ЧТО ДАЁТ ИНФОРМАЦИЯ ОБ АЛЬТЕРНАНСЕ?*

В. Н. Малозёмов

malv@math.spbu.ru

28 августа 2014 г.

Аннотация. В задачах о наименьшем уклонении от нуля, связанных с алгебраическими полиномами, информация об альтернансе позволяет записать дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет оптимальный полином.

1°. Пусть $n \geqslant 2$ — натуральное число и

$$P(A, x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$$

— алгебраический полином степени n со старшим коэффициентом, равным единице. Здесь $A = (a_1, \ldots, a_n)$ — вектор коэффициентов. Простейшая задача о наименьшем уклонении от нуля (задача П. Л. Чебышёва) ставится так:

$$\varphi(A) := \max_{x \in [-1,1]} \bigl| P(A, x) \bigr| \to \min_A .$$

Решение этой задачи существует и единственно. Обозначим его A^*, и пусть $L = \varphi(A^*)$. Полином $T_n(x) = P(A^*, x)$ называется полиномом, наименее уклоняющимся от нуля на отрезке $[-1, 1]$.

Полином $T_n(x)$ характеризуется следующим свойством (см., например, [1, глава 2]): существуют $(n + 1)$ точки

$$-1 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1, \tag{1}$$

в которых

$$\begin{aligned} \bigl| T_n(x_i) \bigr| &= L, \quad i \in 0 : n; \\ T_n(x_i) &= -T_n(x_{i-1}), \quad i \in 1 : n. \end{aligned} \tag{2}$$

Говорят, что точки (1) со свойством (2) образуют *полный альтернанс*. В него входят граничные точки отрезка $[-1, 1]$, $x_0 = -1$ и $x_n = 1$, и внутренние точки локального экстремума $x_1, \ldots, x_{n-1}$. Очевидно, что $T_n'(x_i) = 0$ при

*Семинар по конструктивному негладкому анализу и недифференцируемой оптимизации «CNSA & NDO»: `http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/`

$i \in 1 : n-1$ и этими точками исчерпываются все нули производной $T_n'(x)$. Значит,

$$T_n'(x) = n(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}). \tag{3}$$

Положим

$$Q_{2n}(x) = L^2 - T_n^2(x).$$

Согласно (2), точки альтернанса (1) являются нулями полинома $Q_{2n}(x)$. Так как $Q_{2n}'(x) = -2T_n(x)T_n'(x)$, то внутренние точки альтернанса будут двойными нулями. Всего получаем $2(n-1) + 2 = 2n$ нулей с учётом их кратности. Ими исчерпываются все нули полинома $Q_{2n}(x)$. Значит,

$$Q_{2n}(x) = (1 - x^2)(x - x_1)^2 \dots (x - x_{n-1})^2.$$

После извлечения квадратного корня придём к формуле

$$\sqrt{L^2 - T_n^2(x)} = \sqrt{1 - x^2}\ \big|(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})\big|, \quad x \in [-1, 1].$$

При $x \in (x_{n-1}, 1)$ согласно (3) получим

$$\sqrt{L^2 - T_n^2(x)} = \sqrt{1 - x^2}\ (x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) = \tfrac{1}{n}\sqrt{1 - x^2}\ T_n'(x)$$

или

$$\frac{T_n'(x)}{\sqrt{L^2 - T_n^2(x)}} = \frac{n}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad x \in (x_{n-1}, 1).$$

Отметим, что $T_n(1) = L$. Это связано с тем, что на полуоси $(x_{n-1}, +\infty)$ полином $T_n(x)$ изменяется строго монотонно и $T_n(x) \to +\infty$ при $x \to +\infty$.

Подведём итог.

ТЕОРЕМА 1. *Полином $T_n(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$\frac{y'(x)}{\sqrt{L^2 - y^2(x)}} = \frac{n}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad x \in (x_{n-1}, 1), \tag{4}$$

и начальному условию $y(1) = L$.

