ГИПОДИФФЕРЕЦИАЛЬНЫЙ СПУСК В ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧАХ*

Г. Ш. Тамасян

g.tamasyan@spbu.ru

25 сентября 2014 г.

Аннотация. В докладе сравниваются численные реализации двух прямых методов решения задач вариационного исчисления. А именно, хорошо известный метод Ритца и метод гиподифференциального спуска. Приводится пример, демонстрирующий преимущества второго метода.

1°. Постановка задачи. Пусть x_0, $x_1 \in \mathbb{R}$ и $T > 0$ фиксированы. Через $C^1[0,T]$ обозначим класс непрерывно дифференцируемых на $[0,T]$ функций.

Рассмотрим *простейшую* (или основную) задачу вариационного исчисления: требуется минимизировать функционал

$$I(x) = \int_0^T F(x(t), \dot{x}(t), t)\, dt \tag{1}$$

на множестве

$$\Omega = \{x \in C^1[0,T] \mid x(0) = x_0, \quad x(T) = x_1\}. \tag{2}$$

Здесь функция $F(x,z,t)$ непрерывна вместе с F'_x и F'_z по всем своим аргументам на $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [0,T]$.

Положим

$$\varphi_1(z) = \int_0^T z(t)\, dt + x_0 - x_1, \quad \varphi(z) = |\varphi_1(z)|. \tag{3}$$

Введём множество

$$Z = \{z \in C[0,T] \mid \varphi(z) = 0\},$$

где $C[0,T]$ — множество непрерывных на $[0,T]$ функций.

*Семинар по конструктивному негладкому анализу и недифференцируемой оптимизации «CNSA & NDO»: `http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/`

Пусть $v_1, v_2 \in C[0,T]$. На множестве $C[0,T]$ введём скалярное произведение

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \int_0^T v_1(t) v_2(t)\, dt.$$

Рассмотрим функционал

$$f(z) = \int_0^T F(x_0 + \int_0^t z(\tau)\, d\tau, z(t), t)\, dt.$$

Задача

$$I(x) \longrightarrow \inf_{x \in \Omega} \tag{4}$$

эквивалентна задаче

$$f(z) \longrightarrow \inf_{z \in Z} \tag{5}$$

в том смысле, что если $x^* \in \Omega$ — решение задачи (4), то функция $z^*(t) = \dot{x}^*(t)$ является решением задачи (5); и обратно, если $z^* \in Z$ доставляет минимум функции f на множестве Z, то функция $x^*(t) = x_0 + \displaystyle\int_0^t z^*(\tau)\, d\tau$ является решением задачи (4).

Мы будем решать задачу (5) с помощью теории точных штрафных функций [1–7]. При $\lambda \geqslant 0$ рассмотрим штрафную функцию

$$\Phi_\lambda(z) = f(z) + \lambda \varphi(z). \tag{6}$$

В работах [3, 5] показано, что для достаточно большого λ функция Φ_λ является точной штрафной функцией, т. е., что для достаточно большого λ любая точка глобального минимума штрафной функции Φ_λ является решением исходной задачи.

Таким образом, задача минимизации функционала f на множестве Z сведена к задаче минимизации функционала $\Phi_\lambda(z)$ на множестве $C[0,T]$.

2°. Метод гиподифференциального спуска (МГС). Функция Φ_λ является гиподифференцируемой в точке $z \in C[0,T]$ (см. [5, 8, 10]). Действительно, для любого $v \in C[0,T]$ справедливо разложение

$$\Phi_\lambda(z + \varepsilon v) = \Phi_\lambda(z) + \max_{[a,w] \in d\Phi_\lambda(z)} [a + \varepsilon \langle w, v \rangle] + o(\varepsilon, v),$$

где $o(\varepsilon, v)/\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \downarrow 0$. Множество $d\Phi_\lambda(z) \subset \mathbb{R} \times C[0,T]$ — гиподифференциал функции Φ_λ в точке z:

$$d\Phi_\lambda(x) = \operatorname{co} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ Q(t,z) + \lambda \ \operatorname{sign} \varphi_1(z) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2\lambda \varphi(z) \\ Q(t,z) - \lambda \ \operatorname{sign} \varphi_1(z) \end{pmatrix} \right\}. \tag{7}$$

