ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ В ЗАДАЧЕ ПОСТРОЕНИЯ ПРОГРАММНОГО УПРАВЛЕНИЯ*

А. В. Фоминых

alexfomster@mail.ru

9 октября 2014 г.

Аннотация. В докладе исследуется задача построения программного управления и соответствующего ему программного движения. Эта задача сводится к вариационной задаче минимизации некоторого негладкого функционала на всём пространстве. Для данного функционала выписаны субдифференциал и гиподифференциал, найдены необходимые условия минимума, которые в случае линейности исходной системы по фазовым переменным и управлению оказываются и достаточными. На основании этих условий описываются метод наискорейшего спуска и метод гиподифференциального спуска.

1°. Постановка задачи. Пусть задана система обыкновенных дифференциальных уравнений в нормальной форме

$$\dot{x} = f(x, u, t) \tag{1}$$

с начальным условием

$$x(0) = x_0 \tag{2}$$

и конечным условием

$$x(T) = x_T. \tag{3}$$

Считаем систему (1) управляемой [1] из начального положения (2) в конечное состояние (3). Здесь $T > 0$ — заданный момент времени, $f(x, u, t)$ — вещественная n-мерная вектор-функция, $x(t)$ — n-мерная вектор-функция фазовых координат, которую будем считать непрерывно дифференцируемой на промежутке времени $[0, T]$. Предполагаем $f(x, u, t)$ непрерывной по всем трём аргументам и непрерывно дифференцируемой по x и u.

*Семинар по конструктивному негладкому анализу и недифференцируемой оптимизации «CNSA & NDO»: `http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/`

Пусть m-мерное управление u принадлежит следующему множеству допустимых управлений

$$U = \big\{u \in P_m[0,T] \;\big|\; \int_0^T \big(u(t), u(t)\big)dt \leqslant C\big\}, \tag{4}$$

где $P_m[0,T]$ — пространство m-мерных вектор-функций, кусочно непрерывных на промежутке $[0,T]$, C — заданная константа, $\int_0^T (v_1, v_2)dt$ — скалярное произведение вектор-функций v_1, v_2.

Требуется найти такое управление, которое принадлежит множеству допустимых управлений (4) и переводит систему (1) из начального положения (2) в конечное состояние (3) за время T.

2°. Сведение к вариационной задаче. Положим $z(t) = \dot{x}(t)$, здесь $z \in C_n[0,T]$. Тогда с учётом (2) имеем $x(t) = x_0 + \int_0^t z(\tau)d\tau$.

Введём в рассмотрение функционал

$$I(z,u) = \frac{1}{2}\int_0^T \big(\varphi(z,u,t), \varphi(z,u,t)\big)dt +$$
$$+ \max\big\{0, \int_0^T \big(u(t), u(t)\big)dt - C\big\} + \sum_{i=1}^n \psi_i(z), \tag{5}$$

где

$$\varphi(z,u,t) = z(t) - f\big(x_0 + \int_0^t z(\tau)d\tau, u, t\big),$$

$$\psi_i(z) = |\overline{\psi}_i(z)|, \quad \overline{\psi}_i(z) = x_{0i} + \int_0^T z_i(t)dt - x_{Ti}, \quad i = \overline{1,n},$$

а x_{0i} — i-я компонента вектора x_0, x_{Ti} — i-я компонента вектора x_T, $i = \overline{1,n}$.

Нетрудно видеть, что функционал (5) неотрицателен для всех $z \in C_n[0,T]$ и для всех $u \in P_m[0,T]$, и обращается в ноль в точке $[z^*, u^*] \in C_n[0,T] \times P_m[0,T]$ тогда и только тогда, когда $x^*(t) = x_0 + \int_0^t z^*(\tau)d\tau$ — программное движение, соответствующее искомому программному управлению $u^*(t)$.

