ОБОБЩЕННАЯ ТОЧКА ЛЮИЛЬЕ*

Г. Ш. Тамасян
g.tamasyan@spbu.ru

М. В. Удот
udot.mikhail@gmail.com

27 марта 2014 г.

Аннотация. В настоящей работе решается задача поиска обобщенной точки Люилье для заданного в многомерном пространстве симплекса. Она определяется как точка, сумма квадратов расстояний которой до плоскостей граней симплекса минимальна. Данная точка более известна для треугольника как точка Лемуана—Гребе и для тетраэдра — как первая точка Лемуана. Получены аналитические формулы для обобщенной точки Люилье, для суммы квадратов расстояний от нее до граней симплекса и для координат вершин «педального» симплекса.

1. Постановка задачи

Пусть в $\mathbb{R}^n$ задан симплекс Λ своими вершинами $A^j \in \mathbb{R}^n$, $j \in 1 : n+1$. Будем считать, что векторы $A^1, \dots, A^{n+1}$ аффинно независимые.

Требуется найти точку $x^* \in \mathbb{R}^n$, для которой сумма квадратов расстояний до граней симплекса минимальна.

2. Вспомогательные результаты

Рассмотрим квадратную $((n+1) \times (n+1))$-матрицу

$$M = \begin{pmatrix} A^1 & \dots & A^{n+1} \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $L_k(x)$, $k \in 1 : n+1$, определитель матрицы, полученный заменой k-го столбца в матрице M на столбец $\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$, где $x \in \mathbb{R}^n$, т. е.

$$L_k(x) = \begin{vmatrix} A^1 & \dots & A^{k-1} & x & A^{k+1} & \dots & A^{n+1} \\ 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

*Семинар по конструктивному негладкому анализу и недифференцируемой оптимизации «CNSA & NDO»: `http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/`

Уравнение $L_k(x) = 0$ определяет гиперплоскость проходящую через k-ю грань симплекса Λ. Положим

$$V_k = \| \operatorname{grad} L_k(x) \|. \tag{1}$$

Будем считать, что симплекс Λ имеет положительную ориентацию [1], т. е. точки $A^1, \dots, A^{n+1}$ заданы так, что $\det M > 0$. Тогда уравнение вида

$$\frac{1}{V_k} L_k(x) = 0, \quad k \in 1 : n+1, \tag{2}$$

задает нормированное уравнение гиперплоскости.

Таким образом, расстояние от произвольной точки $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ до гиперплоскости (2) вычисляется по формуле $\frac{1}{V_k}|L_k(\bar{x})|$. Здесь модуль можно отбросить, если точки $\bar{x}$ и A^k лежат по одну сторону гиперплоскости (2).

Обозначим через M_j матрицу, образованную из M заменой элементов j-й строки на единицы при $j \in 1 : n$. Очевидно, что $\det M_j = 0$.

Разложим определить матрицы M_j по j-й строке. Получим

$$\det M_j = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{j+k} \det M_{jk} = 0, \quad j \in 1 : n, \tag{3}$$

где $\det M_{jk}$ — минор, соответствующий элементу с индексом (j, k).

Введем обозначения

$$g_k = \begin{pmatrix} (-1)^{k+1} \det M_{1k} \\ \vdots \\ (-1)^{k+n} \det M_{nk} \end{pmatrix}, \quad k \in 1 : n+1. \tag{4}$$

Заметим, что (см. (1))

$$g_k = \operatorname{grad} L_k(x), \tag{5}$$

$$L_k(g_k) = V_k^2 + (-1)^{k+n+1} L_k(\mathbb{O}), \tag{6}$$

где $\mathbb{O} \in \mathbb{R}^n$ — нулевой вектор.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1 (Теорема Минковского о многогранниках)**.** *Справедливо следующее равенство*: $\sum\limits_{k=1}^{n+1} g_k = \mathbb{O}.$

Доказательство следует из формул (4) и (3), а именно,

$$\sum_{k=1}^{n+1} g_k = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{n+1} (-1)^{k+1} \det M_{1k} \\ \vdots \\ \sum\limits_{k=1}^{n+1} (-1)^{k+n} \det M_{nk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \det M_1 \\ \vdots \\ \det M_n \end{pmatrix} = \mathbb{O}.$$

3. Решение задачи

Рассмотрим функцию

$$F(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{V_k^2} L_k^2(x).$$

Исходная задача теперь может быть сформулирована следующим образом:

$$F(x) \to \min_{x \in \mathbb{R}^n}. \tag{7}$$

Заметим, что целевая функция $F(x)$ является квадратичной функцией.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. $F(x)$ *— сильно выпуклая функция.*

Доказательство. Достаточно убедиться в том, что матрица вторых производных $F''(x)$ является положительно определенной.

