, в которых

$$P_n(x^*, t_k) = (-1)^{k-1}M, \quad k \in 1 : n. \tag{4}$$

Чтобы подчеркнуть зависимость решения задачи x^* от A будем обозначать его $x^*(A)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. *При чётном n старший коэффициент $x_0^*(A)$ экстремального полинома $P_n\big(x^*(A), t\big)$ положителен при $A \in (-A_{n-1}, A_n)$, равен нулю при $A = -A_{n-1}$ и отрицателен при $A \in (-A_n, -A_{n-1})$.*

При нечётном n старший коэффициент $x_0^*(A)$ экстремального полинома $P_n\big(x^*(A), t\big)$ положителен при $A \in (A_{n-1}, A_n)$, равен нулю при $A = A_{n-1}$ и отрицателен при $A \in (-A_n, A_{n-1})$.

Представляет интерес более детальная информация о полиноме $P_n(x^*(A), t)$ и о расположении точек альтернанса в зависимости от параметра A. Мы исследуем этот вопрос в простейших случаях, при n, равном 1 и 2.

2°. Случай $n = 1$. Обозначим

$$P_1^*(t) = P_1(x^*, t) = x_0 t + h. \tag{5}$$

При $n = 1$ имеем $T_1(t) = t$, $A_1 = Ma$, $\hat{A}_1 = -\check{A}_1 = M$.

Дальнейший анализ опирается на постановку задачи (1) и на геометрические соображения.

При $A = \pm A_1$ полином $P_1^*(t)$ принимает вид

$$P_1^*(t) = \pm Mt. \tag{6}$$

Пусть $A \in (-A_1, A_1)$, $A \neq M$. Тогда полином $P_1^*(t)$ имеет одну точку альтернанса. Выясним, как выглядит полином $P_1^*(t)$ при различных A. Рассмотрим два случая.

1) $A \in (A_0, A_1)$, где $A_0 = M$. Прямая $P_1^*(t)$ возрастает. Так как нам требуется максимизировать величину $P_1^*(b)$, получаем, что точкой альтернанса t_1 может быть только правый конец отрезка $[-1, 1]$, так что $t_1 = 1$. Составим систему

$$\begin{cases} P_1^*(t_1) = M, \\ P_1^*(a) = A. \end{cases} \tag{7}$$

Единственное решение выражается через параметры $a > 1$, $M > 0$ и A следующим образом:

$$x_0 = \tfrac{A-M}{a-1}, \tag{8}$$
$$h = \tfrac{Ma-A}{a-1}. \tag{9}$$

Получаем

$$P_1^*(t) = \tfrac{A-M}{a-1}t + \tfrac{Ma-A}{a-1} \quad \text{при } A \in (A_0, A_1). \tag{10}$$

2) $A \in (-A_1, A_0)$. В этом случае необходимо $x_0 < 0$ и $t_1 = -1$. Тогда система (7) имеет решение

$$x_0 = \tfrac{A-M}{a+1}, \tag{11}$$
$$h = \tfrac{Ma+A}{a+1}, \tag{12}$$

и

$$P_1^*(t) = \tfrac{A-M}{a+1}t + \tfrac{Ma+A}{a+1} \quad \text{при } A \in (-A_1, A_0). \tag{13}$$

Замечание 1. Отметим, что формула (6) получается из (10) при $A = A_1$ и из (13) при $A = -A_1$.

Замечание 2. Если $A = A_0 = M$, то $x_0 = 0$ (см. (8), (11)) и $h = M$ (см. (9), (12)). Имеем

$$P_1^*(t) \equiv M \quad \text{при } A = M. \tag{14}$$

На основании последних замечаний, формул (10) и (13) запишем

$$P_1^*(t) = \begin{cases} \tfrac{A-M}{a-1}t + \tfrac{Ma-A}{a-1} & \text{при } A \in [A_0, A_1], \\[2ex] \tfrac{A-M}{a+1}t + \tfrac{Ma+A}{a+1} & \text{при } A \in [-A_1, A_0]. \end{cases} \tag{15}$$

3°. Исследуем максимальное значение целевой функции $P_1^*(b)$ как функцию параметра A. Положим $B(A) = P_1^*(b)$. Согласно (15) имеем

$$B(A) = \begin{cases} \frac{1}{a-1}\left(A(b-1) + M(a-b)\right) & \text{при} \quad A \in [A_0, A_1], \\ \frac{1}{a+1}\left(A(b+1) + M(a-b)\right) & \text{при} \quad A \in [-A_1, A_0]. \end{cases} \tag{16}$$

