ВОСПОЛЬЗУЕМСЯ ТЕОРЕМОЙ КУНА–ТАККЕРА*

В. Н. Малозёмов
malv@math.spbu.ru

20 ноября 2014 г.

Аннотация. На примере задачи квадратичного программирования показывается, как пользоваться критерием оптимальности в форме Куна–Таккера.

1°. Рассмотрим задачу квадратичного программирования:

$$\begin{aligned} Q(x) &:= \tfrac{1}{2}\langle Dx, x\rangle + \langle c, x\rangle \to \inf \\ A[M_1, N] \times x[N] &\geqslant b[M_1] \\ A[M_2, N] \times x[N] &= b[M_2]. \end{aligned} \tag{1}$$

Предполагается, что матрица D симметрична и неотрицательно определена.

Обозначим $M = M_1 \cup M_2$ и сформулируем критерий оптимальности (см., например, [1, с. 91]).

ТЕОРЕМА (Кун–Таккер). *Для того, чтобы план x_* задачи* (1) *был оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы нашёлся вектор $u_* = u_*[M]$, такой, что*

$$Q'(x_*) = \sum_{i \in M} u_*[i] \times A[i, N]; \tag{2}$$

$$u_*[i] \times \big(A[i, N] \times x_*[N] - b[i]\big) = 0, \quad i \in M_1; \tag{3}$$

$$u_*[i] \geqslant 0, \quad i \in M_1. \tag{4}$$

Условие (2) называется *условием Лагранжа*, условие (3) — *условием дополнительности*, а условие (4) — *условием неотрицательности*. Вместе условия (2)–(4) называются *условиями Куна–Таккера.*

Для практического применения более удобной является эквивалентная формулировка теоремы Куна–Таккера, в которой отсутствуют множители $u_*[i]$, гарантированно равные нулю.

*Семинар по конструктивному негладкому анализу и недифференцируемой оптимизации «CNSA & NDO»: `http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/`

ТЕОРЕМА. *Вектор $x_* \in \mathbb{R}^N$ будет решением задачи (1) тогда и только тогда, когда найдутся подмножество $I \subset M_1$ (не исключая $I = \varnothing$) и числа $u_*[i]$, $i \in I \cup M_2$, такие, что вектор $\big(x_*[N], u_*[I \cup M_2]\big)$ удовлетворяет системе линейных уравнений*

$$Q'(x) = \sum_{i \in I \cup M_2} u[i] \times A[i, N], \tag{5}$$

$$A[i, N] \times x[N] = b[i], \quad i \in I \cup M_2, \tag{6}$$

причём

$$A[i, N] \times x_*[N] \geqslant b[i], \quad i \in M_1 \setminus I, \tag{7}$$

$$u_*[i] \geqslant 0, \quad i \in I. \tag{8}$$

Проверим эквивалентность условий Куна–Таккера (2)–(4) и условий (5)–(8).

Пусть в точке x_*, являющейся планом задачи (1), выполнены условия Куна–Таккера, то есть найдётся вектор u_* со свойствами (2)–(4). Положим

$$I = \big\{ i \in M_1 \mid A[i, N] \times x_*[N] = b[i] \big\}.$$

Отметим, что

$$A[i, N] \times x_*[N] - b[i] > 0 \quad \text{при} \quad i \in M_1 \setminus I. \tag{9}$$

В силу условия дополнительности (3)

$$u_*[i] = 0 \quad \text{при} \quad i \in M_1 \setminus I. \tag{10}$$

Покажем, что на векторе $\big(x_*[N], u_*[I \cup M_2]\big)$ выполняются условия (5)–(8). Действительно, (5) следует из (2) и (10), (7) — из (9), (8) — из (4), а (6) — из определения I и того факта, что x_* — план задачи (1).

Наоборот, пусть выполняются условия (5)–(8). Доопределим вектор u_*, положив

$$u_*[i] = 0 \quad \text{при} \quad i \in M_1 \setminus I. \tag{11}$$

В силу (6) и (7) вектор x_* является планом задачи (1). Условия (5) и (11) гарантируют выполнение равенства (2). Неравенство (4) следует из (8) и (11). Что касается условия дополнительности (3), то при $i \in I$ оно следует из (6), а при $i \in M_1 \setminus I$ — из (11).

2°. Вторая теорема позволяет описать конечный алгоритм решения задачи (1) при условии, что матрица D симметрична и неотрицательно определена. Нужно последовательно перебирать все подмножества I индексного множества M_1 (включая $I = \varnothing$) и при каждом I решать систему линейных уравнений (5)–(6), пока не встретится решение (x_*, u_*), удовлетворяющее условиям (7), (8). Вектор x_* будет оптимальным планом задачи (1).

