НЕРАВЕНСТВА И ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ*

В. Н. Малозёмов

malv@math.spbu.ru

4 сентября 2014 г.

Аннотация. Доклад посвящён элементарным методам в экстремальных задачах.

1°. Рассмотрим несколько конкретных экстремальных задач.

ЗАДАЧА 1. *Найти прямоугольный параллелепипед наибольшего объёма при заданной площади его поверхности.*

Эта задача легко формализуется. Пусть x_1, x_2, x_3 — длины рёбер параллелепипеда. Требуется максимизировать функцию

$$V(x) = x_1x_2x_3$$

при ограничениях

$$\begin{gathered} a(x) := x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 - p = 0, \\ x_1 > 0,\ x_2 > 0,\ x_3 > 0. \end{gathered}$$

Здесь $p > 0$ — половина площади поверхности параллелепипеда.

Имеем задачу на условный экстремум. Согласно общим рекомендациям [1, с. 609–624] составим функцию Лагранжа

$$L(x, \lambda) = x_1x_2x_3 - \lambda(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 - p)$$

и запишем необходимые условия экстремума

$$L'_{x_1}(x, \lambda) := x_2x_3 - \lambda(x_2 + x_3) = 0, \tag{1}$$
$$L'_{x_2}(x, \lambda) := x_1x_3 - \lambda(x_1 + x_3) = 0, \tag{2}$$
$$L'_{x_3}(x, \lambda) := x_1x_2 - \lambda(x_1 + x_2) = 0, \tag{3}$$
$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = p. \tag{4}$$

*Семинар по конструктивному негладкому анализу и недифференцируемой оптимизации «CNSA & NDO»: `http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/`

Нужно найти решение этой системы с положительными x_1, x_2, x_3.

Ясно, что $\lambda \neq 0$. Согласно (1) и (2),

$$\frac{x_2 + x_3}{x_2 x_3} = \frac{x_1 + x_3}{x_1 x_3},$$

откуда следует, что $x_1 = x_2$. Согласно (2) и (3),

$$\frac{x_1 + x_3}{x_1 x_3} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2},$$

откуда следует, что $x_2 = x_3$. Значит, $x_1 = x_2 = x_3$. На основании (4) получаем

$$x_1^* = x_2^* = x_3^* = \sqrt{\tfrac{p}{3}}.$$

При этом

$$\lambda^* = \frac{x_2^* x_3^*}{x_2^* + x_3^*} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{p}{3}}.$$

Точка $x^* = (x_1^*,\ x_2^*,\ x_3^*)$ является стационарной. Покажем, что она удовлетворяет достаточному условию строгого локального максимума. Для этого найдём матрицу вторых производных функции Лагранжа

$$L''_{xx}(x^*, \lambda^*) = \begin{pmatrix} 0 & x_3^* - \lambda^* & x_2^* - \lambda^* \\ x_3^* - \lambda^* & 0 & x_1^* - \lambda^* \\ x_2^* - \lambda^* & x_1^* - \lambda^* & 0 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{p}{3}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

и запишем формулу для второго дифференциала

$$\big\langle L''_{xx}(x^*, \lambda^*)h,\ h\big\rangle = \sqrt{\tfrac{p}{3}}(h_1 h_2 + h_1 h_3 + h_2 h_3).$$

Нужно проверить, что второй дифференциал принимает отрицательные значения на всех ненулевых векторах h, удовлетворяющих ограничению

$$\big\langle a'(x^*), h\big\rangle = 0,$$

которое в данном случае принимает вид

$$2\ \sqrt{\tfrac{p}{3}}(h_1 + h_2 + h_3) = 0.$$

Имеем

$$0 = \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{p}{3}}(h_1 + h_2 + h_3)^2 = \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{p}{3}}(h_1^2 + h_2^2 + h_3^2) + \big\langle L''_{xx}(x^*, \lambda^*)h,\ h\big\rangle,$$

откуда следует, что

$$\big\langle L''_{xx}(x^*, \lambda^*)h,\ h\big\rangle = -\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{p}{3}}(h_1^2 + h_2^2 + h_3^2) < 0.$$

Таким образом, теория условного экстремума позволила установить, что в задаче о прямоугольном параллелепипеде наибольшего объёма при заданной площади его поверхности точка x^* с равными компонентами (что соответствует кубу) является точкой строгого локального максимума.