При этом

$$B'(A) = \begin{cases} \frac{b-1}{a-1} & \text{при} \quad A \in (A_0, A_1), \\ \frac{b+1}{a+1} & \text{при} \quad A \in (-A_1, A_0). \end{cases} \tag{17}$$

Формулы (16), (17) позволяют сделать следующий вывод: функция $B(A)$ непрерывная и кусочно-линейная на отрезке $[-A_1, A_1]$, а также непрерывно дифференцируема на интервалах $(-A_1, A_0)$ и (A_0, A_1); в точке $A = A_0 = M$ производная терпит разрыв, причем величина скачка равна $\frac{2(a-b)}{a^2-1}$; в силу условий $a > 1$, $b < -1$ функция $B(A)$ строго убывает на отрезке $[-A_1, A_1]$.

На рис. 1 изображен график функции $B(A)$ при $a = 2$, $M = \frac{1}{4}$ и $b = \{-\frac{3}{2}, -2, -3\}$.

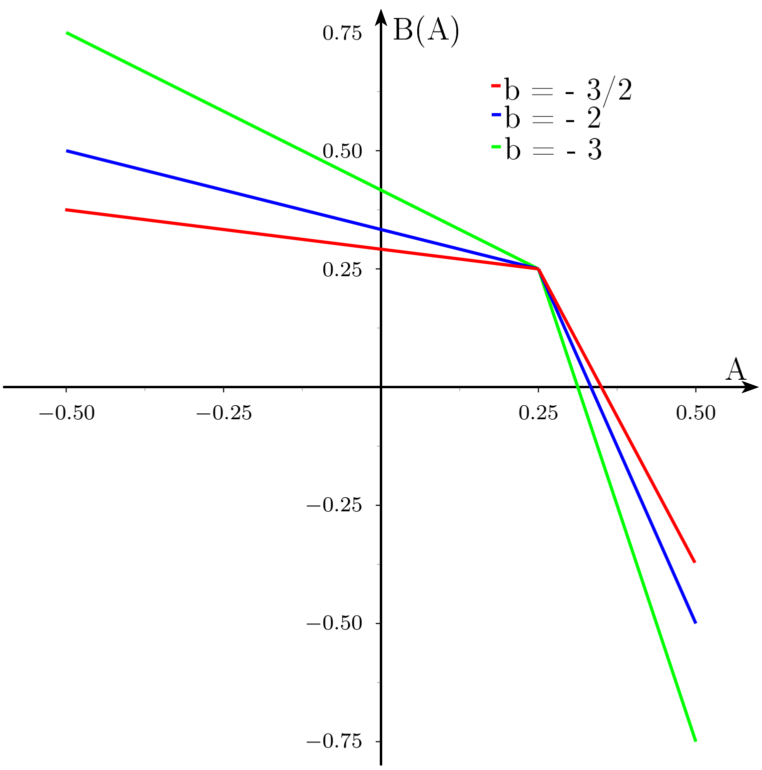
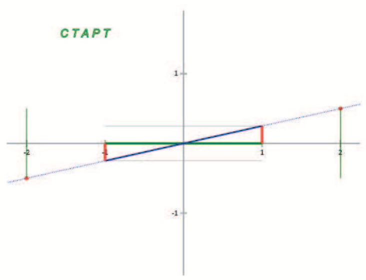


Рис. 1. График функции $B(A)$ при $a = 2$, $M = \frac{1}{4}$, $b = \{-\frac{3}{2}, -2, -3\}$.

Ниже представлен этюд, который в динамическом режиме показывает, как выглядит решение данной задачи при $n = 1$, $a = 2$, $b = -2$, $M = \frac{1}{4}$

и различных A (воспользуйтесь кнопками «СТАРТ», «ПРОДОЛЖИТЬ» и «ПОВТОРИТЬ»).

Полиномиальная фильтровая задача ($n = 1$).



4°. Случай $n = 2$. Искомый полином второй степени $P_2^*(t) = P_2(x^*, t)$ допускает представление

$$P_2^*(t) = \frac{x_0}{2}(t-c)^2 + h. \tag{18}$$

Здесь число c есть абсцисса вершины параболы $P_2^*(t)$.