3°. Необходимые условия минимума функционала I. Введём множество

$$\Omega = \big\{z \in C_n[0,T] \;\big|\; x_0 + \int_0^T z(t)dt = x_T\big\}.$$

Ниже нам также потребуются индексные множества

$$I_0 = \{i = \overline{1,n} \mid \overline{\psi}_i(z) = 0\},$$

$$I_- = \{i = \overline{1,n} \mid \overline{\psi}_i(z) < 0\},$$
$$I_+ = \{i = \overline{1,n} \mid \overline{\psi}_i(z) > 0\}$$

и следующие множества управлений

$$U_0 = \Big\{u \in P_m[0,T] \;\Big|\; \int_0^T \big(u(t), u(t)\big)dt - C = 0\Big\},$$

$$U_- = \Big\{u \in P_m[0,T] \;\Big|\; \int_0^T \big(u(t), u(t)\big)dt - C < 0\Big\},$$

$$U_+ = \Big\{u \in P_m[0,T] \;\Big|\; \int_0^T \big(u(t), u(t)\big)dt - C > 0\Big\}.$$

Пусть «$'$» означает транспонирование, а e_i, $i = \overline{1,n}$, — канонический базис в $\mathbb{R}^n$. Используя ту же технику, что и в [2], нетрудно убедиться в справедливости следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 1. *Функционал $I(z,u)$ субдифференцируем, и его субдифференциал в точке $[z,u]$ выражается по формуле*

$$\partial I(z,u) =$$
$$= \Big\{ \Big[z(t) - f(z,u,t) - \int_t^T \Big(\frac{\partial f(z,u,\tau)}{\partial x}\Big)' \big(z(\tau) - f(z,u,\tau)\big)d\tau + \mathrm{co}\Big\{\sum_{i \in I_0} \omega_i e_i\Big\} +$$
$$+ \sum_{j=1}^n \mu_j e_j, -\Big(\frac{\partial f(z,u,t)}{\partial u}\Big)' \big(z(t) - f(z,u,t)\big) + 2\nu u \Big] \;\Big|\; \omega_i \in [-1,1],\ i \in I_0,$$
$$\mu_j = 0,\ j \in I_0,\ \mu_j = 1,\ j \in I_+,\ \mu_j = -1,\ j \in I_-,$$
$$\nu \in [0,1],\ u \in U_0,\ \nu = 1,\ u \in U_+,\ \nu = 0,\ u \in U_- \Big\}.$$

СЛЕДСТВИЕ. *Если $z \in \Omega$, $u \in U$, то субдифференциал функционала $I(z,u)$ выражается по формуле*

$$\partial I(z,u) =$$
$$= \Big\{ \Big[z(t) - f(z,u,t) - \int_t^T \Big(\frac{\partial f(z,u,\tau)}{\partial x}\Big)' \big(z(\tau) - f(z,u,\tau)\big)d\tau + \mathrm{co}\Big\{\sum_{i=1}^n \omega_i e_i\Big\},$$
$$-\Big(\frac{\partial f(z,u,t)}{\partial u}\Big)' \big(z(t) - f(z,u,t)\big) + 2\nu u \Big] \;\Big|\; \omega_i \in [-1,1],\ i = \overline{1,n},$$
$$\nu \in [0,1],\ u \in U_0,\ \nu = 0,\ u \in U_- \Big\}. \quad (6)$$

Известно, что необходимым, а в случае выпуклости и достаточным условием минимума функционала (5) в точке $[z^*, u^*]$ в терминах субдифференциала является условие

$$0_{n+m} \in \partial I(z^*, u^*),$$

где 0_{n+m} — нулевой элемента пространства $C_n[0, T] \times P_m[0, T]$.

ЛЕММА. *Если система (1) линейна по фазовым переменным x и по управлению u, то функционал $I(z, u)$ является выпуклым.*

Из условия минимума и леммы заключаем, что справедлива

ТЕОРЕМА 2. *Для того, чтобы управление $u^* \in U$ переводило систему (1) из начального положения (2) в конечное состояние (3) за время T, необходимо, а в случае линейности системы (1) и достаточно, чтобы*

$$0_{n+m} \in \partial I(z^*, u^*), \tag{7}$$

где выражение для субдифференциала $\partial I(z, u)$ берётся из формулы (6).

4°. **Метод наискорейшего спуска.** Найдём минимальный по норме субградиент $h = h(t, z, u) \in \partial I(z, u)$ в точке $[z, u]$, то есть решим задачу

$$\min_{h \in \partial I(z,u)} ||h||^2 = \min_{\nu,\ \omega_i,\ i \in I_0} \Big[\int_0^T \Big(s_1(t) + \sum_{i \in I_0} \omega_i e_i\Big)^2 dt + \int_0^T \Big(s_2(t) + 2\nu u\Big)^2 dt \Big], \tag{8}$$

где

$$s_1(t) = \overline{s}_1(t) + \sum_{j=1}^{n} \mu_j e_j,$$

$$\overline{s}_1(t) = z(t) - f(z, u, t) - \int_t^T \Big(\frac{\partial f(z, u, \tau)}{\partial x}\Big)' \big(z(\tau) - f(z, u, \tau)\big) d\tau,$$

$$s_2(t) = -\Big(\frac{\partial f(z, u, t)}{\partial u}\Big)' \big(z(t) - f(z, u, t)\big),$$

а величины ω_i, $i \in I_0$, μ_j, $j = \overline{1, n}$, ν определены в теореме 1.