Для контроля правильности вычислений можно использовать равенство

$$\big\langle Q'(x_*), x_* \big\rangle = \sum_{i \in I \cup M_2} u_*[i] \times b[i],$$

которое выводится так: согласно (5) и (6)

$$\begin{aligned}\big\langle Q'(x_*), x_* \big\rangle &= \sum_{i \in I \cup M_2} u_*[i] \times \Big(\big(A[i, N] \times x_*[N] - b[i] \big) + b[i] \Big) = \\ &= \sum_{i \in I \cup M_2} u_*[i] \times b[i].\end{aligned}$$

Если требуемого подмножества I не найдётся, то задача квадратичного программирования (1) не имеет решения.

3°. Рассмотрим несколько примеров. Во всех случаях квадратичная форма, входящая в целевую функцию, будет неотрицательно определённой. Это проверяется выделением полных квадратов. Например,

$$x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2 = (x_1 - \tfrac{1}{2} x_2)^2 + \tfrac{3}{4} x_2^2.$$

1)
$$\begin{gathered} Q(x) := x_1^2 - 2x_1 x_2 + 3x_2^2 \to \inf \\ 2x_1 - x_2 \geqslant 2 \\ -x_1 + x_2 = -1. \end{gathered}$$

Имеем $M_1 = \{1\}$, $M_2 = \{2\}$ (ограничения нумеруются в порядке их записи). Возьмём $I = \varnothing$. Система линейных уравнений (5)–(6) примет вид (уравнение (5) запишем в транспонированном виде — в виде равенства столбцов):

$$\begin{gathered} \begin{pmatrix} 2x_1 - 2x_2 \\ -2x_1 + 6x_2 \end{pmatrix} = u_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ -x_1 + x_2 = -1. \end{gathered}$$

Решение этой системы найти легко: $x_1^* = 1$, $x_2^* = 0$; $u_2^* = -2$. Условие (7) в данном случае выполняется:

$$2x_1^* - x_2^* = 2 \geqslant 2.$$

По теореме Куна–Таккера вектор $x_* = (1, 0)$ является оптимальным планом.

Контроль: $\langle Q'(x_*), x_* \rangle = 2 = u_2^* b_2$.

2) $$Q(x) := 3x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - 4x_1 + 3x_2 \to \inf$$

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 &\geqslant -3 \\ -x_1 + 2x_2 &\geqslant 1. \end{aligned}$$

Имеем $M_1 = \{1, 2\}$, $M_2 = \varnothing$.

Возьмём $I = \varnothing$. Система (5)–(6) примет вид $Q'(x) = \mathbb{O}$ или в подробной записи

$$\begin{aligned} 6x_1 - 2x_2 - 4 &= 0, \\ -2x_1 + 2x_2 + 3 &= 0. \end{aligned}$$

Её решение $x = (\frac{1}{4}, -\frac{5}{4})$ не удовлетворяет условию (7) (не является планом).

Возьмём $I = \{2\}$ и запишем систему линейных уравнений (5)–(6):

$$\begin{pmatrix} 6x_1 - 2x_2 - 4 \\ -2x_1 + 2x_2 + 3 \end{pmatrix} = u_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$
$$-x_1 + 2x_2 = 1.$$

Её решение $x_1^* = \frac{2}{3}$, $x_2^* = \frac{5}{6}$, $u_2^* = \frac{5}{3}$ удовлетворяет условиям (7), (8). Значит, $x_* = (\frac{2}{3}, \frac{5}{6})$ — оптимальный план.

Контроль: $\langle Q'(x_*), x_* \rangle = \frac{5}{3} = u_2^* b_2$.

3) $$Q(x) := x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 - 3x_1 + 5x_2 \to \inf$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\geqslant 0 \\ -x_1 + 3x_2 &\geqslant -1 \\ x_1 \qquad &\geqslant 0 \\ x_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

Имеем $M_1 = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $M_2 = \varnothing$.

Возьмём $I = \{2, 4\}$ и запишем систему (5)–(6):

$$\begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 - 3 \\ -x_1 + 2x_2 + 5 \end{pmatrix} = u_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + u_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$
$$-x_1 + 3x_2 = -1,$$
$$x_2 = 0.$$

Её решение $x_1^* = 1$, $x_2^* = 0$, $u_2^* = 1$, $u_4^* = 1$ удовлетворяет условиям (7), (8). Значит, $x_* = (1, 0)$ — оптимальный план.

Контроль: $\langle Q'(x_*), x_* \rangle = -1 = u_2^* b_2 + u_4^* b_4$.