2°. Проинтегрируем дифференциальное уравнение (4) по отрезку $[x, 1-\varepsilon]$, где $x \in (x_{n-1}, 1)$ и $\varepsilon > 0$ — малое число, такое, что $x < 1 - \varepsilon$:

$$\int_x^{1-\varepsilon} \frac{dy}{\sqrt{L^2 - y^2}} = n \int_x^{1-\varepsilon} \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}.$$

Получим

$$-\arccos \frac{y(1-\varepsilon)}{L} + \arccos \frac{y(x)}{L} = n\big(-\arccos(1-\varepsilon) + \arccos x\big).$$

Перейдём в этом равенстве к пределу при $\varepsilon \to +0$. Приняв во внимание начальное условие $y(1) = L$, запишем

$$\arccos \frac{y(x)}{L} = n \arccos x.$$

Отсюда следует, что

$$y(x) = L \cos(n \arccos x), \quad x \in (x_{n-1}, 1).$$

В силу единственности решения

$$T_n(x) = L \cos(n \arccos x), \quad x \in (x_{n-1}, 1).$$

Функция $\cos(n \arccos x)$ на отрезке $[-1, 1]$ совпадает с алгебраическим полиномом степени n со старшим коэффициентом, равным 2^{n-1}. Значит, $L = \frac{1}{2^{n-1}}$ и

$$T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x). \tag{5}$$

Равенство (5) доказано для $x \in (x_{n-1}, 1)$, но оно верно при $x \in [-1, 1]$ в силу того, что в обеих его частях стоят алгебраические полиномы.

Таким образом, информация об альтернансе позволила получить явный вид решения задачи П. Л. Чебышёва.

3°. В Первой и Второй задачах Е. И. Золотарёва [2] основную роль играют полиномы $P_n(x) = P(A, x)$, имеющие на отрезке $[-1, 1]$ n-точечный альтернанс. Опишем множество таких полиномов.

Отметим, что все n точек альтернанса не могут быть внутренними точками отрезка $[-1, 1]$, так как иначе они были бы нулями производной $P_n'(x)$, являющейся полиномом $(n-1)$-й степени. Значит, среди точек альтернанса есть хотя бы одна точка, совпадающая с концом отрезка $[-1, 1]$. Возможны три случая:

$$\begin{aligned} &\text{(i)} \quad -1 = x_1 < x_2 < \ldots < x_n = 1, \\ &\text{(ii)} \quad -1 = x_1 < x_2 < \ldots < x_n < 1, \\ &\text{(iii)} \quad -1 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = 1. \end{aligned}$$

Сначала рассмотрим третий случай. Имеем

$$P_n'(x) = n(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1}). \tag{6}$$

Точки альтернанса $x_1, \ldots, x_n$ являются нулями полинома

$$Q_{2n}(x) = L^2 - P_n^2(x),$$

причём точки $x_1, \ldots, x_{n-1}$, лежащие внутри отрезка $[-1, 1]$, — двойными нулями. Учитывая, что $-L < P_n(-1) < L$, что на полуоси $(-\infty, x_1)$ полином $P_n(x)$ изменяется монотонно и что $P_n(x)$ стремится к $+\infty$ или к $-\infty$ при $x \to -\infty$, заключаем, что существует точка $x = \alpha$, $\alpha < -1$, в которой $Q_{2n}(\alpha) = 0$. Теперь перечислены все корни полинома $Q_{2n}(x)$ с учётом их кратности. Это позволяет записать представление

$$Q_{2n}(x) = (1-x)(x-\alpha)(x-x_1)^2 \ldots (x-x_{n-1})^2.$$

После извлечения квадратного корня придём к формуле

$$\sqrt{L^2 - P_n^2(x)} = \sqrt{(1-x)(x-\alpha)}\, \big|(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})\big|, \quad x \in [-1, 1].$$

При $x \in (x_{n-1}, 1)$ согласно (6) получим

$$\sqrt{L^2 - P_n^2(x)} = \sqrt{(1-x)(x-\alpha)}\, (x-x_1)\ldots(x-x_{n-1}) = \tfrac{1}{n}\sqrt{(1-x)(x-\alpha)}\, P_n'(x)$$

или

$$\frac{P_n'(x)}{\sqrt{L^2 - P_n^2(x)}} = \frac{n}{\sqrt{(1-x)(x-\alpha)}}, \quad x \in (x_{n-1}, 1).$$

Добавим, что $P_n(1) = L$. Таким образом, полином $P_n(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{y'(x)}{\sqrt{L^2 - y^2(x)}} = \frac{n}{\sqrt{(1-x)(x-\alpha)}}, \quad x \in (x_{n-1}, 1), \tag{7}$$

и начальному условию $y(1) = L$. Здесь $\alpha < -1$ — параметр.