2°. Остаётся вопрос: будет ли x^* точкой *глобального* максимума? Теория условного экстремума не даёт ответа на этот вопрос («молчит наука»). Удивительно, но разобраться в данной ситуации помогает «совсем простая штука» — неравенство Коши между средним геометрическим и средним арифметическим положительных чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$, которое записывается так:

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}. \tag{5}$$

Неравенство (5) выполняется как равенство только тогда, когда $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

В книге О. А. Иванова [2, с. 67–70] приводится пять доказательств неравенства Коши. На самом деле, их значительно больше. Одно из наиболее изящных доказательств будет представлено в Приложении 1.

Вернёмся к задаче о прямоугольном параллелепипеде. Согласно (5) при $n = 3$ и (4) имеем

$$V^2(x) = (x_1x_2)(x_2x_3)(x_3x_1) \leqslant \left(\frac{x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1}{3}\right)^3 = \left(\frac{p}{3}\right)^3,$$

так что

$$V(x) \leqslant \left(\frac{p}{3}\right)^{3/2}.$$

Это неравенство выполняется как равенство только тогда, когда $x_1x_2 = x_2x_3 = x_3x_1$, то есть только при $x_1^* = x_2^* = x_3^* = \sqrt{\frac{p}{3}}$. В точке $x^* = (x_1^*,\ x_2^*,\ x_3^*)$ достигается максимальное значение функции $V(x)$, равное $(\frac{p}{3})^{3/2}$, и x^* — единственная точка, удовлетворяющая ограничениям задачи, с таким свойством. Значит, x^* — единственная точка глобального максимума.

3°. Рассмотрим ещё две экстремальные задачи, при решении которых можно эффектно использовать неравенство Коши.

ЗАДАЧА 2. *Среди треугольников, имеющих заданный периметр $2p$, найти треугольник с наибольшей площадью.*

Решение. Для площади треугольника справедлива формула Герона

$$S(x) = \sqrt{p(p - x_1)(p - x_2)(p - x_3)}.$$

Здесь x_1, x_2, x_3 — длины сторон треугольника и $x = (x_1,\ x_2,\ x_3)$. Требуется максимизировать $S(x)$ при ограничениях

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2p,$$
$$0 < x_i < p, \quad i \in 1:3.$$

В силу неравенства Коши (5) имеем

$$S^2(x) = p\big[(p - x_1)(p - x_2)(p - x_3)\big] \leqslant p(\tfrac{p}{3})^3,$$

так что

$$S(x) \leqslant \frac{p^2}{3\sqrt{3}}.$$

Это неравенство выполняется как равенство только тогда, когда $p - x_1 = p - x_2 = p - x_3$, то есть только при $x_1^* = x_2^* = x_3^* = \frac{2}{3}p$. Значит, единственным решением задачи 2 является равносторонний треугольник.

В следующей задаче ответ не столь очевиден.

ЗАДАЧА 3. *Лист бумаги имеет форму круга. Из него вырежем сектор с углом φ радиан, а края оставшейся части склеим. Получим боковую поверхность прямого кругового конуса, длина образующей которого равна радиусу круга R. Требуется найти угол φ, порождающий конус наибольшего объёма.*

Решение. Длина дуги вырезанного сектора равна φR, так что длина окружности, лежащей в основании конуса, равна $2\pi R - \varphi R$. Обозначим через r радиус данной окружности. Тогда $2\pi r = 2\pi R - \varphi R$ и

$$\varphi = 2\pi(1 - \tfrac{r}{R}). \tag{6}$$

Высота конуса h равна $\sqrt{R^2 - r^2}$, а его объём выражается формулой

$$V(r) = \tfrac{1}{3}\pi r^2 h = \tfrac{1}{3}\pi r^2\sqrt{R^2 - r^2}.$$

В силу неравенства Коши (5) имеем

$$V^2(r) = \tfrac{4}{9}\pi^2\big[\tfrac{r^2}{2} \cdot \tfrac{r^2}{2} \cdot (R^2 - r^2)\big] \leqslant \tfrac{4}{9}\pi^2(\tfrac{R^2}{3})^3.$$

