ОБОБЩЁННЫЕ ЯКОБИАНЫ И ЛЕКСИКОГРАФИЧЕСКИЕ СУБДИФФЕРЕНЦИАЛЫ НЕГЛАДКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ*

М. В. Долгополик

maxim.dolgopolik@gmail.com

20 февраля 2014 г.

Аннотация. В докладе приводится обзор некоторых результатов по теории субдифференциала Кларка и обобщённого якобиана из [1]. Также обсуждаются более современные результаты в данной области, касающиеся полных якобианов и лексикографических субдифференциалов [2, 3].

1°.Субдифференциал Кларка. Пусть $\|\cdot\|$ — произвольная норма в $\mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество и $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ — произвольная функция.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть f удовлетворяет условию Липшица в некоторой окрестности точки $x \in \Omega$, а $v \in \mathbb{R}$ — произвольный вектор. *Производной Кларка* функции f по направлению v в точке x называется величина

$$f^{\uparrow}_{Cl}(x, v) = \limsup_{y \to x, t \downarrow 0} \frac{f(y + tv) - f(y)}{t}.$$

Здесь и далее $t \downarrow 0$ обозначает $t \in \mathbb{R}$, $t \to +0$.

Производная Кларка $f^{\uparrow}_{Cl}$ обладает следующими свойствами (см. [1]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Пусть f — липшицевая функция в некоторой окрестности точки $x \in \Omega$ с постоянной L. Тогда функция $v \to f^{\uparrow}_{Cl}(x, v)$ конечна, сублинейна на $\mathbb{R}^n$ и удовлетворяет неравенству*

$$|f^{\uparrow}_{Cl}(x, v)| \leqslant L\|v\| \quad \forall v \in \mathbb{R}^n.$$

Поскольку производная Кларка $f^{\uparrow}_{Cl}(x, v)$ сублинейна по v, то существует непустое выпуклое и компактное множество $\partial_{Cl} f(x)$, называемое *субдифференциалом Кларка* функции f в точке x, такое, что

$$f^{\uparrow}_{Cl}(x, v) = \max_{\zeta \in \partial_{Cl} f(x)} \langle \zeta, v \rangle \quad \forall v \in \mathbb{R}^n.$$

*Семинар по конструктивному негладкому анализу и недифференцируемой оптимизации «CNSA & NDO»: `http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/`

Элементы $\zeta \in \partial_{Cl} f(x)$ называются *обобщёнными градиентами* функции f в точке x. Можно показать, что многозначное отображение $x \to \partial_{Cl} f(x)$ полунепрерывно сверху.

По теореме Радемахера ([4], теорема 3.1.6) локально липшицевая функция f, определённая на открытом множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, дифференцируема почти всюду на Ω. Обозначим через Ω_f множество точек $x \in \Omega$ в которых функция f дифференцируема. Следующий результат позволяет упростить вычисление субдифференциала Кларка в некоторых случаях.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть f удовлетворяет условию Липшица в некоторой окрестности точки $x \in \Omega$ и $S \subset \mathbb{R}^n$ — произвольное множество меры ноль. Тогда*

$$\partial_{Cl} f(x) = \operatorname{co}\big\{ \lim_{n\to\infty} \nabla f(x_n) \mid x_n \to x, x_n \in \Omega_f \setminus S\big\}.$$

Здесь $\nabla f(y)$ — градиент функции f в точке y.