Задача (8) представляет собой задачу квадратичного программирования при наличии линейных ограничений и может быть решена одним из известных методов [3]. Обозначим ω_i^*, $i \in I_0$, ν^* её решение. Тогда вектор-функция

$$G(t, z, u) := h^* = \Big[s_1(t) + \sum_{i \in I_0} \omega_i^* e_i, s_2(t) + 2\nu^* u\Big]$$

является наименьшим по норме субградиентом функционала I в точке $[z, u]$. Если $||G|| > 0$, то вектор-функция $-\frac{G(t,z,u)}{||G||}$ является направлением наискорейшего спуска функционала I в точке $[z, u]$.

Опишем следующий метод наискорейшего спуска для поиска стационарных точек функционала $I(z,u)$. Фиксируем произвольную точку $[z_1,u_1]\in$ $\in C_n[0,T]\times P_m[0,T]$. Пусть уже построена точка $[z_k,u_k]\in C_n[0,T]\times P_m[0,T]$. Если выполнено необходимое условие минимума (7), то точка $[z_k,u_k]$ является стационарной точкой функционала $I(z,u)$, и процесс прекращается. В противном случае положим

$$[z_{k+1},u_{k+1}]=[z_k,u_k]-\alpha_k G_k,$$

где вектор-функция $G_k=G(t,z_k,u_k)$ представляет собой наименьший по норме субградиент функционала I в точке $[z_k,u_k]$, а величина α_k является решением следующей задачи одномерной минимизации

$$\min_{\alpha\geqslant 0} I([z_k,u_k]-\alpha G_k)=I([z_k,u_k]-\alpha_k G_k).$$

Тогда $I(z_{k+1},u_{k+1})\leqslant I(z_k,u_k)$. Если последовательность $\{[z_k,u_k]\}$ конечна, то последняя её точка является стационарной точкой функционала $I(z,u)$ по построению. Если же последовательность $\{[z_k,u_k]\}$ бесконечна, то описанный процесс может и не привести к стационарной точке функционала $I(z,u)$, поскольку субдифференциальное отображение $\partial I(z,u)$ не является непрерывным в метрике Хаусдорфа.

5°. Метод гиподифференциального спуска. Найдём гиподифференциал функционала $I(z,u)$. Для гиподифференциала функционалов $\psi_i(z)$, $i=\overline{1,n}$, имеем следующее выражение [4]

$$d\psi_i(z)=\operatorname{co}\big\{\big[\,\overline{\psi}_i(z)-\psi_i(z),e_i\big],\big[-\overline{\psi}_i(z)-\psi_i(z),-e_i\big]\big\}.$$

Пусть

$$I_2(u)=\max\big\{0,\int_0^T\big(u(t),u(t)\big)dt-C\big\}.$$

Для гиподифференциала функционала $I_2(u)$ имеем выражение

$$dI_2(u)=\operatorname{co}\big\{\big[\int_0^T\big(u(t),u(t)\big)dt-C-I_2(u),2u\big],\big[-I_2(u),0_m\big]\big\}.$$

Тогда гиподифференциал функционала $I(z,u)$ выражается по формуле

$$\begin{gathered}dI(z,u)=\big[0,\overline{s}_1(t),s_2(t)\big]+\\ +\sum_{i=1}^n\operatorname{co}\big\{\big[\,\overline{\psi}_i(z)-\psi_i(z),e_i,0_m\big],\big[-\overline{\psi}_i(z)-\psi_i(z),-e_i,0_m\big]\big\}+\\ +\operatorname{co}\big\{\big[\int_0^T\big(u(t),u(t)\big)dt-C-I_2(u),0_n,2u\big],\big[-I_2(u),0_n,0_m\big]\big\}.\end{gathered}\tag{9}$$

Известно, что необходимым, а в случае выпуклости и достаточным условием минимума функционала (5) в точке $[z^*, u^*]$ в терминах гиподифференциала является условие [4]

$$0_{n+m+1} \in dI(z^*, u^*).$$

Отсюда и из леммы заключаем, что справедлива

ТЕОРЕМА 3. *Для того, чтобы управление $u^* \in U$ переводило систему (1) из начального положения (2) в конечное состояние (3) за время T, необходимо, а в случае линейности системы (1) и достаточно, чтобы*

$$0_{n+m+1} \in dI(z^*, u^*), \tag{10}$$

где выражение для гиподифференциала $dI(z, u)$ берётся из формулы (9).