Здесь $Q(t,z)$ — градиент функционала f в точке z

$$Q(t,z) = \int_t^T \frac{\partial F(x(\tau), z(\tau), \tau)}{\partial x} d\tau + \frac{\partial F(x(t), z(t), t)}{\partial z} \tag{8}$$

и

$$\varphi_1(z) = \int_0^T z(t)\, dt + x_0 - x_1.$$

В пространстве $\mathbb{R} \times C[0,T]$ введём норму

$$\big|\big|[a,w]\big|\big| = \sqrt{a^2 + \langle w, w\rangle}.$$

ЛЕММА 1 ([3, 5])**.** *Для того чтобы в точке $z^* \in C[0,T]$ функция Φ_λ достигала своего наименьшего значения, необходимо, а в случае, когда функция f выпукла и достаточно, чтобы*

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \mathbb{O} \end{pmatrix} \in d\Phi_\lambda(z^*). \tag{9}$$

Точка z^*, которая удовлетворяет условию (9), называется *стационарной.*

ЛЕММА 2. *Пусть $z \in C[0,T]$ не является стационарной точкой. Направлением спуска функционала Φ_λ в точке z является функция*

$$g(t,z) = -\frac{q_2^*(t,z)}{||q_2^*(t,z)||}, \tag{10}$$

где

$$q_2^*(t,z) = \begin{cases} Q(t,z) + \lambda \operatorname{sign} \varphi_1(z), & \textit{если } \gamma^* < 0; \\ Q(t,z) - \dfrac{\int_0^T Q(t,z)dt - \lambda\varphi^2(z)\ \operatorname{sign}\varphi_1(z)}{T + \varphi^2(z)}, & \textit{если } \gamma^* \in [0,1]; \\ Q(t,z) - \lambda \operatorname{sign} \varphi_1(z), & \textit{если } \gamma^* > 1; \end{cases} \tag{11}$$

и

$$\gamma^* = \frac{T + \dfrac{\operatorname{sign}\varphi_1(z)}{\lambda} \displaystyle\int_0^T Q(t,z)dt}{2[T + \varphi^2(z)]}. \tag{12}$$

В отличие от направления наискорейшего спуска [5, 10], направление $g(t,z)$ является непрерывным по z.

Доказательство. Найдем минимальный по норме гипоградиент

$$[q_1^*, q_2^*] \in d\Phi_\lambda(z).$$

Отметим, что гиподифференциал $d\Phi_\lambda(z)$ (см. (7)) является отрезком, поэтому каждый элемент $\widetilde{q} \in d\Phi_\lambda(z)$ можно описать следующим образом:

$$\widetilde{q}(\gamma) = \begin{pmatrix} -2\gamma\lambda\varphi(z) \\ Q(t,z) + (1-2\gamma)\lambda\ \operatorname{sign}\varphi_1(z) \end{pmatrix}, \qquad \gamma \in [0,1].$$

Поиск минимального по норме гипоградиента сводится к решению задачи

$$\min_{\gamma\in[0,1]} \left\|\widetilde{q}(\gamma)\right\|^2 = \min_{\gamma\in[0,1]} h(\gamma) = h(\gamma^*), \tag{13}$$

где

$$h(\gamma) = (2\gamma\lambda\varphi(z))^2 + \int_0^T (Q(t,z) + (1-2\gamma)\lambda\operatorname{sign}\varphi_1(z))^2\,dt.$$

Ясно, что решение γ^* данной задачи существует и единственно. Для минимального по норме гипоградиента получим формулу $[q_1^*, q_2^*] = \widetilde{q}(\gamma^*)$, где

$$\gamma^* = \frac{T + \dfrac{\operatorname{sign}\varphi_1(z)}{\lambda}\displaystyle\int_0^T Q(t,z)dt}{2[T+\varphi^2(z)]}, \qquad q_1^*(z) = \begin{cases} 0, & \gamma^* < 0; \\ -2\gamma^*\lambda\varphi(z), & \gamma^* \in [0,1]; \\ -2\lambda\varphi(z), & \gamma^* > 1; \end{cases}$$

$$q_2^*(t,z) = \begin{cases} Q(t,z) + \lambda\operatorname{sign}\varphi_1(z), & \gamma^* < 0; \\ Q(t,z) + (1-2\gamma^*)\lambda\operatorname{sign}\varphi_1(z), & \gamma^* \in [0,1]; \\ Q(t,z) - \lambda\operatorname{sign}\varphi_1(z), & \gamma^* > 1. \end{cases}$$

Лемма доказана. $\square$

Опишем схему метода гиподифференциального спуска для простейшей задачи вариационного исчисления (1), (2).

