СРЕДНИЕ ДЖИНИ*

А. Б. Певный С. М. Ситник

pevnyi@syktsu.ru mathsms@yandex.ru

1 ноября 2014 г.

Аннотация. В работе рассматриваются средние К. Джини и их частные случаи — средние Лемера. Для них доказана теорема сравнения.

1°. Широко известны три вида средних значений для пары положительных чисел a, b. Это средние арифметическое $A(a,b)$, геометрическое $G(a,b)$ и гармоническое $H(a,b)$, которые определяются по формулам

$$A(a,b)=\frac{a+b}{2},\quad G(a,b)=\sqrt{ab},\quad H(a,b)=\frac{2ab}{a+b}.$$

Эти средние были введены ещё в Древней Греции в работах Пифагора и его школы, а также Никомаха ([1–7]). Источником для введения средних для древнегреческих учёных стали пропорции, учение о которых активно развивалось, так как понятие пропорции использовалось тогда не только в математике, но также и в философии, скульптуре, архитектуре и живописи. Например, если найти величину x из нижеследующих пропорций, то как раз последовательно получим основные средние

$$\frac{a-x}{x-b}=\frac{a}{a}=1 \implies x=A(a,b);$$

$$\frac{a-x}{x-b}=\frac{a}{x} \implies x=G(a,b);\quad \frac{a-x}{x-b}=\frac{a}{b} \implies x=H(a,b).$$

Позднее были введены среднее квадратичное и общие *степенные средние порядка* r, где r произвольное вещественное число. Для набора положительных

*Семинар по конструктивному негладкому анализу и недифференцируемой оптимизации «CNSA & NDO»: `http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/`

чисел $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ они определяются формулами

$$M_r(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \left(\frac{a_1^r + a_2^r + \ldots + a_n^r}{n}\right)^{\frac{1}{r}}, \quad r \neq 0; \tag{1}$$

$$M_0(a_1, a_2, \ldots, a_n) := \lim_{r \to 0} M_r(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ \ldots \ \cdot a_n} \ .$$

Важнейшим свойством степенных средних является тот факт, что семейство этих величин монотонно возрастает по параметру r, или, как говорят, образует шкалу ([2–9]). В частности,

$$H(a,b) \leqslant G(a,b) \leqslant A(a,b).$$

Эта самая известная из целого ряда теорем, в которой сравниваются между собой различные средние.

Наряду со степенными средними в различных задачах потребовалось использовать и другие типы средних ([9, 10]). В 1938 году итальянский математик и экономист Коррадо Джини ввёл новое семейство средних, которые впоследствии были названы его именем. Эти средние величины определяются так. Для любого набора положительных чисел $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ введём степенные суммы

$$S_p(a) = \sum_{i=1}^{n} a_i^p, \quad p \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Тогда *средние Джини* $Gi_{p,q}(a)$, зависящие от двух вещественных параметров p и q, определяются по формулам

$$Gi_{p,q}(a) = Gi_{q,p}(a) = \begin{cases} \left(\frac{S_p(a)}{S_q(a)}\right)^{\frac{1}{p-q}}, & \text{если } p \neq q, \\ \exp\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^p \ln a_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^p}\right), & \text{если } p = q \neq 0, \\ M_0(a), & \text{если } p = q = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Мы далее будем рассматривать общий случай, положив для определённости $p > q$.

Основным предметом изучения Коррадо Джини было имущественное неравенство. Для его описания он и ввёл знаменитый «*индекс Джини*», для вычисления которого использовались в том числе и средние (3). Это одно из основных понятий современной социальной статистики [5], а сам К. Джини —

один из общепризнанных её создателей. Он также использовал и пропагандировал результаты своего соотечественника Вильфреда Парето. Парето первым провёл конкретные расчёты, из которых следовало, что в его время всего 20% населения владело 80% национального богатства, и сделал вывод, что организованное таким образом государство ждёт быстрая и неизбежная гибель. Просто отметим, что сейчас в России реальные показатели индексов Джини ещё хуже. Развивая работы Парето, американский экономист О. Лоренц разработал теорию оценки разницы доходов населения по группам (кривая Лоренца), которая сейчас называется методологией Парето – Лоренца – Джини [5].

Важный частный случай средних Джини получается из (3) при $q = p - 1$. Эти средние были переоткрыты в 1971 г. Д. Лемером и имеют вид

$$Le_p(a) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^p}{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^{p-1}}.$$

Средние Лемера в советское время чуть позже переоткрыл школьный учитель Ю. М. Фирсов [6].

2°. Покажем, что средние Джини так же как и степенные средние образуют шкалу по своим параметрам — для них справедлива теорема сравнения. А именно, средние Джини увеличиваются, когда или параметр p, или параметр q, или оба эти параметра увеличиваются.