Пусть $G = \begin{pmatrix} \frac{g_1}{V_1} & \dots & \frac{g_{n+1}}{V_{n+1}} \end{pmatrix}$. Покажем, что $\operatorname{rank} G = n$. В силу положительной ориентации симплекса Λ определитель матрицы M положителен. Тогда существует обратная матрица M^{-1} и ее первые n столбцов образуют матрицу $\begin{pmatrix} g_1 & \dots & g_{n+1} \end{pmatrix}^T$. Разделив k-ю строку этой матрицы на V_k, $k \in 1 : n+1$, получим матрицу G^T. Таким образом, $\operatorname{rank} G = n$.

Градиент $F'(x)$ и матрицу вторых производных $F''(x)$ функции $F(x)$ можно представить в виде

$$F'(x) = G \begin{pmatrix} \frac{L_1(x)}{V_1} \\ \vdots \\ \frac{L_{n+1}(x)}{V_{n+1}} \end{pmatrix}, \qquad F''(x) = GG^T.$$

Матрица $F''(x)$ является матрицей Грама линейно независимой системы строк матрицы G, а тогда из свойств матрицы Грама [2] следует, что она является положительно определённой. $\square$

ТЕОРЕМА. *Вектор*

$$x^* = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n+1} V_k^2 A^k}{\sum\limits_{k=1}^{n+1} V_k^2} \tag{8}$$

является единственным решением задачи (7).

Предварительно докажем вспомогательное утверждение.

ЛЕММА. *Справедливо представление*

$$L_k(x^*) = \frac{V_k^2}{\sum\limits_{k=1}^{n+1} V_k^2} \det M. \tag{9}$$

Доказательство. Рассмотрим определитель

$$L_k(x^*) = \begin{vmatrix} A^1 & \dots & A^{k-1} & x^* & A^{k+1} & \dots & A^{n+1} \\ 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

Вычтем из k-го столбца этого определителя j-й столбец, умноженный на $\frac{V_j^2}{\sum\limits_{k=1}^{n+1} V_k^2}$ при $j \in 1 : n+1$, $j \neq k$. Получим

$$L_k(x^*) = \begin{vmatrix} A^1 & \dots & A^{k-1} & \frac{V_k^2}{\sum\limits_{k=1}^{n+1} V_k^2} A^k & A^{k+1} & \dots & A^{n+1} \\ 1 & \dots & 1 & \frac{V_k^2}{\sum\limits_{k=1}^{n+1} V_k^2} & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

и, если вынести из k-го столбца общий множитель, то придём к (9). $\square$

Перейдём к доказательству теоремы. В силу того, что целевая функция $F(x)$ сильно выпуклая, задача (7) имеет единственное решение.

Осталось показать, что градиент функции $F(x)$ в точке x^* обращается в нуль. Действительно, в силу утверждения 1, равенств (5) и (9), имеем

$$\operatorname{grad} F(x^*) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{V_k^2} L_k(x^*) \operatorname{grad} L_k(x^*) = \frac{\det M}{\sum\limits_{k=1}^{n+1} V_k^2} \sum_{k=1}^{n+1} g_k = \mathbb{O}.$$

Теорема доказана. $\square$

З а м е ч а н и е. Задачу (7) (при $n = 2$ и $n = 3$) поставил Симон Люилье. Точка (8) при $n = 2$ является одной из замечательных точек треугольника, которая называется точкой Лемуана—Гребе [1, 3–6], при $n = 3$ — первой точкой Лемуана [7] или точкой Люилье тетраэдра [3]. В общем случае решение (8) задачи (7) будем называть обобщенной точкой Люилье.