При $n = 2$ имеем $T_2(t) = 2t^2 - 1$, $A_2 = M(2a^2 - 1)$,

$$\hat{A}_2 = M(\tfrac{(a+1)^2}{2} - 1), \quad \check{A}_2 = M(\tfrac{(a-1)^2}{2} - 1). \tag{19}$$

Согласно утверждениям 2 и 3 полином $P_2^*(t)$ принимает вид

$$P_2^*(t) = \pm M(2t^2 - 1) \quad \text{при } A = \pm A_2; \tag{20}$$

$$P_2^*(t) = -Mt \quad \text{при } A = -A_1 = -Ma. \tag{21}$$

Пусть $A \in (-A_2, A_2)$. По условию полином $P_2^*(t)$ имеет две точки альтернанса. Сперва, выясним, как выглядят коэффициенты x_0 и h в зависимости от c. Рассмотрим три случая.

1) $A \in (\check{A}_2, A_2)$. В этом случае $x_0 > 0$ и $c \in (0, 1)$. Абсцисса вершины параболы находится на интервале $(0, 1)$, поэтому в промежутке от -1 до c полином $P_2^*(t)$ строго убывает, а в промежутке от c до 1 — строго возрастает. Точками альтернанса могут быть только точки $t_1 = -1$ и $t_2 = c$. Альтернансные условия запишем в виде:

$$P_2^*(-1) = M, \tag{22}$$

$$P_2^*(c) = -M. \tag{23}$$

Из формулы (18) и условия (23) следует, что

$$h = -M. \tag{24}$$

Отсюда и из условия (22) находим коэффициент x_0:

$$x_0 = \tfrac{4M}{(c+1)^2}. \tag{25}$$

Получаем

$$P_2^*(t) = M\left[2\left(\tfrac{t-c}{c+1}\right)^2 - 1\right] \quad \text{при } c \in (0,1). \tag{26}$$

Отсюда следует, что при $c \longrightarrow +0$ параметр A стремится к A_2 слева и полином $P_2^*(t)$ принимает вид

$$P_2^*(t) = M(2t^2 - 1),$$

то есть он получается умножением на M полинома Чебышёва второй степени $T_2(t)$.

Если $c \longrightarrow 1 - 0$, то параметр A стремится $\check{A}_2$ справа (см. (19)). Тогда согласно (26) получим

$$P_2^*(t) = M(\tfrac{(t-1)^2}{2} - 1). \tag{27}$$

2) $A \in (-\hat{A}_2, -A_1) \cup (-A_1, \check{A}_2)$. В этом случае параметр c пробегает интервалы $(-\infty, -1)$ и $(1, +\infty)$. Абсцисса вершины параболы $P_2^*(t)$ находится вне промежутка $[-1,1]$, поэтому на отрезке $[-1,1]$ полином $P_2^*(t)$ изменяется строго монотонно. Точками альтернанса могут быть только концы отрезка $[-1,1]$, так что $t_1 = -1$, $t_2 = 1$. Запишем альтернансные условия:

$$P_2^*(-1) = M, \tag{28}$$
$$P_2^*(1) = -M. \tag{29}$$

Вычитая (29) из (28) получаем $2x_0c = 2M$, откуда следует равенство

$$x_0 = \tfrac{M}{c}. \tag{30}$$

Коэффициент h находим из первого альтернансного условия (см. (28)) и (30):

$$h = -M\tfrac{c^2+1}{2c}. \tag{31}$$

Таким образом, при $|c| > 1$ имеем

$$P_2^*(t) = \tfrac{M}{2c}(t^2 - 2tc - 1). \tag{32}$$

Если $c \longrightarrow 1 + 0$, то параметр A стремится к $\check{A}_2$ слева и полином $P_2^*(t)$ совпадает с (27).

Если $c \longrightarrow -1-0$, то параметр A стремится к $-\hat{A}_2$ справа (см. (19)). Отсюда следует, что

$$P_2^*(t) = -M(\tfrac{(t+1)^2}{2} - 1). \tag{33}$$

Отметим, что при $c \longrightarrow \pm\infty$ параметр A стремится к $-A_1$. Согласно утверждению 3, полином $P_2^*(t)$ принимает вид

$$P_2^*(t) = -Mt. \tag{34}$$

3) $A \in (-A_2, -\hat{A}_2)$. В этом случае необходимо $t_1 = c$, $t_2 = 1$, где $c \in (-1, 0)$. Запишем альтернансные условия

$$P_2^*(c) \ = \ M, \tag{35}$$

$$P_2^*(1) \ = \ -M. \tag{36}$$

Из условия (35) следует, что

$$h = M. \tag{37}$$

В силу (37) равенство $P_2^*(1) = -M$ примет вид $\frac{x_0}{2}(c-1)^2 + M = -M$. Отсюда

$$x_0 = -\tfrac{4M}{(c-1)^2}. \tag{38}$$

Получаем

$$P_2^*(t) = -M\left[2\left(\tfrac{t-c}{c-1}\right)^2 - 1\right] \quad \text{при} \ \ c \in (-1, 0). \tag{39}$$