2°.Условия экстремума в терминах субдифференциала Кларка. С помощью субдифференциала Кларка возможно исследовать различные экстремальные задачи.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Пусть f удовлетворяет условию Липшица в некоторой окрестности точки $x \in \Omega$, являющейся точкой экстремума функции f. Тогда $0 \in \partial_{Cl} f(x)$.*

Субдифференциал Кларка также позволяет получать необходимые условия экстремума в задачах математического программирования. Рассмотрим следующую задачу:

$$f(x) \to \inf, \quad g_i(x) \leqslant 0, \quad i \in I, \quad h_j(x) = 0, \quad j \in J, \tag{1}$$

где функции $f, g_i, h_j \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ локально липшицевы, $I = \{1, \ldots, l\}$ и $J = \{1, \ldots, m\}$. Введём функцию Лагранжа

$$L(x, \lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_l, \mu_1, \ldots, \mu_m) = \lambda_0 f(x) + \sum_{i=1}^{l} \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j h_j(x),$$

где $\lambda_i \geqslant 0$, $i \in \{0\} \cup I$ и $\mu_j \in \mathbb{R}$, $j \in J$.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть точка $x^* \in \mathbb{R}$ является решением задачи (1). Тогда существуют $\lambda_i \geqslant 0$ и $\mu_j \in \mathbb{R}$, $i \in \{0\} \cup I$, $j \in J$ такие, что*

$$\sum_{i=0}^{l} \lambda_i + \sum_{j=1}^{m} |\mu_j| \neq 0, \quad \lambda_i g_i(x) = 0 \quad \forall i \in I$$

и выполнено включение

$$0 \in \partial_{Cl,x} L(x^*, \lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_l, \mu_1, \ldots, \mu_m). \tag{2}$$

Здесь $\partial_{Cl,x} L$, субдифференциал Кларка отображения $L(\cdot, \lambda_0, \ldots, \lambda_l, \mu_1, \ldots, \mu_m)$.

З а м е ч а н и е 2.1. Из включения (2) следует, что

$$0 \in \lambda_0 \partial_{Cl} f(x^*) + \sum_{i=1}^{l} \lambda_i \partial_{Cl} g_i(x^*) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j \partial_{Cl} h_j(x^*). \tag{3}$$

Отметим также, что в общем случае условия (2) и (3) не эквивалентны.

Однако, зачастую субдифференциал Кларка оказывается слишком велик для того, чтобы отличать точки локального экстремума [5].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Пусть $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — чётная функция, удовлетворяющая условию Липшица в некоторой окрестности нуля. Тогда $0 \in \partial_{Cl} f(0)$.*

ПРИМЕР 1. Пусть $n = 2$ и

$$f_1(x) = |x_1| + |x_2|, \quad f_2(x) = -|x_1| - |x_2|, \quad f_3(x) = |x_1| - |x_2|.$$

Нетрудно проверить, что $0 \in \partial_{Cl} f_1(0) = \partial_{Cl} f_2(0) = \partial_{Cl} f_3(0) = D$, где

$$D = \mathrm{co}\{(1,1), (1,-1), (-1,1), (-1,-1)\}.$$

При этом 0 является точкой строго глобального минимума функции f_1, точкой строго глобального максимума функции f_2 и не является ни точкой локального минимума, ни точкой локального максимума функции f_3.

3°.Обобщённые якобианы негладких отображений. На основании теоремы 1 можно обобщить понятие субдифференциала на случай вектор–функций. Пусть вектор–функция $F = (f_1, \ldots, f_m)$, отображающая множество $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$ удовлетворяет условию Липшица в некоторой окрестности точки $x \in \Omega$. Обозначим через Ω_F множество точек $x \in \Omega$, в которых вектор–функция F дифференцируема.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Обобщённым якобианом* вектор–функции F в точке x называется множество

$$\partial F(x) = \mathrm{co}\,\big\{ \lim_{n\to\infty} JF(x_n) \mid x_n \to x, x_n \in \Omega_F \big\}.$$

Здесь $JF(y)$ — матрица Якоби вектор–функции F в точке y.

Обобщённый якобиан обладает свойствами, аналогичными свойствам субдифференциала Кларка.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Пусть F удовлетворяет условию Липшица в некоторой окрестности точки $x \in \Omega$. Тогда:*

1) $\partial F(x)$ — непустое выпуклое компактное множество в $\mathbb{R}^{m\times n}$;

2) многозначное отображение $x \to \partial F(x)$ полунепрерывно сверху;

3) $\partial F(x) \subset \partial_{Cl} f_1(x) \times \ldots \times \partial_{Cl} f_m(x)$.