4) $$f(x) := x_1^2 + x_1 x_2 + 2x_2^2 + 3|x_1 + x_2 - 1| \to \inf_{x \in \mathbb{R}^2}.$$

Эта задача эквивалентна следующей задаче квадратичного программирования:

$$\begin{gathered} Q(x,t) := x_1^2 + x_1 x_2 + 2x_2^2 + 3t \to \inf \\ -x_1 - x_2 + t \geqslant -1 \\ x_1 + x_2 + t \geqslant 1. \end{gathered}$$

(По поводу эквивалентности экстремальных задач см. [1, с. 11–12].)

Приступая к решению задачи квадратичного программирования, возьмём $I = \{1, 2\}$. Система (5)–(6) примет вид:

$$\begin{gathered} \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 + 4x_2 \\ 3 \end{pmatrix} = u_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ -x_1 - x_2 + t = -1, \\ x_1 + x_2 + t = 1. \end{gathered}$$

Её решение $x_1^* = \frac{3}{4}$, $x_2^* = \frac{1}{4}$, $t_* = 0$, $u_1^* = \frac{5}{8}$, $u_2^* = \frac{19}{8}$ удовлетворяет условию (8). Значит, $(x_*, t_*) = (\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, 0)$ — оптимальный план.

По эквивалентности, $x_* = (\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$ — решение исходной задачи.

5) $$f(x) := x_1^2 + x_1 x_2 + 2x_2^2 - 3|x_1 + x_2 - 1| \to \inf_{x \in \mathbb{R}^2}. \tag{12}$$

Приём, который мы использовали при решении предыдущей задачи (у нее изменился только знак коэффициента перед модулем) приводит к задаче квадратичного программирования

$$\begin{gathered} Q(x,t) := x_1^2 + x_1 x_2 + 2x_2^2 - 3t \to \inf \\ -x_1 - x_2 + t \geqslant -1 \\ x_1 + x_2 + t \geqslant 1. \end{gathered} \tag{13}$$

Однако задачи (12) и (13) не эквивалентны. Задача (13) не имеет решения. Это следует из того, что при фиксированных x_1, x_2 и положительных t, стремящихся к $+\infty$, вектор (x_1, x_2, t) удовлетворяет ограничениям задачи (13), а целевая функция на нём стремится к $-\infty$. В то же время, как мы покажем, задача (12) имеет решение.

Обозначим

$$\begin{gathered} P_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 - 1 \geqslant 0\}, \\ P_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 - 1 \leqslant 0\}. \end{gathered}$$

Ясно, что $P_1 \cup P_2 = \mathbb{R}^2$, поэтому

$$\inf_{x\in\mathbb{R}^2} f(x) = \min\Bigl\{\inf_{x\in P_1} f(x),\ \inf_{x\in P_2} f(x)\Bigr\}. \tag{14}$$

Рассмотрим задачу минимизации функции $f(x)$ на P_1:

$$\begin{gathered} f(x) := x_1^2 + x_1x_2 + 2x_2^2 - 3x_1 - 3x_2 + 3 \to \inf \\ x_1 + x_2 \geqslant 1. \end{gathered} \tag{15}$$

Условие $f'(x) = \mathbb{O}$ приводит к системе уравнений

$$\begin{gathered} 2x_1 + x_2 = 3, \\ x_1 + 4x_2 = 3. \end{gathered}$$

Её решение $x_1 = \frac{9}{7}$, $x_2 = \frac{3}{7}$ удовлетворяет ограничению задачи (15). Значит, $\hat{x}_* = (\frac{9}{7}, \frac{3}{7})$ — оптимальный план. При этом $f(\hat{x}_*) = \frac{3}{7}$.

Рассмотрим задачу минимизации функции $f(x)$ на P_2:

$$\begin{gathered} f(x) := x_1^2 + x_1x_2 + 2x_2^2 + 3x_1 + 3x_2 - 3 \to \inf \\ -x_1 - x_2 \geqslant -1. \end{gathered} \tag{16}$$

Условие $f'(x) = \mathbb{O}$ приводит к системе уравнений

$$\begin{gathered} 2x_1 + x_2 = -3, \\ x_1 + 4x_2 = -3. \end{gathered}$$

Её решение $x_1 = -\frac{9}{7}$, $x_2 = -\frac{3}{7}$ удовлетворяет ограничению задачи (16). Значит, $\check{x}_* = (-\frac{9}{7}, -\frac{3}{7})$ — оптимальный план. При этом $f(\check{x}_*) = -\frac{39}{7}$.

На основании формулы (14) заключаем, что $\check{x}_* = (-\frac{9}{7}, -\frac{3}{7})$ — решение задачи (12).

ЛИТЕРАТУРА

1. Гавурин М. К., Малозёмов В. Н. *Экстремальные задачи с линейными ограничениями.* Л.: Изд-во ЛГУ, 1984. 176 с.