Преобразуем правую часть уравнения (7). Имеем

$$(1-x)(x-\alpha) = \left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{1+\alpha}{2}\right)^2,$$

поэтому

$$\sqrt{(1-x)(x-\alpha)} = \frac{1-\alpha}{2}\sqrt{1 - \left(\frac{2x-\alpha-1}{1-\alpha}\right)^2}.$$

Для дальнейшего важно, что при $x \in [-1, 1]$ и $\alpha < -1$ выполняются неравенства

$$-1 < \frac{2x-\alpha-1}{1-\alpha} \leqslant 1.$$

Перепишем уравнение (7) в виде

$$\frac{y'(x)}{\sqrt{L^2 - y^2(x)}} = \frac{n}{\frac{1-\alpha}{2}\sqrt{1 - \left(\frac{2x-\alpha-1}{1-\alpha}\right)^2}}, \quad x \in (x_{n-1}, 1).$$

Проинтегрируем это уравнение по отрезку $[x, 1-\varepsilon]$, где $x \in (x_{n-1}, 1)$. Получим

$$\arccos \frac{y(t)}{L}\Big|_x^{1-\varepsilon} = n \arccos \frac{2t-\alpha-1}{1-\alpha}\Big|_x^{1-\varepsilon}.$$

Отсюда так же, как в п. 2°, следует, что

$$P_n(x) = L \cos\left(n \arccos \frac{2x-\alpha-1}{1-\alpha}\right), \quad x \in [-1, 1].$$

Согласно (5),

$$P_n(x) = L\ 2^{n-1} T_n\left(\frac{2x-\alpha-1}{1-\alpha}\right). \tag{8}$$

Старшие коэффициенты у полиномов $P_n(x)$ и $T_n(x)$ равны единице, поэтому необходимо

$$L\ 2^{n-1}\left(\frac{2}{1-\alpha}\right)^n = 1.$$

Приходим к окончательным формулам

$$L = \frac{1}{2^{n-1}}\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^n,$$
$$P_n(x) = \left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^n T_n\left(\frac{2x-\alpha-1}{1-\alpha}\right). \tag{9}$$

Точки альтернанса полинома Чебышёва $T_n(x)$ известны:

$$x_k^* = \cos\frac{(n-k)\pi}{n}, \quad k \in 0, 1, \ldots, n.$$

Положим

$$x_k = \frac{(1-\alpha)x_k^* + \alpha + 1}{2}.$$

Точка $x_0 = \alpha < -1$ не может быть точкой альтернанса полинома $P_n(x)$. Для того чтобы точки $x_1, \ldots, x_n$ образовывали n-точечный альтернанс со свойством (iii), необходимо выполнение неравенства $x_1 > -1$. Это приводит к дополнительному ограничению на параметр α,

$$\alpha > -\frac{3 + x_1^*}{1 - x_1^*},$$

где $x_1^* = -\cos\frac{\pi}{n}$. Напомним основное условие: $\alpha < -1$.

Подытожим полученные результаты.

ТЕОРЕМА 2. *Полином $P_n(x)$ степени n со старшим коэффициентом, равным единице, имеющий на отрезке $[-1,1]$ n-точечный альтернанс вида* (iii)*, допускает представление* (9)*, в котором α — свободный параметр, удовлетворяющий неравенствам*

$$-\frac{3+x_1^*}{1-x_1^*} < \alpha < -1, \quad x_1^* = -\cos\frac{\pi}{n}.$$

4°. Случай n-точечного альтернанса вида (ii) рассматривается аналогично. Имеем

$$P_n'(x) = n(x-x_2)\dots(x-x_n). \tag{10}$$

Точки альтернанса $x_1, x_2, \dots, x_n$ являются нулями полинома

$$Q_{2n}(x) = L^2 - P_n^2(x),$$

причём точки $x_2, \dots, x_n$, лежащие внутри отрезка $[-1,1]$, — двойными нулями. Учитывая, что $-L < P_n(1) < L$ и что на полуоси $(x_n, +\infty)$ полином $P_n(x)$ монотонно возрастает и стремится к $+\infty$ при $x \to +\infty$, заключаем, что существует точка α, $\alpha > 1$, в которой $Q_{2n}(\alpha) = 0$. Теперь перечислены все корни полинома $Q_{2n}(x)$ с учётом их кратности. Это позволяет записать представление

$$Q_{2n}(x) = (1+x)(\alpha-x)(x-x_2)^2\dots(x-x_n)^2.$$

После извлечения квадратного корня придём к формуле

$$\sqrt{L^2-P_n^2(x)} = \sqrt{(1+x)(\alpha-x)}\,\big|(x-x_2)\dots(x-x_n)\big|, \quad x \in [-1,1].$$