Зафиксируем $\varepsilon > 0$.

1) Выберем $z_0 \in P[0,T]$.

2) Переход от k-го приближения к $(k+1)$-му осуществляется в следующем порядке ($k \geqslant 0$):

   (a) Вычислим по формулам (11), (12) функцию $q_2^*(t,z_k)$ — вторую компоненту минимального по норме гипоградиента функционала F_λ в точке z_k.

   (b) Проверим выполнение условия $\|q_2^*(t,z_k)\| < \varepsilon$. Если оно выполнено, то процесс прекращается.

   (c) Построим направления спуска $g_k := g(t,z_k)$ по формуле (10) и найдём $\beta_k \geqslant 0$ такое, что

   $$\min_{\beta\geqslant 0} \Phi_\lambda(z_k - \beta g_k) = \Phi_\lambda(z_k - \beta_k g_k).$$

   (d) Положим $z_{k+1} = z_k - \beta_k g_k$.

3°. Метод Ритца. Напомним (см. монографию С.Г. Михлина [9]), что основные этапы численной реализации вариационных методов, в частности, метода Ритца, сводятся к следующему:

1) выбор системы координатных функций;

2) составление системы Ритца и её решение;

3) учёт влияния погрешностей, допущенных при составлении и решении системы Ритца, на точность приближенного решения.

Зафиксируем некоторое натуральное число m. Идея метода Ритца состоит в том, что m-е приближенное решение x_m задачи (1), (2) ищется в виде линейной комбинации координатных функций $\{\psi_k(t)\}$:

$$x_m(t) = \widetilde{x}(t) + \sum_{k=1}^{m} c_k^{(m)} \psi_k(t). \tag{14}$$

Здесь $\widetilde{x}(t)$ — произвольная функция, удовлетворяющая краевым условиям (2), $c_k^{(m)}$ — неизвестные пока вещественные постоянные («коэффициенты Ритца»), а координатные функции удовлетворяют условиям $\psi_k(0) = \psi_k(T) = 0$, $k = 1 : m$.

На линейных комбинациях $x_m(t)$ функционал (1) обращается в функцию аргументов $c_1^{(m)}, \ldots, c_m^{(m)}$:

$$\Phi(c_1^{(m)}, \ldots, c_m^{(m)}) := I(x_m). \tag{15}$$

Далее, остаётся найти коэффициенты $c_k^{(m)}$, $k = 1 : m$, так, чтобы функция (15) принимала минимальное значение.

З а м е ч а н и е. Отметим три основных недостатка метода Ритца при решении нелинейных задач. Во-первых, трудность построения координатных функций, удовлетворяющих заданным граничным условиям, при сколь-нибудь сложной форме области. Во-вторых, трудоёмкость составления системы Ритца, связанная с тем, что коэффициенты этой системы обычно выражаются через некоторые интегралы. В-третьих, численное решение системы Ритца, вообще говоря, нелинейной относительно $c_1^{(m)}, \ldots, c_m^{(m)}$.

4°. **Численный эксперимент.** Следующий пример иллюстрирует одну из «слабых» сторон метода Ритца.

ПРИМЕР 1. (см. [9, стр. 339].) Найдём функцию, удовлетворяющую краевым условиям

$$x(0) = 1, \quad x(1) = 0$$

и доставляющую минимум интегралу

$$I(x) = \int_0^1 \left[\frac{(x')^4}{48} + (x')^2 + x^2 - 6x \right] dt.$$

Известно точное решение $x^*(t) = 1 - t^2$, $I(x^*) = -\frac{31}{15} \approx -2{,}0666666$.

