ОБ ОДНОЙ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ, СВЯЗАННОЙ С ПОЛИНОМАМИ ЗОЛОТАРЁВА*

И. В. Агафонова — i.agafonova@spbu.ru

В. Н. Малозёмов — v.malozemov@spbu.ru

13 ноября 2014 г.

1°. Пусть $a > 1$, A, $b < -1$, $M > 0$ — вещественные параметры и

$$P_n(x,t) = x_0 t^n + x_1 t^{n-1} + \ldots + x_n$$

— алгебраический полином степени не выше n, $n \geqslant 2$. В докладе ставится и исследуется следующая экстремальная задача:

$$\begin{gathered} P_n(x,b) \to \max, \\ \bigl|P_n(x,t)\bigr| \leqslant M, \ t \in [-1,1]; \\ P_n(x,a) = A. \end{gathered} \tag{1}$$

Обозначим через Ω множество векторов $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющих ограничениям задачи (1). Элементы $x \in \Omega$ будем называть *планами.*

При анализе задачи (1) важную роль играют полиномы Чебышёва, которые на отрезке $[-1,1]$ допускают представление

$$T_n(t) = \cos(n \arccos t).$$

Положим $A_n = MT_n(a)$.

ЛЕММА 1. *Множество планов Ω непусто тогда и только тогда, когда $|A| \leqslant A_n$.*

Доказательство. Допустим, вопреки утверждению, что при некотором $A > A_n$ существует полином $P_n(x,t)$, удовлетворяющий ограничениям задачи (1). Введём полином

$$Q(t) = MT_n(t) - (1-\varepsilon)P_n(x,t).$$

*Семинар по конструктивному негладкому анализу и недифференцируемой оптимизации «CNSA & NDO»: `http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/`

Имеем $Q(a) = A_n - (1-\varepsilon)A$. Выберем $\varepsilon \in (0,1)$ так, чтобы выполнялось неравенство $Q(a) < 0$.

Теперь воспользуемся соотношением

$$T_n(\tau_k^{(n)}) = (-1)^{n-k}, \quad k \in 0:n, \tag{2}$$

где $\tau_k^{(n)} = \cos\frac{(n-k)\pi}{n}$. Запишем

$$(-1)^{n-k}Q(\tau_k^{(n)}) = M - (-1)^{n-k}(1-\varepsilon)P_n(x,\tau_k^{(n)}).$$

Так как $\left|P_n(x,\tau_k^{(n)})\right| \leqslant M$, то

$$(-1)^{n-k}Q(\tau_k^{(n)}) > 0, \quad k \in 0:n.$$

Если обозначить $\tau_{n+1}^{(n)} = a$, то получим, что в точках упорядоченной последовательности $-1 = \tau_0^{(n)} < \tau_1^{(n)} < \ldots < \tau_n^{(n)} = 1 < \tau_{n+1}^{(n)}$ полином $Q(t)$ поочерёдно меняет знак. Количество перемен знака равно $n+1$. Отсюда следует, что полином $Q(t)$ степени не выше n имеет не менее $n+1$ нулей. Это возможно только тогда, когда $Q(t) \equiv 0$, что противоречит свойствам $Q(t)$.

Случай $A < -A_n$ рассматривается аналогично. Противоречие получается с помощью полинома

$$Q(t) = -MT_n(t) - (1-\varepsilon)P_n(x,t).$$

Теперь возьмём $A \in [-A_n, A_n]$ и представим A в виде

$$A = (1-2\alpha)A_n, \quad \alpha \in [0,1].$$

Полином $P_n(x,t) = (1-2\alpha)MT_n(t)$ удовлетворяет ограничениям задачи (1). Значит, при $A \in [-A_n, A_n]$ множество планов Ω непусто.

Лемма доказана. $\square$

Если принять во внимание, что множество Ω ограничено и замкнуто, то приходим к следующему заключению.

ТЕОРЕМА 1. *При $A \in [-A_n, A_n]$ решение задачи* (1) *существует.*

2°. Покажем, что при $A = \pm A_n$ множество планов Ω состоит из единственного вектора.

Допустим, что при $A = A_n$ ограничениям задачи (1) наряду с $MT_n(t)$ удовлетворяет ещё один полином $P_n(x,t)$. Рассмотрим разность

$$Q(t) = MT_n(t) - P_n(x,t).$$

Согласно (2) при $k \in 0 : n$ имеем

$$(-1)^{n-k} Q(\tau_k^{(n)}) = M - (-1)^{n-k} P_n(x, \tau_k^{(n)}) \geqslant 0.$$

Из условия $Q(a) = 0$ следует, что $-Q(a) \geqslant 0$. Таким образом,

$$(-1)^{n-k} Q(\tau_k^{(n)}) \geqslant 0, \quad k \in 0 : n+1,$$

где положено $\tau_{n+1}^{(n)} = a$. По лемме о нулях полинома (см. Приложение) полином $Q(t)$ имеет не менее $n+1$ нулей с учётом их кратности. Это возможно только тогда, когда $Q(t) \equiv 0$, так что $P_n(x,t) = MT_n(t)$. Установлено, что при $A = A_n$ множество Ω состоит из единственного элемента — вектора коэффициентов полинома $MT_n(t)$.