С помощью понятия обобщённого якобиана можно установить различные теоремы, обобщающие соответствующие результаты классического дифференциального исчисления.

ТЕОРЕМА 3 (теорема об обратной функции)**.** *Пусть вектор–функция $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию Липшица в некоторой окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и предположим, что любая матрица $M \in \partial F(x_0)$ невырождена. Тогда существуют окрестности U и V точек x_0 и $F(x_0)$ соответственно и липшицевая функция $G\colon V \to \mathbb{R}^n$ такие, что:*

1) $G(F(u)) = u$ для всех $u \in U$,

2) $F(G(v)) = v$ для всех $v \in V$.

ПРИМЕР 2. Пусть $n = 2$ и $F(x, y) = (|x| + y, 2x + |y|)$. Очевидно, что обобщённый якобиан в точке $(0, 0)$ имеет вид

$$\partial F(0,0) = \left\{ \begin{pmatrix} s & 1 \\ 2 & t \end{pmatrix} \;\middle|\; s, t \in [-1, 1] \right\}. \tag{4}$$

Откуда ясно, что для любого $M \in \partial F(0, 0)$ будет $\det M = st - 2 < 0$, т.е. в точке $(0, 0)$ выполнены условия теоремы 3. Поэтому существует отображение $G = (g_1, g_2)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ обратное к отображению F. Найдём его явный вид.

Положим $U = V = \mathbb{R}^2$. Отображение G удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{cases} |g_1(x,y)| + g_2(x,y) = x \\ 2g_1(x,y) + |g_2(x,y)| = y \end{cases} \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Разрешая эту систему, нетрудно получить, что

$$G(x,y) = \begin{cases} (x+y, 2x+y), \text{ если } y \leqslant \min\{-x, -2x\}, \\ \frac{1}{3}(x+y, 2x-y), \text{ если } y \geqslant \max\{2x, -x\}, \\ \frac{1}{3}(y-x, 2x+y), \text{ если } -2x \leqslant y \leqslant x, \\ (y-x, 2x-y), \text{ если } x \leqslant y \leqslant 2x,\ x \geqslant 0. \end{cases}$$

Пусть задано отображение $F\colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$, и предположим, что F удовлетворяет условию Липшица в некоторой окрестности точки $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$. Обозначим через $\pi\colon \mathbb{R}^{k\times(k+m)} \to \mathbb{R}^{k\times k}$ отображение, сопоставляющее каждой матрице $M \in \mathbb{R}^{k\times(k+m)}$ матрицу πM, состоящую из последних k столбцов матрицы M.

ТЕОРЕМА 4 (теорема о неявной функции)**.** *Пусть каждая матрица $M \in \pi\partial F(x_0, y_0)$ невырождена. Тогда существуют окрестность U точки x_0 и липшицевая функция $u\colon U \to \mathbb{R}^k$ такая, что $u(x_0) = y_0$ и*

$$F(x, u(x)) = 0 \quad \forall x \in U.$$

4°.Полные якобианы. Напомним, что множество $A \subset \mathbb{R}^{m\times n}$ называется *полным* (англ. plenary), если для любой матрицы $M \in \mathbb{R}^{m\times n}$ такой, что $Mx \in \{Hx \mid H \in A\}$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$ будет $M \in A$. Нетрудно заметить, что пересечение полных множеств полно. Поэтому для любого множества $A \subset \mathbb{R}^{m\times n}$ существует наименьшее полное множество, содержащее множество A, которое называется *полной оболочкой* (англ. plenary hull) данного множества и обозначается $\operatorname{plen} A$.