Аналогично случаю 2), нетрудно проверить, что при $c \longrightarrow -1+0$ параметр A стремится к $-\hat{A}_2$ слева и полином $P_2^*(t)$ совпадает с (33).

Если $c \longrightarrow -0$, то параметр A стремится к $-A_2$ справа и полином $P_2^*(t)$ принимает вид

$$P_2^*(t) = -MT_2(t) = -M(2t^2 - 1).$$

Итак, на основании формул (20), (21), (26), (27), (32), (33) и (39) имеем следующее представление полинома $P_2^*(t)$ в зависимости от параметра c:

$$P_2^*(t) = \begin{cases} \frac{M}{2c}(t^2 - 2ct - 1) & \text{при} \ \ |c| \geqslant 1, \\[2ex] -M\left[2\left(\frac{t-c}{c-1}\right)^2 - 1\right] & \text{при} \ \ c \in (-1, 0), \\[2ex] M\left[2\left(\frac{t-c}{c+1}\right)^2 - 1\right] & \text{при} \ \ c \in (0, 1). \end{cases} \tag{40}$$

5°. Положим $B(c) = P_2^*(b)$. Согласно (40) запишем

$$B(c) = \begin{cases} \frac{M}{2c}(b^2 - 2cb - 1) & \text{при} \ \ |c| \geqslant 1, \\[2ex] -M\left[2\left(\frac{b-c}{c-1}\right)^2 - 1\right] & \text{при} \ \ c \in (-1, 0), \\[2ex] M\left[2\left(\frac{b-c}{c+1}\right)^2 - 1\right] & \text{при} \ \ c \in (0, 1). \end{cases} \tag{41}$$

При этом

$$B'(c) = \begin{cases} \frac{M(1-b^2)}{2c^2}, & \text{если} \ \ |c| > 1, \\[2ex] \frac{4M(b-c)(b-1)}{(c-1)^3}, & \text{если} \ \ c \in (-1, 0), \\[2ex] \frac{4M(c-b)(b+1)}{(c+1)^3}, & \text{если} \ \ c \in (0, 1). \end{cases} \tag{42}$$

Формулы (41), (42) позволяют сделать следующие выводы: функция $B(c)$ непрерывна и непрерывно дифференцируема по полуосях $(-\infty, 0]$ и $[0, +\infty)$; в силу условия $b < -1$ функция $B(c)$ строго убывает на полуосях $[0, +\infty)$ и $(-\infty, 0]$ от $M(2b^2 - 1)$ до $-Mb$ и от $-Mb$ до $-M(2b^2 - 1)$ соответственно.

На рис. 2 изображен график функции $B(c)$ при $b = -2$. Слева график функции $B(c)$ при $c \geqslant 0$, справа — при $c \leqslant 0$

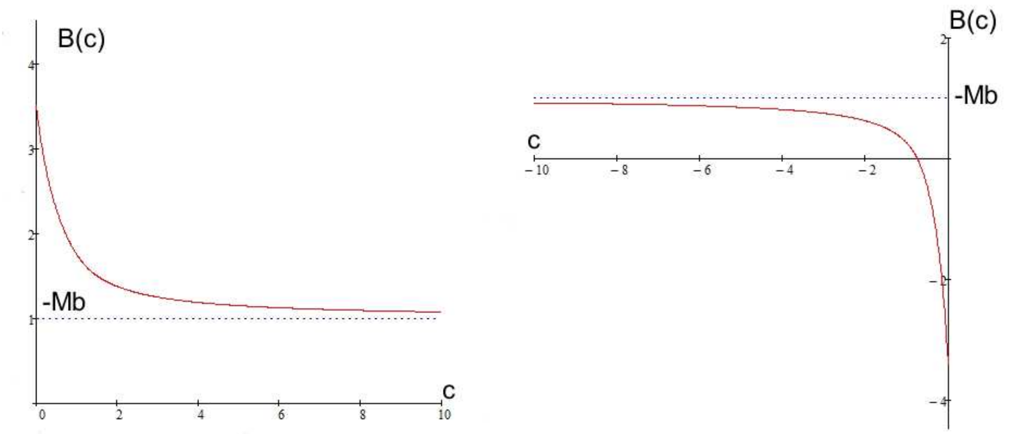


Рис. 2. График функции $B(c)$ при $b = -2$.