4. Некоторые свойства обобщенной точки Люилье

Обозначим через d_k расстояние от точки x^* до k-й грани симплекса Λ, $k \in 1 : n+1$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. *Справедливы равенства*

$$\frac{d_k}{V_k} = K, \quad k \in 1 : n+1,$$

где константа K имеет вид

$$K = \frac{n!V}{\sum\limits_{k=1}^{n+1} V_k^2} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n+1} d_k^2}{n!V}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что объем V симплекса Λ равен [8]:

$$V = \tfrac{1}{n!} \det M. \tag{10}$$

Из (9) и (10) следует, что

$$d_k = \frac{n!V}{\sum\limits_{k=1}^{n+1} V_k^2} V_k. \tag{11}$$

Тогда

$$\frac{d_k}{V_k} = \frac{n!V}{\sum\limits_{k=1}^{n+1} V_k^2} = K, \tag{12}$$

а также

$$\sum_{k=1}^{n+1} d_k^2 = \frac{(n!)^2 V^2}{\sum\limits_{k=1}^{n+1} V_k^2}. \tag{13}$$

В силу (11) и (13) получим

$$\sum_{k=1}^{n+1} d_k^2 = \frac{d_k}{V_k} n!V \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d_k}{V_k} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n+1} d_k^2}{n!V} = K.$$

Утверждение доказано. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 1. *Справедливы следующие равенства*

$$L_k(x^*) = \frac{V_k^2}{\sum\limits_{k=1}^{n+1} V_k^2} n!V, \qquad F(x^*) = \frac{(n!V)^2}{2\sum\limits_{k=1}^{n+1} V_k^2}.$$

Обозначим через ξ_k проекцию точки x^* на k-ю грань симплекса Λ, $k \in 1 : n+1$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. *Справедлива формула* $\xi_k = x^* - Kg_k$.

Доказательство. Уравнение прямой, проходящей через точку x^* и ортогональной к k-й грани симплекса, имеет вид

$$x(t) = tg_k + x^*.$$

Требуется найти такое t_k, при котором $L_k(x(t_k)) = 0$, т. е. $t_k g_k + x^* = \xi_k$. С учетом (1), (5) и (6) имеем

$$L_k(t_k g_k + x^*) = \begin{vmatrix} A^1 & \dots & A^{k-1} & t_k g_k + x^* & A^{k+1} & \dots & A^{n+1} \\ 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} A^1 & \dots & A^{k-1} & t_k g_k & x^{k+1} & \dots & A^{n+1} \\ 1 & \dots & 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A^1 & \dots & A^{k-1} & x^* & A^{k+1} & \dots & A^{n+1} \\ 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= t_k V_k^2 + L_k(x^*) = 0.$$

Отсюда и в силу (9), (10) и (12) получаем

$$t_k V_k^2 + \frac{n!VV_k^2}{\sum\limits_{k=1}^{n+1} V_k^2} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad t_k = -\frac{n!V}{\sum\limits_{k=1}^{n+1} V_k^2} = -K.$$

Утверждение доказано. □

СЛЕДСТВИЕ 2. *Обобщенная точка Люилье является центроидом «педального» симплекса* $\Pi = \mathrm{co}\{\xi_k,\ k \in 1 : n+1\}$, *т. е.*

$$x^* = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \xi_k.$$

Доказательство. Распишем сумму

$$\sum_{k=1}^{n+1} \xi_k = \sum_{k=1}^{n+1} (x^* - Kg_k) = \sum_{k=1}^{n+1} x^* - K \sum_{k=1}^{n+1} g_k = (n+1)x^* - K \sum_{k=1}^{n+1} g_k.$$

В силу утверждения 1 получаем искомое представление.

Следствие доказано. □

5. Открытые задачи

1) Найти точку $x^* \in \mathbb{R}^n$, для которой сумма расстояний до граней симплекса минимальна.

2) Найти точку $x^* \in \mathbb{R}^n$, для которой сумма (квадратов) расстояний до рёбер симплекса минимальна.

ЛИТЕРАТУРА

1. Понарин Я. П. Элементарная геометрия: В 3 т. — Т. 3: Треугольники и тетраэдры. — М.: МЦНМО, 2009. 192 с.

2. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1966. 576 с.

3. Понарин Я. П. Элементарная геометрия: В 2 т. — Т. 2: Стереометрия, преобразования пространства. — 2-е изд., стереотип. — М.: МЦНМО, 2008. 256 с.

4. Ефремов Д. Д. Новая геометрия треугольника. Одесса: Типография бланкоиздательства М. Шпенцера, 1902. 351 с.

5. Mackay J. S. Early history of the symmedian point // Proc. Edinburgh Math. Soc., 1892–1893. No 11. P. 92–103.

6. Зетель С. И. Задачи на максимум и минимум. М.-Л.: Гостехиздат, 1948. 224 с.

7. Прасолов В. В. Задачи по стереометрии. М.: МЦНМО, 2010. 352 с.

8. Утешев А. Ю. Геометрические приложения определителя [Электронный ресурс] // Записная книжка профессора Утешева. 2007. URL:http://pmpu.ru/vf4/dets/geometry (дата обращения: 11.03.2014).