Полным якобианом локально липшицевого отображения $F\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ в точке $x \in \Omega$ называется множество $\partial_P F(x) = \operatorname{plen} \partial F(x)$. Полный якобиан имеет следующие свойства.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Пусть вектор–функция $F = (f_1, \ldots, f_m)\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ удовлетворяет условию Липшица в некоторой окрестности точки $x \in \Omega$. Тогда:*

1) *$\partial_P F(x)$ — непустое выпуклое компактное множество;*

2) *$\partial F(x) \subset \partial_P F(x) \subset \partial_{Cl} f_1(x) \times \ldots \times \partial_{Cl} f_m(x)$, причём оба включения могут быть строгими;*

3) *если $\min\{m, n\} = 1$, то $\partial F(x) = \partial_P F(x)$;*

4) *справедливо равенство*

$$\{Mx \mid M \in \partial_P F(x)\} = \{Mx \mid M \in \partial F(x)\} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Пусть вектор–функция $F = (f_1, \ldots, f_n)\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию Липшица в некоторой окрестности точки $x \in \Omega$ и множество $\partial F(x)$ не содержит вырожденных матриц. Тогда множество $\partial_P F(x)$ также не содержит вырожденных матриц и справедливо равенство*

$$\{M^{-1}x \mid M \in \partial_P F(x)\} = \{M^{-1}x \mid M \in \partial F(x)\} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

5°. Лексикографический субдифференциал. Пусть функция F, отображающая множество $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$, удовлетворяет условию Липшица в некоторой окрестности точки $x \in \Omega$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. [3] Функция F называетсяы лексикографически гладкой в точке x, если для любого $p \in \mathbb{N}$ и любой матрицы $M = (m_1, \ldots, m_p) \in \mathbb{R}^{n \times p}$ следующие функции корректно определены:

$$F^{(0)}_{x,M} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad F^{(0)}_{x,M}(h) = F'(x, h),$$
$$F^{(k)}_{x,M} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad F^{(k)}_{x,M}(h) = \big(F^{(k-1)}_{x,M}\big)'(m_k, h), \quad 1 \leqslant k \leqslant p.$$

Класс лексикографически гладких функций замкнут относительно операции композиции и содержит все непрерывно дифференцируемые и все выпуклые функции. Следующее утверждение описывает основные свойства функций $F^{(j)}_{x,M}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. *Пусть функция f является лексикографически гладкой в точке x, $p \in \mathbb{N}$ и $M = (m_1, \ldots, m_p) \in \mathbb{R}^{n \times p}$ произвольны. Справедливы следующие утверждения:*

1) *для любого $j \in \{0, 1, \ldots, p\}$ функция $F^{(j)}_{x,M}$ положительно однородна;*

2) *для любого $j \in \{1, \ldots, p-1\}$ справедливы равенства*

$$F^{(j)}_{x,M}(h) = F^{(j+1)}_{x,M}(h) = \ldots = F^{(p)}_{x,M}(h) \quad \forall h \in \operatorname{lin}\{m_1, \ldots, m_j\};$$

3) *для любого $j \in \{1, \ldots, p\}$ функция $F^{(j)}_{x,M}$ линейна на $\operatorname{lin}\{m_1, \ldots, m_j\}$;*

4) *для любого $j \in \{1, \ldots, p\}$ будет $F^{(j-1)}_{x,M}(m_j) = F^{(j)}_{x,M}(m_j) = \ldots = F^{(p)}_{x,M}(m_j)$.*

Если линейная оболочка столбцов матрицы $M \in \mathbb{R}^{n \times p}$ совпадает с $\mathbb{R}^n$, то по предыдущему предложению функция $F^{(p)}_{x,M}$ линейна на $\mathbb{R}^n$. Исходя из этого, определим *лексикографический субдифференциал* функции F в точке x, как

$$\partial_L F(x) = \big\{ JF^{(n)}_{x,M}(0) \in \mathbb{R}^{m \times n} \mid M \in \mathbb{R}^{n \times n}, \det M \neq 0 \big\}.$$

Лексикографический субдифференциал $\partial_L F(x)$, очевидно, является непустым множеством. Для любой невырожденной матрицы $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ обозначим $J_L f(x, M) = JF^{(n)}_{x,M}(0)$.