При $x \in (-1, x_2)$ согласно (10) получим

$$\begin{aligned}\sqrt{L^2-P_n^2(x)} &= \sqrt{(1+x)(\alpha-x)}\,(x_2-x)\dots(x_n-x) = \\ &= \tfrac{1}{n}(-1)^{n-1}\sqrt{(1+x)(\alpha-x)}\,P_n'(x)\end{aligned}$$

или

$$\frac{P_n'(x)}{\sqrt{L^2-P_n^2(x)}} = \frac{(-1)^{n-1}n}{\sqrt{(1+x)(\alpha-x)}}, \quad x \in (-1, x_2).$$

К этому нужно добавить, что $P_n(-1) = (-1)^n L$. Таким образом, полином $P_n(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{y'(x)}{\sqrt{L^2-y^2(x)}} = \frac{(-1)^{n-1}n}{\sqrt{(1+x)(\alpha-x)}}, \quad x \in (-1, x_2), \tag{11}$$

и начальному условию $y(-1) = (-1)^n L$. Здесь $\alpha > 1$ — параметр.

Преобразуем правую часть уравнения (11). Имеем

$$(1+x)(\alpha - x) = \left(\frac{\alpha+1}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{\alpha-1}{2}\right)^2,$$

поэтому

$$\sqrt{(1+x)(\alpha-x)} = \frac{\alpha+1}{2}\sqrt{1-\left(\frac{2x-\alpha+1}{\alpha+1}\right)^2}.$$

Отметим, что при $x \in [-1,1]$ и $\alpha > 1$ выполняются неравенства

$$-1 \leqslant \frac{2x-\alpha+1}{\alpha+1} < 1.$$

Перепишем уравнение (11) в виде

$$\frac{y'(x)}{\sqrt{L^2-y^2(x)}} = \frac{(-1)^{n-1}n}{\frac{\alpha+1}{2}\sqrt{1-\left(\frac{2x-\alpha+1}{\alpha+1}\right)^2}}, \quad x \in (-1, x_2).$$

Проинтегрируем его по отрезку $[-1+\varepsilon, x]$, где $x \in (-1, x_2)$. Получим

$$\arccos\frac{y(t)}{L}\bigg|_{-1+\varepsilon}^{x} = (-1)^{n-1} n \arccos\left(\frac{2t-\alpha+1}{\alpha+1}\right)\bigg|_{-1+\varepsilon}^{x}.$$

Переход к пределу при $\varepsilon \to +0$ приводит к равенству

$$\arccos\frac{y(x)}{L} - \arccos(-1)^n = (-1)^{n-1} n \left(\arccos\frac{2x-\alpha+1}{\alpha+1} - \pi\right).$$

Отсюда следует, что

$$(-1)^n \frac{y(x)}{L} = \cos\left(n \arccos\frac{2x-\alpha+1}{\alpha+1}\right)\cos n\pi, \quad x \in (-1, x_2).$$

Значит,

$$P_n(x) = L\cos\left(n\arccos\frac{2x-\alpha+1}{\alpha+1}\right), \quad x \in [-1,1].$$

Согласно (5),

$$P_n(x) = L\, 2^{n-1} T_n\left(\frac{2x-\alpha+1}{\alpha+1}\right).$$

Старшие коэффициенты у полиномов $P_n(x)$ и $T_n(x)$ равны единице, поэтому необходимо

$$L\, 2^{n-1}\left(\frac{2}{\alpha+1}\right)^n = 1.$$

Приходим к окончательным формулам

$$L = \frac{1}{2^{n-1}} \left(\frac{\alpha+1}{2} \right)^n,$$
$$P_n(x) = \left(\frac{\alpha+1}{2} \right)^n T_n \left(\frac{2x-\alpha+1}{\alpha+1} \right). \tag{12}$$

Положим

$$x_k = \frac{(\alpha+1)x_k^* + \alpha - 1}{2},$$

где x_k^* — точки альтернанса полинома Чебышёва $T_n(x)$. Точка $x_n = \alpha > 1$ не может быть точкой альтернанса полинома $P_n(x)$. Для того чтобы точки $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ образовывали n-точечный альтернанс со свойством (ii), необходимо выполнение неравенства $x_{n-1} < 1$. Это приводит к дополнительному ограничению на параметр α,

$$\alpha < \frac{3 - x_{n-1}^*}{1 + x_{n-1}^*},$$

где $x_{n-1}^* = \cos\frac{\pi}{n}$. Напомним основное условие: $\alpha > 1$.