В [9] предлагается выбрать координатные функции вида

$$\psi_k(t) := \sin[(2k-1)\pi t], \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Очевидно, что они удовлетворяют условию $\psi_k(0) = \psi_k(1) = 0$. В качестве функции $\widetilde{x}(t)$ (см. (14)), положим

$$\widetilde{x}(t) = 1 - t.$$

Покажем, как строится приближение пятого порядка:

$$x_5(t) = 1 - t + \sum_{k=1}^{5} c_k \sin[(2k-1)\pi t].$$

Подставив x_5 в функционал $I(x)$ (см. (15)), получим

$$\begin{aligned}
&P(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) := I(x_5) = \\
= \; & \frac{1}{8064\,\pi} \Big[63\,\pi^5 {c_1}^4 + 252\,\pi^5 {c_1}^3 c_2 + 2268\,\pi^5 {c_1}^2 {c_2}^2 + 3780\,\pi^5 {c_1}^2 c_2 c_3 + \\
+ \; & 6300\,\pi^5 {c_1}^2 {c_3}^2 + 8820\,\pi^5 {c_1}^2 c_3 c_4 + 12348\,\pi^5 {c_1}^2 {c_4}^2 + 15876\,\pi^5 {c_1}^2 c_4 c_5 + \\
+ \; & 20412\,\pi^5 {c_1}^2 {c_5}^2 + 11340\,\pi^5 c_1 {c_2}^2 c_3 + 15876\,\pi^5 c_1 {c_2}^2 c_4 + 52920\,\pi^5 c_1 c_2 c_3 c_4 + \\
+ \; & 68040\,\pi^5 c_1 c_2 c_3 c_5 + 95256\,\pi^5 c_1 c_2 c_4 c_5 + 56700\,\pi^5 c_1 {c_3}^2 c_5 + 5103\,\pi^5 {c_2}^4 + \\
+ \; & 20412\,\pi^5 {c_2}^3 c_5 + 56700\,\pi^5 {c_2}^2 {c_3}^2 + 111132\,\pi^5 {c_2}^2 {c_4}^2 + 183708\,\pi^5 {c_2}^2 {c_5}^2 + \\
+ \; & 132300\,\pi^5 c_2 {c_3}^2 c_4 + 476280\,\pi^5 c_2 c_3 c_4 c_5 + 39375\,\pi^5 {c_3}^4 + 308700\,\pi^5 {c_3}^2 {c_4}^2 + \\
+ \; & 510300\,\pi^5 {c_3}^2 {c_5}^2 + 555660\,\pi^5 c_3 {c_4}^2 c_5 + 151263\,\pi^5 {c_4}^4 + 1000188\,\pi^5 {c_4}^2 {c_5}^2 + \\
+ \; & 413343\,{c_5}^4 \pi^5 + 4536\,\pi^3 {c_1}^2 + 40824\,\pi^3 {c_2}^2 + 113400\,\pi^3 {c_3}^2 + 222264\,\pi^3 {c_4}^2 + \\
+ \; & 367416\,{c_5}^2 \pi^3 + 4032\,\pi\, {c_1}^2 + 4032\,\pi\, {c_2}^2 + 4032\,\pi\, {c_3}^2 + 4032\,\pi\, {c_4}^2 + \\
+ \; & 4032\,{c_5}^2 \pi - 13272\,\pi - 80640\,c_1 - 26880\,c_2 - 16128\,c_3 - 11520\,c_4 - 8960\,c_5 \Big].
\end{aligned}$$