Значит,

$$V(r) \leqslant \frac{2\sqrt{3}}{27}\pi R^3.$$

Это неравенство выполняется как равенство только тогда, когда $\frac{r^2}{2} = R^2 - r^2$, то есть только при $r^* = \sqrt{\frac{2}{3}}R$. Принимая во внимание соотношение (6), приходим к заключению: задача 3 имеет единственное решение

$$\varphi^* = 2\pi(1 - \sqrt{\tfrac{2}{3}}).$$

4°. При решении экстремальных задач наряду с неравенством Коши используется неравенство Коши-Буняковского:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{1/2}. \tag{7}$$

Если не все x_i и не все y_i равны нулю, то неравенство (7) выполняется как равенство только тогда, когда $y_i = \lambda x_i$, $i \in 1 : n$, при некотором $\lambda > 0$.

Следствием неравенства Коши-Буняковского является неравенство между средним арифметическим и средним квадратичным положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \leqslant \left(\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n}\right)^{1/2}. \tag{8}$$

Неравенство (8) выполняется как равенство только тогда, когда $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Оригинальное доказательство этих утверждений мы приведём в Приложении 2. А пока рассмотрим три конкретных задачи.

ЗАДАЧА 4. *Найти наибольшее и наименьшее значения линейной формы*

$$f(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n,$$

в которой не все коэффициенты c_i равны нулю, при ограничении

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1. \tag{9}$$

Р е ш е н и е. Согласно (7) для любого вектора $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, удовлетворяющего ограничению (9), имеем

$$f(x) \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} c_i^2\right)^{1/2} =: \|c\|.$$

Равенство достигается только тогда, когда $x_i = \lambda c_i$, $i \in 1 : n$, при некотором $\lambda > 0$. В силу (9), $\lambda = \frac{1}{\|c\|}$ и

$$x_i^* = \tfrac{c_i}{\|c\|}, \quad i \in 1 : n.$$

Получили, что вектор $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ является единственной точкой максимума функции $f(x)$ при ограничении (9).

Далее запишем

$$-f(x) = (-c_1)x_1 + (-c_2)x_2 + \ldots + (-c_n)x_n.$$

Аналогично предыдущему для любого вектора x, удовлетворяющего ограничению (9), получим $-f(x) \leqslant A$ или $f(x) \geqslant -A$, причём равенство достигается только тогда, когда $x_i = \lambda(-c_i)$, $i \in 1 : n$, при некотором $\lambda > 0$. Отсюда легко приходим к выводу о том, что вектор $-x^*$ является единственной точкой минимума функции $f(x)$ при ограничении (9).

ЗАДАЧА 5. *Найти наименьшее значения квадратичной функции*

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$$

при ограничении

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \geqslant b, \tag{10}$$

где не все коэффициенты a_i равны нулю.

Р е ш е н и е. При $b \leqslant 0$ очевидной точкой минимума является нулевой вектор x. Поэтому будем считать, что $b > 0$.

Согласно неравенствам (10) и (7) имеем

$$0 < b \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}.$$

Отсюда следует, что

$$f(x) \geqslant (\tfrac{b}{\|a\|})^2.$$

Равенство достигается только тогда, когда

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b$$

и

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}.$$

Это соответствует тому, что $x_i = \lambda a_i$, $i \in 1 : n$, при некотором $\lambda > 0$ и

$$\lambda \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = b.$$

Получаем

$$\lambda = \tfrac{b}{\|a\|^2} \quad \text{и} \quad x_i^* = \tfrac{ba_i}{\|a\|^2},\ i \in 1 : n.$$

Вектор $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ при $b > 0$ является единственной точкой минимума квадратичной функции $f(x)$ на полупространстве, определяемом неравенством (10).

ЗАДАЧА 6. *Обозначим через x_1, x_2, x_3 длины сторон треугольника. Найти наименьшее значение величины*

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

при условии, что площадь треугольника равна S.

Решение. Положим $p = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + x_3)$. На основании формулы Герона для площади треугольника и неравенств (5), (8) для средних величин получаем

$$S^2 = p\big[(p - x_1)(p - x_2)(p - x_3)\big] \leqslant p(\tfrac{p}{3})^3 = 3(\tfrac{p}{3})^4 = \\ = \frac{3}{16}\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right)^4 \leqslant \frac{3}{16}\left(\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{3}\right)^2. \qquad (11)$$

Отсюда следует, что

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \geqslant (4\sqrt{3})S.$$

Равенство в этом неравенстве достигается только тогда, когда оба неравенства в (11) выполняются как равенства. А это возможно только при $x_1 = x_2 = x_3$.