Для любых $p \in \mathbb{N}$ и $M = (m_1, \ldots, m_p) \in \mathbb{R}^{n \times p}$ обозначим через $J_0 F(x, M) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ любую матрицу для которой

$$F^{(p)}_{x,M}(h) = J_0 F(x, M) h \quad \forall h \in \operatorname{lin}\{m_1, \ldots, m_p\}.$$

Пункт 3 предложения 7 гарантирует существование по крайней мере одной такой матрицы. Нетрудно заметить, что

$$J_0F(x, M)m_k = F_{x,M}^{(p)}(m_k) \quad \forall k \in \{1, \ldots, p\}$$

при любом выборе матрицы $J_0F(x, M)$. Таким образом матрица $J_0F(x, M)M$ не зависит от выбора матрицы $J_0F(x, M)$.

Следующие утверждения указывают некоторые правила вычисления лексикографических субдифференциалов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. *Пусть функции $F_1, F_2 \colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ являются лексикографически гладкими в точке $x \in \Omega$. Тогда для любых $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ и для любой невырожденной матрицы $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ будет*

$$J_L[c_1F_1 + c_2F_2](x, M) = c_1J_LF_1(x, M) + c_2J_LF_2(x, M).$$

Кроме того, $\partial_L[c_1F_1](x) = c_1\partial_LF_1(x)$.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть $X \subset \mathbb{R}^q$ — открытое множество, функция $G \colon X \to \Omega$ является лексикографически гладкой в точке $x \in X$, а функция F является лексикографически гладкой в точке $y = G(x)$. Тогда композиция функций $F \circ G$ является лексикографически гладкой в точке X и для любой невырожденной матрицы $M \in \mathbb{R}^{q \times q}$ справедливо равенство*

$$J_L[F \circ G](x, M) = J_0F(G(x), J_LG(x, M)M)J_LG(x, M).$$

Замечание 5.1. В отличие от обобщённого якобиана, многозначное отображение $x \to \partial_LF(x)$ может не быть полунепрерывным сверху.

Имеют место следующие соотношения между лексикографическим субдифференциалом и обобщённым якобианом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. *Пусть F является лексикографически гладкой в точке x. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $\partial_LF(x) \subset \partial_PF(x)$;

2) если $m = 1$, то $\partial_LF(x) \subset \partial F(x)$.

Рассмотрим несколько примеров.

ПРИМЕР 3. Пусть $n = 2$, $f(x) = |x_1| - |x_2|$ и $M = (a, b) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ — произвольная невырожденна матрица, где a и b — столбцы матрицы M. Вычислим лексикографический субдифференциал функции f в нуле.

Поскольку функция f положительно однородна, то $f^{(0)}_{0,M}(\cdot) = f(\cdot)$. Имеем

$$f^{(1)}_{0,M}(h) = \begin{cases} \operatorname{sign}(a_1)h_1 - \operatorname{sign}(a_2)h_2, \text{ если } a_1 \neq 0, a_2 \neq 0, \\ |h_1| - \operatorname{sign}(a_2)h_2, \text{ если } a_1 = 0, a_2 \neq 0, \\ \operatorname{sign}(a_1)h_1 - |h_2|, \text{ если } a_1 \neq 0, a_2 = 0, \end{cases}$$