6°. Выше были найдены формулы выражающие зависимость коэффициентов x_0 и h искомого полинома $P_2^*(t)$ от c. В этом разделе приведём формулы зависимости c от A и, как следствие, получим зависимость $B(A)$.

При $c \in [0,1]$ полином $P_2^*(t)$ имеет вид (см. (40)):

$$P_2^*(t) = M\left[2\left(\tfrac{t-c}{c+1}\right)^2 - 1\right].$$

Заметим, что при изменении параметра c от 0 до 1 значение полинома $P_2^*(t)$ в точке $t = a$ убывает от A_2 до $\check{A}_2$.

Рассмотрим уравнение (относительно c)

$$P_2^*(a) = A. \tag{43}$$

Данное уравнение (при $c \in [0,1]$) можно переписать в виде:

$$(a-c)^2 = \frac{A+M}{2M}(c+1)^2.$$

Отсюда несложно получить явные выражения для нулей функции. В силу того, что $c \in [0,1]$, $A \in [\check{A}_2, A_2]$ и $M > 0$ имеется единственный корень:

$$c(A) = \frac{a - \sqrt{\frac{A+M}{2M}}}{1 + \sqrt{\frac{A+M}{2M}}}. \tag{44}$$

Аналогично находим решение уравнения (43) и при $c \in [-1,0]$. Здесь значение полинома $P_2^*(t)$ в точке $t = a$ убывает от $-\hat{A}_2$ до $-A_2$. Имеем

$$c(A) = \frac{a - \sqrt{\frac{M-A}{2M}}}{1 - \sqrt{\frac{M-A}{2M}}}. \tag{45}$$

Теперь рассмотрим случай, когда параметр c изменятся от 1 до $+\infty$ и от $-\infty$ до -1. В этом случае

$$P_2^*(t) = \tfrac{M}{2c}(t^2 - 2tc - 1).$$

Уравнения (43) при $A \in [-\hat{A}_2, \check{A}_2]$ имеет единственное решение:

$$c(A) = \frac{M(a^2-1)}{2(A+Ma)}. \tag{46}$$

Отсюда, следует, что при $A \longrightarrow -A_1 + 0$ параметр c стремится к $+\infty$, а при $A \longrightarrow -A_1 - 0$ параметр c стремится к $-\infty$ (см. (34)). Напомним, что $-A_1 = -Ma \in [-\hat{A}_2, \check{A}_2]$.

Согласно (44)–(46) получаем

$$c(A) = \begin{cases} \frac{a-\sqrt{\frac{A+M}{2M}}}{1+\sqrt{\frac{A+M}{2M}}} & \text{при } A \in [\check{A}_2, A_2], \\ \frac{M(a^2-1)}{2(A+Ma)} & \text{при } A \in [-\hat{A}_2, -A_1) \cup (-A_1, \check{A}_2], \\ \frac{a-\sqrt{\frac{M-A}{2M}}}{1-\sqrt{\frac{M-A}{2M}}} & \text{при } A \in [-A_2, -\hat{A}_2]. \end{cases} \tag{47}$$

При этом

$$c'(A) = \begin{cases} -\frac{a+1}{4M\left(1+\sqrt{\frac{A+M}{2M}}\right)^2\sqrt{\frac{A+M}{2M}}} & \text{при } A \in (\check{A}_2, A_2), \\ -\frac{M(a^2-1)}{2(A+Ma)^2} & \text{при } A \in (-\hat{A}_2, -A_1) \cup (-A_1, \check{A}_2), \\ -\frac{a-1}{4M\left(1+\sqrt{\frac{M-A}{2M}}\right)^2\sqrt{\frac{M-A}{2M}}} & \text{при } A \in (-A_2, -\hat{A}_2). \end{cases} \tag{48}$$

Суперпозиция функций $B(c)$ (см. (41)) и $c(A)$ (см. (47)) даёт функцию $B(A) = B(c(A))$. Используя производные функций $B'(c)$ (см. (42)) и $c'(A)$ (см. (48)) получим $B'(A) = B'(c(A))c'(A)$.