Приходим к заключению: наименьшее значение величины $x_1^2+x_2^2+x_3^2$ равно $(4\sqrt{3})S$ и достигается на равностороннем треугольнике.

5°. Вернёмся к задаче 1 о прямоугольном параллелепипеде наибольшего объёма. Было установлено, что в этой задаче имеется единственная стационарная точка $x^* = (x_1^*,\ x_2^*,\ x_3^*)$ с равными компонентами $x_1^* = x_2^* = x_3^* = \sqrt{\frac{p}{3}}$. То, что x^* является точкой глобального максимума, можно выяснить с помощью соображений, отличных от приведённых в п. 2°. Достаточно доказать, что в задаче 1 максимизации функции $V(x)$ на множестве планов Ω точка максимума $\hat{x}$ существует и ограничение в ней регулярно. Тогда согласно теории условного экстремума точка $\hat{x}$ будет стационарной, а поскольку стационарная точка единственна, это x^*, то необходимо $x^* = \hat{x}$.

Покажем, что точка максимума $\hat{x}$ существует[1]. Отягчающим обстоятельством является неограниченность множества планов Ω. Этому множеству принадлежат, например, точки

$$x^{(n)} = \big(n,\ \tfrac{p}{2n},\ \tfrac{pn}{2n^2+p}\big), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Вместе с тем, справедливо следующее утверждение: если для плана $x \in \Omega$ выполняется неравенство

$$\|x\|_\infty := \max\{x_1, x_2, x_3\} \geqslant N,$$

[1] Доказательство предложил М. В. Долгополик.

то
$$V(x) \leqslant \tfrac{p^2}{N}. \tag{12}$$
Действительно, пусть, например, $x_1 \geqslant N$. В силу ограничения (4) имеем $x_1 x_2 \leqslant p$, $x_1 x_3 \leqslant p$, так что
$$V(x) \leqslant (x_1 x_2)(x_1 x_3)\tfrac{1}{x_1} \leqslant \tfrac{p^2}{N}.$$

Введём обозначение
$$\mu = \sup_{x \in \Omega} V(x).$$
Ясно, что $\mu > 0$. Возьмём максимизирующую последовательность планов $x^{(k)} \in \Omega$, для которых
$$\lim_{k \to \infty} V(x^{(k)}) = \mu. \tag{13}$$
Последовательность $\{x^{(k)}\}$ ограничена. В противном случае найдётся подпоследовательность $\{x^{(k_j)}\}$, такая, что $\|x^{(k_j)}\|_\infty \to +\infty$ при $k_j \to \infty$. Согласно (12),
$$V(x^{(k_j)}) \to 0 \quad \text{при} \quad k_j \to \infty,$$
что противоречит (13) и условию $\mu > 0$.

Выделим из последовательности $\{x^{(k)}\}$ сходящуюся подпоследовательность. Можно считать, что вся последовательность $\{x^{(k)}\}$ сходится при $k \to \infty$ к некоторой точке $\hat{x}$. В пределе получаем
$$V(\hat{x}) = \lim_{k \to \infty} V(x^{(k)}) = \mu,$$
то есть
$$V(\hat{x}) = \mu. \tag{14}$$
К этому нужно добавить, что $\hat{x}$ принадлежит Ω, так как согласно (14) все компоненты вектора $\hat{x}$ положительны, а ограничение (4) при $x = \hat{x}$ выполняется из соображений непрерывности.

Таким образом, установлено, что у задачи 1 точка максимума $\hat{x}$ существует. Ограничение в ней регулярно в силу того, что градиент
$$a'(\hat{x}) = (\hat{x}_2 + \hat{x}_3, \hat{x}_1 + \hat{x}_3, \hat{x}_1 + \hat{x}_2)$$
отличен от нулевого вектора.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Доказательство неравенства Коши

Начнём со вспомогательного утверждения.

ЛЕММА 1. *Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — положительные числа, не равные между собой, и*

$$x_1 x_2 \ldots x_n = 1. \tag{15}$$

Тогда

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n > n.$$

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции.

При $n = 2$ имеем $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $x_1 \neq x_2$ и $x_1 x_2 = 1$, поэтому

$$0 < (x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 4.$$

Отсюда следует, что $x_1 + x_2 > 2$.