где $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ — произвольно, $a = (a_1, a_2)^T$ и $b = (b_1, b_2)^T$. Учитывая невырожденность матрицы M, получаем

$$f^{(2)}_{0,M}(h) = \begin{cases} f^{(1)}_{0,M}(h), \text{ если } a_1 \neq 0, a_2 \neq 0, \\ \operatorname{sign}(b_1)h_1 - \operatorname{sign}(a_2)h_2, \text{ если } a_1 = 0, a_2 \neq 0, b_1 \neq 0, \\ \operatorname{sign}(a_1)h_1 - \operatorname{sign}(b_2)h_2, \text{ если } a_1 \neq 0, a_2 = 0, b_2 \neq 0. \end{cases}$$

Откуда следует, что

$$\partial_L f(0) = \{(-1, -1), (-1, 1), (1, -1), (1, 1)\}.$$

ПРИМЕР 4. Пусть $f(x) = \max\{f_1(x), f_2(x)\}$, где функции $f_1, f_2 \colon \Omega \to \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируемы в точке $x_0 \in \Omega$. Предположим, что $f_1(x_0) = f_2(x_0)$ и $f_1'(x_0) \neq f_2'(x_0)$ и вычислим лексикографический субдифференциал функции f в точке x_0. Пусть $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — невырожденная матрица. Имеем

$$f^{(0)}_{x_0,M}(h) = \max\{\langle f_1'(x), h\rangle, \langle f_2'(x), h\rangle\} \quad \forall h \in \mathbb{R}^n.$$

Здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$. Откуда получаем, что для любого $k \in \{1, \ldots, n\}$ будет

$$f^{(k)}_{x_0,M}(h) = f^{(0)}_{x_0,M}(h),$$

если $\langle f_1'(x), m_l\rangle = \langle f_2'(x), m_l\rangle$ для всех $l \in \{1, \ldots, k\}$, и

$$f^{(k)}_{x_0,M}(h) = \langle f_i'(x), h\rangle$$

если существует $l \in \{1, \ldots, k\}$ такое, что

$$\langle f_i'(x), m_l\rangle > \langle f_j'(x), m_l\rangle, \quad \langle f_i'(x), m_s\rangle = \langle f_j'(x), m_s\rangle \quad 1 \leqslant s \leqslant l-1, \tag{5}$$

где $i, j \in \{1, 2\}$, $i \neq j$. Поскольку матрица M не вырождена, то найдётся такое $l \in \{1, \ldots, n\}$, что выполнено (5), и тогда для любого $p \in \{l+1, \ldots, n\}$ будет

$$f^{(p)}_{x_0,M}(h) = f^{(l+1)}_{x_0,M}(h) = \langle f_i'(x), h\rangle \quad \forall h \in \mathbb{R}^n.$$

Теперь ясно, что

$$\partial_L f(x_0) = \{f_1'(x_0), f_2'(x_0)\}.$$

ПРИМЕР 5. Пусть $f = \max_{i \in I} f_i$, где функции $f_i \colon \Omega \to \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируемы в точке $x_0 \in \Omega$, $i \in I = \{1, \ldots, l\}$. Определим множество $R(x) = \{i \in I \mid f_i(x) = f(x)\}$ и предположим, что вершинами выпуклой оболочки $\mathrm{co}\{f_i'(x_0) \mid i \in R(x)\}$ являются градиенты функций f_k для $k \in R_0(x) \subset R(x)$. Тогда рассуждая аналогично предыдущему примеру и применяя принцип максимума для выпуклых функций [6], нетрудно показать, что $\partial_L f(x_0) = \{f_k'(x_0) \mid k \in R_0(x)\}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988. 280 с.

2. Khan K.A., Barton P.I. *Generalized Derivatives for Solutions of Parametric ODEs with Non–differentiable Right–Hand Sides* // Journal of Optimization Theory and Applications. Under review.

3. Nesterov Y. *Lexicographic differentiation of nonsmooth functions* // Math. Program. Ser. B **104**, 669–700 (2005).

4. Федерер Г. Геометрическая теория меры. М.: Наука, 1987. 760 с.

5. Демьянов В.Ф., Рубинов А.М. Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. М.: Наука, 1990. 432 с.

6. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 472 с.