Найдём минимальный по норме гипоградиент $g(t, z, u) \in dI(z, u)$ в точке $[z, u]$, то есть решим задачу

$$\min_{g \in dI(z,u)} ||g||^2 = \min_{\beta_i \in [0,1],\ i=\overline{1,n+1}} \Bigg\| \big[0, \overline{s}_1(t), s_2(t)\big] +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} \big\{ \beta_i \big[\, \overline{\psi}_i(z) - \psi_i(z), e_i, 0_m \big] + (1 - \beta_i) \big[-\overline{\psi}_i(z) - \psi_i(z), -e_i, 0_m \big] \big\} +$$
$$+ \beta_{n+1} \Big[\int_0^T \big(u(t), u(t)\big) dt - C - I_2(u), 0_n, 2u \Big] + (1 - \beta_{n+1}) \big[-I_2(u), 0_n, 0_m \big] \Bigg\|^2 . \tag{11}$$

Задача (11) представляет собой задачу квадратичного программирования при наличии линейных ограничений. Обозначим β_i^*, $i = \overline{1, n+1}$, её решение. Пусть $g = [g_1, g_2]$, где вектор-функция g_2 состоит из последних $n+m$ компонент вектор-функции g. Тогда

$$G(t, z, u) := g_2^* = \big[\overline{s}_1(t), s_2(t)\big] + \sum_{i=1}^{n} \big\{ \beta_i^* \big[e_i, 0_m\big] + (1 - \beta_i^*) \big[-e_i, 0_m \big] \big\} +$$
$$+ \beta_{n+1}^* \big[0_n, 2u\big] + (1 - \beta_{n+1}^*) \big[0_n, 0_m\big]$$

является вектор-функцией, состоящей из последних $n+m$ компонент наименьшего по норме гипоградиента функционала I в точке $[z, u]$. Если $||G|| > 0$, то вектор-функция $-\frac{G(t,z,u)}{||G||}$ является направлением гипоградиентного спуска функционала I в точке $[z, u]$.

Опишем следующий метод гиподифференциального спуска для поиска стационарных точек функционала $I(z, u)$.

Фиксируем произвольную точку $[z_1, u_1] \in C_n[0,T] \times P_m[0,T]$. Пусть уже построена точка $[z_k, u_k] \in C_n[0,T]\times \times P_m[0,T]$. Если выполнено необходимое условие минимума (7) или (10), то точка $[z_k, u_k]$ является стационарной точкой функционала $I(z, u)$, и процесс прекращается. В противном случае положим

$$[z_{k+1}, u_{k+1}] = [z_k, u_k] - \alpha_k G_k,$$

где вектор-функция $G_k = G(t, z_k, u_k)$ представляет собой вектор-функцию, состоящую из последних $n+m$ компонент наименьшего по норме гипоградиента функционала I в точке $[z_k, u_k]$, а величина α_k является решением следующей задачи одномерной минимизации

$$\min_{\alpha \geqslant 0} I([z_k, u_k] - \alpha G_k) = I([z_k, u_k] - \alpha_k G_k).$$

Тогда $I(z_{k+1}, u_{k+1}) \leqslant I(z_k, u_k)$. Если последовательность $\{[z_k, u_k]\}$ конечна, то последняя её точка является стационарной точкой функционала $I(z, u)$ по построению. Если последовательность $\{[z_k, u_k]\}$ бесконечна, то можно показать [5], что метод гиподифференциального спуска сходится в следующем смысле

$$||g(z_k, u_k)|| \to 0 \text{ при } k \to \infty.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Зубов В. И. Лекции по теории управления. М.: Наука, 1975. 495 с.

2. Тамасян Г. Ш. *Численные методы в задачах вариационного исчисления для функционалов, зависящих от производных высшего порядка* // Проблемы математического анализа. 2012. Вып. 67. С. 113–132.

3. Даугавет В. А. Численные методы квадратичного программирования. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2004. 128 с.

4. Демьянов В. Ф., Рубинов А. М. Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. М.: Наука, 1990. 432 с.

5. Демьянов В. Ф. Условия экстремума и вариационное исчисление. М.: Высш. шк., 2005. 335 с.