Сделаем индукционный переход от n к $n+1$. Возьмём $n+1$ положительных чисел $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}$, которые не все равны между собой и удовлетворяют условию

$$x_1 \ldots x_n x_{n+1} = 1.$$

Ясно, что среди них существует число, меньшее единицы, и число, большее единицы. Пусть для определённости $x_n < 1$, $x_{n+1} > 1$. Тогда

$$(1 - x_n)(x_{n+1} - 1) > 0$$

и

$$x_n x_{n+1} < x_n + x_{n+1} - 1. \tag{16}$$

Рассмотрим n положительных чисел $x_1, \ldots, x_{n-1}, (x_n x_{n+1})$, произведение которых равно единице. Если не все они равны между собой, то по индукционному предположению

$$x_1 + \ldots + x_{n-1} + (x_n x_{n+1}) > n. \tag{17}$$

Если же $x_1 = \ldots = x_{n-1} = (x_n x_{n+1}) = 1$ (это возможно, например, при $x_1 = \ldots = x_{n-1} = 1$, $x_n = \frac{1}{2}$, $x_{n+1} = 2$), то строгое неравенство (17) нужно заменить равенством. В обоих случаях

$$x_1 + \ldots + x_{n-1} + (x_n x_{n+1}) \geqslant n.$$

С учётом (16) получаем

$$x_1 + \ldots + x_{n-1} + x_n + x_{n+1} - 1 > n,$$

что равносильно требуемому. □

Теперь легко доказать неравенство Коши. Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n$ — положительные числа, не все равные между собой. Обозначим

$$y_i = \frac{x_i}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}}, \quad i \in 1:n.$$

Числа y_i положительные, не все равные между собой и $y_1 y_2 \dots y_n = 1$. По лемме $y_1 + y_2 + \dots + y_n > n$, что равносильно неравенству

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} > \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}. \tag{18}$$

Если все x_i равны между собой (и только в этом случае) строгое неравенство (18) нужно заменить равенством.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Доказательство неравенства Коши-Буняковского

Введём обозначения

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad y = (y_1, y_2, \dots, y_n),$$
$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \quad \|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} = \sqrt{\langle x, x\rangle}.$$

ЛЕММА 2. *Для ненулевых векторов x, y справедливо равенство Коши-Буняковского* [2]

$$\langle x, y\rangle = \Big(1 - \tfrac{1}{2}\Big\|\tfrac{x}{\|x\|} - \tfrac{y}{\|y\|}\Big\|^2\Big)\|x\| \cdot \|y\|. \tag{19}$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда $\|x\| = \|y\| = 1$. Имеем

$$\|x-y\|^2 = \langle x-y, x-y\rangle = \|x\|^2 - 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 = 2 - 2\langle x, y\rangle.$$

Отсюда следует, что

$$\langle x, y\rangle = 1 - \tfrac{1}{2}\|x-y\|^2. \tag{20}$$

Если x, y — произвольные ненулевые векторы, то подставив в (20) $\frac{x}{\|x\|}$ и $\frac{y}{\|y\|}$ вместо x и y, придём к (19). □

[2] См. [3, с. 33].

Равенство (19) для ненулевых векторов x, y делает очевидными как неравенство Коши-Буняковского

$$\langle x, y\rangle \leqslant \|x\| \cdot \|y\|, \tag{21}$$

так и условие обращения его в равенство

$$\tfrac{x}{\|x\|} = \tfrac{y}{\|y\|}. \tag{22}$$

Условие (22) равносильно тому, что $y = \lambda x$ при некотором $\lambda > 0$.

Положив в (21) $y_i = \frac{1}{n}$, $i \in 1 : n$, придём к неравенству между средним арифметическим и средним квадратичным положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \leqslant \left(\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n}\right)^{1/2}. \tag{23}$$

Равенство в (23) достигается только тогда, когда $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зорич В. А. *Математический анализ.* Часть 1. Изд-е 4-е. М.: МЦНМО, 2002. 664 с.

2. Иванов О. А. *Избранные главы элементарной математики.* СПб.: Изд-во СПбГУ, 1995. 224 с.

3. Малозёмов В. Н. *Линейная алгебра без определителей. Квадратичная функция.* СПб.: Изд-во СПбГУ, 1997. 80 с.