Подытожим полученные результаты.

ТЕОРЕМА 3. *Полином $P_n(x)$ степени n со старшим коэффициентом, равным единице, имеющий на отрезке $[-1, 1]$ n-точечный альтернанс вида* (ii), *допускает представление* (12), *в котором α — свободный параметр, удовлетворяющий неравенствам*

$$1 < \alpha < \frac{3 - x_{n-1}^*}{1 + x_{n-1}^*}, \quad x_{n-1}^* = \cos\frac{\pi}{n}.$$

5°. Случай n-точечного альтернанса вида (i) самый трудный. Внутренние точки альтернанса $x_2, \ldots, x_{n-1}$ остаются нулями производной полинома $P_n(x)$, но их количество равно $n-2$. У производной $P_n'(x)$ имеется ещё один нуль.

Может оказаться, что $P_n'(-1) = 0$ или $P_n'(1) = 0$. В первом случае полином $P_n(x)$ имеет вид (9) при $\alpha = -\frac{3+x_1^*}{1-x_1^*}$, а во втором случае полином $P_n(x)$ имеет вид (12) при $\alpha = \frac{3-x_{n-1}^*}{1+x_{n-1}^*}$. Это доказывается так же, как в п. 3° и 4°.

Рассмотрим основной случай, когда $P_n'(-1)$ и $P_n'(1)$ отличны от нуля. Дополнительный корень производной $P_n'(x)$ обозначим c. Понятно, что c лежит вне отрезка $[-1, 1]$.

Пусть $c > 1$. Полином $P_n(x)$ строго возрастает на полуоси $(c, +\infty)$ до $+\infty$ и строго убывает на отрезке $[x_{n-1}, c]$. Отсюда следует, что $P_n(1) = -L$, $P_n(c) < -L$ и существуют точки α и β, $c < \alpha < \beta$, в которых

$$P_n(\alpha) = -L, \quad P_n(\beta) = L.$$

Указанные факты позволяют записать представления

$$\begin{gathered}P_n'(x) = n(x - x_2)\dots(x - x_{n-1})(x - c),\\ L^2 - P_n^2(x) = (1 - x^2)(x - x_2)^2\dots(x - x_{n-1})^2(x - \alpha)(x - \beta).\end{gathered} \tag{13}$$

Представление (13) сохраняется и при $c < -1$. При этом $\beta < \alpha < c$ и $P_n(-1) = (-1)^{n-1}L$, $P_n(1) = L$.

Обычным путём приходим к следующему заключению.

ТЕОРЕМА 4. *Полином $P_n(x)$ степени n со старшим коэффициентом, равным единице, имеющий на отрезке $[-1, 1]$ n-точечный альтернанс вида* (i), *при выполнении условий $P_n'(-1) \neq 0$, $P_n'(1) \neq 0$ удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$\frac{y'(x)}{\sqrt{L^2 - y^2(x)}} = \frac{n(x - c)}{\sqrt{(1 - x^2)(x - \alpha)(x - \beta)}}, \quad x \in (x_{n-1}, 1), \tag{14}$$

и начальному условию $y(1) = -L \operatorname{sign} c$. Здесь $|c| > 1$ и

$$\begin{gathered}c < \alpha < \beta \quad \text{\textit{при}} \quad c > 1,\\ \beta < \alpha < c \quad \text{\textit{при}} \quad c < -1.\end{gathered}$$

При решении уравнения (14) приходится использовать эллиптические функции. За подробностями отсылаем читателя к работе Е. И. Золотарёва [2, с. 7–18].

ЛИТЕРАТУРА

1. Натансон И. П. *Конструктивная теория функций.* М.-Л.: Гостехиздат, 1949. 688 с.

2. Золотарёв Е. И. *Приложение эллиптических функций к вопросам о функциях, наименее и наиболее отклоняющихся от нуля* / В кн.: Полное собрание сочинений Егора Ивановича Золотарёва. Выпуск второй. Л.: Изд-во АН СССР, 1932. С. 1–59.