На рисунках 3 и 4 изображены графики функций $B(A)$ и $B'(A)$ при $a = \frac{3}{2}$, $M = \frac{1}{2}$ и $b = \{-\frac{3}{2}, -2, -3\}$.

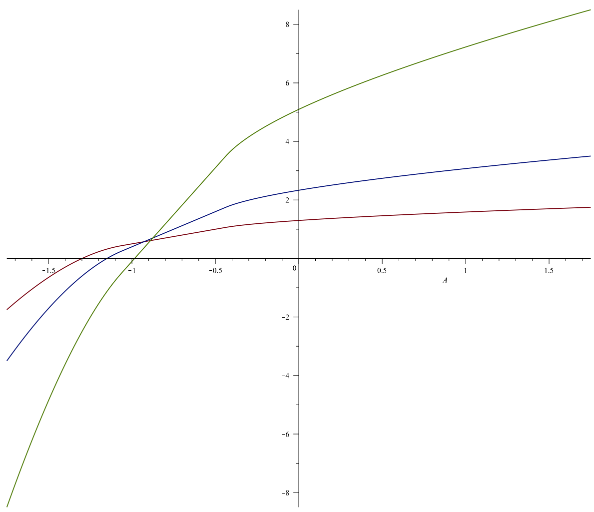


Рис. 3. График функции $B(A)$ при $a = \frac{3}{2}$, $M = \frac{1}{2}$, $b = \{-\frac{3}{2}, -2, -3\}$.

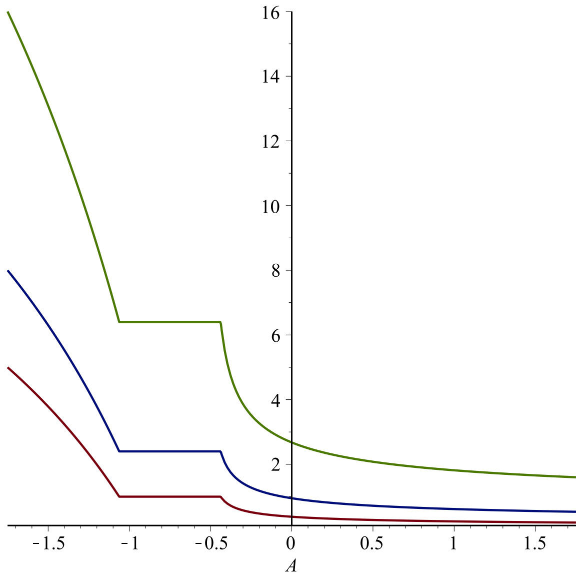
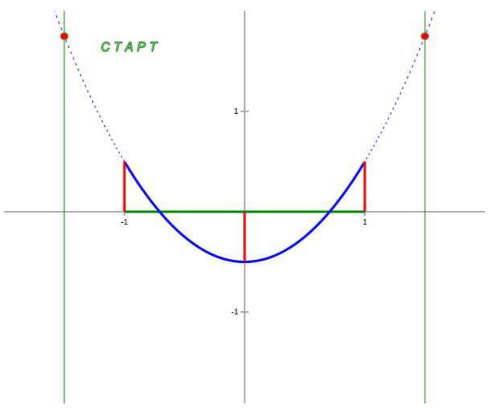


Рис. 4. График функции $B'(A)$ при $a = \frac{3}{2}$, $M = \frac{1}{2}$, $b = \{-\frac{3}{2}, -2, -3\}$.

Ниже представлен этюд, который в динамическом режиме показывает, как выглядит решение данной задачи при $n = 2$, $a = \frac{3}{2}$, $b = -\frac{3}{2}$, $M = \frac{1}{2}$ и различных A (воспользуйтесь кнопками «СТАРТ», «ПРОДОЛЖИТЬ» и «ПОВТОРИТЬ»).

Полиномиальная фильтровая задача ($n = 2$).



ЛИТЕРАТУРА

1. Агафонова И. В., Малозёмов В. Н. *Об одной экстремальной задаче, связанной с полиномами Золотарёва* // Семинар «CNSA & NDO». Избранные доклады. 13 ноября 2014 г. (`http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/reps14.shtml#1113`)

2. Золотарёв Е. И. *Приложение эллиптических функций к вопросам о функциях, наименее и наиболее отклоняющихся от нуля* / В кн.: Полное собрание сочинений. Вып. 2. Л.: Изд-во АН СССР, 1932. С. 27–29.