Составим систему Ритца. Приравняем нулю частные производные функции P по переменным c_j, $j = 1:5$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial c_1} &= \frac{1}{8064\,\pi}\Big[252\,\pi^5{c_1}^3 + 756\,\pi^5{c_1}^2c_2 + 4536\,\pi^5c_1{c_2}^2 + \\
&+ 7560\,\pi^5c_1c_2c_3 + 12600\,\pi^5c_1{c_3}^2 + 17640\,\pi^5c_1c_3c_4 + 24696\,\pi^5c_1{c_4}^2 + \\
&+ 31752\,\pi^5c_1c_4c_5 + 40824\,\pi^5c_1{c_5}^2 + 11340\,\pi^5{c_2}^2c_3 + 15876\,\pi^5{c_2}^2c_4 + \\
&+ 52920\,\pi^5c_2c_3c_4 + 68040\,\pi^5c_2c_3c_5 + 95256\,\pi^5c_2c_4c_5 + 56700\,\pi^5{c_3}^2c_5 + \\
&+ 9072\,\pi^3c_1 + 8064\,\pi\,c_1 - 80640\Big] = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial c_2} &= \frac{1}{8064\,\pi}\Big[252\,\pi^5{c_1}^3 + 4536\,\pi^5{c_1}^2c_2 + 3780\,\pi^5{c_1}^2c_3 + 22680\,\pi^5c_1c_2c_3 + \\
&+ 31752\,\pi^5c_1c_2c_4 + 52920\,\pi^5c_1c_3c_4 + 68040\,\pi^5c_1c_3c_5 + 95256\,\pi^5c_1c_4c_5 + \\
&+ 20412\,\pi^5{c_2}^3 + 61236\,\pi^5{c_2}^2c_5 + 113400\,\pi^5c_2{c_3}^2 + 222264\,\pi^5c_2{c_4}^2 + \\
&+ 367416\,\pi^5c_2{c_5}^2 + 132300\,\pi^5{c_3}^2c_4 + 476280\,\pi^5c_3c_4c_5 + 81648\,\pi^3c_2 + \\
&+ 8064\,\pi\,c_2 - 26880\Big] = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial c_3} &= \frac{1}{8064\,\pi}\Big[3780\,\pi^5{c_1}^2c_2 + 12600\,\pi^5{c_1}^2c_3 + 8820\,\pi^5{c_1}^2c_4 + 11340\,\pi^5c_1{c_2}^2 + \\
&+ 52920\,\pi^5c_1c_2c_4 + 68040\,\pi^5c_1c_2c_5 + 113400\,\pi^5c_1c_3c_5 + 113400\,\pi^5{c_2}^2c_3 + \\
&+ 264600\,\pi^5c_2c_3c_4 + 476280\,\pi^5c_2c_4c_5 + 157500\,\pi^5{c_3}^3 + 617400\,\pi^5c_3{c_4}^2 + \\
&+ 1020600\,\pi^5c_3{c_5}^2 + 555660\,\pi^5{c_4}^2c_5 + 226800\,\pi^3c_3 + 8064\,c_3\pi - 16128\Big] = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial c_4} &= \frac{1}{8064\,\pi}\Big[8820\,\pi^5{c_1}^2c_3 + 24696\,\pi^5{c_1}^2c_4 + 15876\,\pi^5{c_1}^2c_5 + 15876\,\pi^5c_1{c_2}^2 + \\
&+ 52920\,\pi^5c_1c_2c_3 + 95256\,\pi^5c_1c_2c_5 + 222264\,\pi^5{c_2}^2c_4 + 132300\,\pi^5c_2{c_3}^2 + \\
&+ 476280\,\pi^5c_2c_3c_5 + 617400\,\pi^5{c_3}^2c_4 + 1111320\,\pi^5c_3c_4c_5 + 605052\,\pi^5{c_4}^3 + \\
&+ 2000376\,\pi^5c_4{c_5}^2 + 444528\,\pi^3c_4 + 8064\,\pi\,c_4 - 11520\Big] = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial c_5} &= \frac{1}{8064\,\pi}\Big[15876\,\pi^5{c_1}^2c_4 + 40824\,\pi^5{c_1}^2c_5 + 68040\,\pi^5c_1c_2c_3 + \\
&+ 95256\,\pi^5c_1c_2c_4 + 56700\,\pi^5c_1{c_3}^2 + 20412\,\pi^5{c_2}^3 + 367416\,\pi^5{c_2}^2c_5 + \\
&+ 476280\,\pi^5c_2c_3c_4 + 1020600\,\pi^5{c_3}^2c_5 + 555660\,\pi^5c_3{c_4}^2 + 2000376\,\pi^5{c_4}^2c_5 + \\
&+ 1653372\,\pi^5{c_5}^3 + 734832\,\pi^3c_5 + 8064\,\pi\,c_5 - 8960\Big] = 0.
\end{aligned}$$

Далее, эта нелинейная система в [9] решалась методом Ньютона – Канторовича с начальным приближением

$$c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c_5 = 0.$$

Приведём результаты третьего приближения:

$$x_5(t) = 1 - t + \sum_{k=1}^{5} c_k \sin[(2k-1)\pi t],$$

где $c_1 = 0{,}25801628$; $c_2 = 0{,}00956007$; $c_3 = 0{,}00206907$; $c_4 = 0{,}00075838$; $c_5 = 0{,}00036394$. Отметим, что

$$\|x_5 - x^*\| = 1{,}78 \cdot 10^{-4}, \quad \|x_5' - z^*\| = 7{,}33 \cdot 10^{-2}, \quad I(x_5) = -2{,}066601195.$$

Решим этот же пример методом гиподифференциального спуска. Пусть штрафной параметр λ равен 100 и точность вычислений $\varepsilon = 10^{-4}$.