ТЕОРЕМА. *Пусть среди чисел* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *есть хотя бы два неравных числа. Если выполнены условия*

$$p_1 > q_1, \quad p_2 > q_2, \quad p_2 \geqslant p_1, \quad q_2 \geqslant q_1,$$

и хотя бы одно из двух последних неравенств строгое, то справедливо неравенство

$$Gi_{p_1,q_1}(a) < Gi_{p_2,q_2}(a). \tag{4}$$

Доказательство. Неравенство (4) в развёрнутом виде выглядит так:

$$\left(\frac{S_{p_1}(a)}{S_{q_1}(a)}\right)^{\frac{1}{p_1-q_1}} < \left(\frac{S_{p_2}(a)}{S_{q_2}(a)}\right)^{\frac{1}{p_2-q_2}}. \tag{5}$$

Оно упрощается, если от обеих частей взять логарифм:

$$\frac{1}{p_1 - q_1}\left[\ln S_{p_1}(a) - \ln S_{q_1}(a)\right] < \frac{1}{p_2 - q_2}\left[\ln S_{p_2}(a) - \ln S_{q_2}(a)\right]. \tag{6}$$

Введём функцию $f(p) = \ln S_p(a)$. Тогда неравенство (6) примет вид

$$\frac{f(p_1) - f(q_1)}{p_1 - q_1} < \frac{f(p_2) - f(q_2)}{p_2 - q_2}. \tag{7}$$

Но (7) заведомо выполняется, если функция $f(p)$ строго выпукла. Действительно, левая часть (7) — это тангенс наклона хорды соединяющей точки $(p_1, f(p_1))$, $(q_1, f(q_1))$, а правая часть — это тангенс наклона второй хорды. По условиям теоремы первый тангенс меньше второго тангенса (см. рис.).

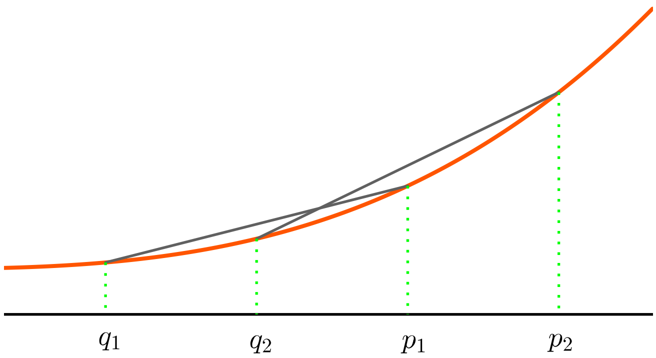

Рис. График строго выпуклой функции

Осталось установить строгую выпуклость функции $f(p)$, для чего достаточно проверить неравенство $f''(p) > 0$, $-\infty < p < \infty$. Вычисляем

$$f''(p) = \frac{1}{S^2(p)} \left[S''(p)S(p) - (S'(p))^2 \right].$$

Это выражение будет положительным, если выполнено условие

$$(S'(p))^2 < S''(p)S(p). \tag{8}$$

В развёрнутом виде оно эквивалентно следующему:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p \ln a_i \right)^2 < \sum_{i=1}^{n} a_i^p \sum_{i=1}^{n} a_i^p (\ln a_i)^2.$$

Но последнее соотношение следует из неравенства Коши – Буняковского (надо представить a_i^p как $\sqrt{a_i^p} \cdot \sqrt{a_i^p}$).

Покажем, что действительно неравенство (4) всегда является строгим, хотя в использованном нами неравенстве Коши – Буняковского возможен и случай равенства. В этом случае должно существовать такое число λ, что

$$\sqrt{a_i^p}\ln a_i = \lambda\sqrt{a_i^p}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

а это возможно только тогда, когда все числа a_i равны между собой. Следовательно, в (7) всегда будет строгое неравенство.

Теорема доказана. □

По мнению авторов, приведённое доказательство несколько проще, чем в монографии Буллена ([9, стр. 249]).

ЛИТЕРАТУРА

1. К. Джини. *Средние величины.* М.: Статистика, 1970.
2. Г. Г. Харди, Дж. Е. Литтлвуд, Г. Полиа. *Неравенства.* М., 1948.
3. Э. Беккенбах, Р. Беллман. *Неравенства.* М., 1965.
4. С. М. Ситник. *Уточнения и обобщения классических неравенств.* Итоги науки. Серия «Математический форум». Том 3. Исследования по математическому анализу. Под ред. Ю.Ф. Коробейника, А.Г. Кусраева. Владикавказ, 2009. С. 221–266.
5. *Социальная статистика.* (Ред. И.И. Елисеева). М., 2003.
6. С. И. Калинин. *Средние величины степенного типа. Неравенства Коши и Ки Фана.* Киров, 2002.
7. Gh. Toader, S. Toader. *Greek means and the Arithmetic–Geometric Mean.* RGMIA Monographs, Victoria University, 2005. (Online: http://rgmia.org/monographs/toader.htm).
8. D. S. Mitrinović, J. E. Pečarić, A. M. Fink. *Classical and new inequalities in analysis.* Kluwer, 1993.
9. P. S. Bullen. *Handbook of Means and Their Inequalities.* Kluwer, 2003.
10. S. M. Sitnik. *Generalized Young and Cauchy–Bunyakowsky Inequalities with Applications: a survey.* arXiv:1012.3864. 2012, 51 P.