В качестве начального приближения выберем $z_0(t) \equiv -1$. Приведём результаты счёта. На первом шаге по формуле (11) имеем

$$q_2^*(t, z_0) = t^2 + 4t - \frac{7}{3}, \qquad \|q_2^*(t, z_0)\| = 1{,}4453 > \varepsilon.$$

Условие останова не выполнено, поэтому переходим к поиску β_0 — величины шага спуска в направлении g_0 (см. (10)). Так как z_0 — допустимая точка, т. е. удовлетворяет краевым условиям, то, согласно работе [10], для всех β функции (одной переменной) $\Phi_\lambda(z_0 - \beta g_0)$ и $f(z_0 - \beta g_0)$ равны, при этом

$$f(z_0 - \beta g_0) = \frac{3743}{22680}\beta^4 + \frac{197}{5670}\beta^3 + \frac{9671}{3780}\beta^2 - \frac{94}{45}\beta - \frac{79}{48}.$$

В связи с тем, что градиент данной функции равен нулю в единственной (вещественной) точке $\beta_0^* = 0{,}396958$, она и будет точкой минимума. Получили следующее приближение

$$z_1(t) = -0{,}396952\, t^2 - 1{,}587808\, t - 0{,}0737786.$$

Приближения, полученные с помощью МГС.

k	I	$\|g_k\|$	$\|z_k - z^*\|$	$\|x_k - x^*\|$
0	$-1{,}64583333$	1,4453	0,57735	0,18257
1	$-2{,}06561147$	0,0713	0,02991	$4{,}7 \cdot 10^{-3}$
2	$-2{,}06664366$	0,0107	$4{,}3 \cdot 10^{-3}$	$8{,}8 \cdot 10^{-4}$
3	$-2{,}06666606$	$1{,}6 \cdot 10^{-3}$	$7{,}2 \cdot 10^{-4}$	$9{,}6 \cdot 10^{-5}$

Из таблицы видно, что уже на третьем шаге результаты лучше, чем приближение, полученное методом Ритца.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ерёмин И.И. *Метод «штрафов» в выпуклом программировании* // Доклады АН СССР, 1967. Т. 143, № 4. С. 748–751.

2. Di Pillo G., Facchinei F. *Exact penalty functions for nondifferentiable programming problems*, in Nonsmooth Optimization and Related Topics, F. Clarke, V. F. Demyanov, and F. Giannessi, eds., Plenum Press, New York, 1989, pp. 89–107.

3. Демьянов В. Ф. *Точные штрафные функции в задачах негладкой оптимизации* // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1, 1994. Вып. 4 (№ 22). С. 21–27.

4. Demyanov V. F., Di Pillo G., Facchinei F. *Exact penalization via Dini and Hadamard conditional derivatives* // Optim. Methods Softw, 1998. vol. 9, no. 1–3. pp. 19–36.

5. Демьянов В. Ф. *Условия экстремума и вариационное исчисление.* М.: Высшая школа, 2005. 335 с.

6. Долгополик М. В. *Точные штрафные функции в негладкой оптимизации* [Электронный ресурс] // Семинар «CNSA & NDO» [Официальный сайт]. Избранные доклады. 8.05.2014. URL: `http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/pdf/DolgopolikM_ExactPenalty.pdf` (дата обращения: 6.11.2014).

7. Долгополик М. В. *Обзор по точным штрафным функциям* [Электронный ресурс] // Семинар «CNSA & NDO» [Официальный сайт]. Избранные доклады. 2.10.2014. URL: `http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/pdf/DolgopolikMV_2Oct2014.pdf` (дата обращения: 24.11.2014).

8. Демьянов В. Ф., Рубинов А. М. *Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление.* М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. 432 с.

9. Михлин С. Г. *Численная реализация вариационных методов.* М.: Наука, 1966. 432 с.

10. Долгополик М.В., Тамасян Г.Ш. *Об эквивалентности методов наискорейшего и гиподифференциального спусков в некоторых задачах условной оптимизации* // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14, вып. 4, ч. 2, с. 532-542.