Аналогично показывается, что при $A = -A_n$ множество Ω состоит из единственного элемента — вектора коэффициентов полинома $-MT_n(t)$.

Приходим, в частности, к такому заключению: *при $A = \pm A_n$ единственным решением задачи* (1) *является полином $\pm MT_n(t)$.*

В дальнейшем считаем, что $A \in (-A_n, A_n)$.

3°. При $A \in (-A_n, A_n)$ решение задачи (1) допускает альтернансную характеризацию.

ТЕОРЕМА 2. *Для того чтобы план $x^* \in \Omega$ был оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы полином $P_n(x^*, t)$ обладал n-точечным альтернансом, точнее, чтобы нашлись n точек $-1 \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_n \leqslant 1$, в которых*

$$P_n(x^*, t_k) = (-1)^{k-1} M, \quad k \in 1 : n. \tag{3}$$

Доказательству предпошлём одно вспомогательное утверждение.

ЛЕММА 2. *Пусть $A \in (-A_n, A_n)$ и $x \in \Omega$. Тогда множество*

$$R(x) = \Big\{ t \in [-1, 1] \mid \big|P_n(x,t)\big| = M \Big\}$$

содержит не более n точек.

Доказательство. Предположим, что $R(x)$ содержит $n+1$ точек. Так как значения полинома $P_n(x,t)$ при $t \in [-1,1]$ не выходят за пределы коридора от $-M$ до M, то каждая внутренняя точка отрезка $[-1,1]$, принадлежащая $R(x)$, является нулём производной $P_n'(x,t)$. Таковых не может быть больше $n-1$. Отсюда, в частности, следует, что точки $t=-1$ и $t=1$ входят в $R(x)$.

Точки из $R(x)$ упорядочим по возрастанию и заметим, что в соседних точках полином $P_n(x,t)$ принимает значения разных знаков (иначе между этими точками появился бы ещё один нуль производной).

Допустим, что $P_n(x,1) = M$. В точках из $R(x)$, в которых $P_n(x,t) = M$, в том числе в точке $t = 1$, для разности $Q(t) = P_n(x,t) - MT_n(t)$ будут выполняться неравенства $Q(t) \geqslant 0$, а в точках из $R(x)$, в которых $P_n(x,t) = -M$, — — неравенства $Q(t) \leqslant 0$. Так как $A < A_n$, то к указанным $n+1$ неравенствам нужно добавить неравенство $Q(a) < 0$. По лемме о нулях полинома получаем $Q(t) \equiv 0$, что противоречит неравенству $Q(a) < 0$.

В случае $P_n(x,1) = -M$ к противоречию придём с помощью полинома $Q(t) = P_n(x,t) + MT_n(t)$, если учесть, что $A > -A_n$.

Лемма доказана. □

Переходим к доказательству теоремы 2.

Необходимость. Пусть x^* — оптимальный план. По лемме 2 множество $R(x^*)$ содержит не более n точек. Обозначим их $t_1 < t_2 < \ldots < t_r$, $r \leqslant n$.

Вектор x^* является решением следующей экстремальной задачи:

$$\begin{gathered} -P_n(x,b) \to \min, \\ P_n(x,t) \leqslant M, \ t \in [-1,1]; \\ -P_n(x,t) \leqslant M, \ t \in [-1,1]; \\ P_n(x,a) = A. \end{gathered} \tag{4}$$

Мы хотим воспользоваться необходимым условием минимума, но для этого следует проверить регулярность ограничений задачи (4) в точке x^*. Имеется достаточный признак регулярности [1, с. 344–345], согласно которому ограничения задачи (4) в точке x^* будут регулярными, если найдётся вектор $\hat{x}$ со свойствами

$$\begin{gathered} P_n(\hat{x},t) < 0, \quad \text{когда} \quad P_n(x^*,t) = M; \\ P_n(\hat{x},t) > 0, \quad \text{когда} \quad P_n(x^*,t) = -M; \\ P_n(\hat{x},a) = 0. \end{gathered} \tag{5}$$

Рассмотрим систему линейных уравнений на точках из $R(x^*)$:

$$\begin{aligned} &P_n(x,t_k) = -P_n(x^*,t_k), \ k \in 1:r; \\ &P_n(x,a) = 0. \end{aligned}$$

Поскольку $r \leqslant n$, то эта система имеет решение. Обозначим его $\hat{x}$. Очевидно, что $\hat{x}$ удовлетворяет соотношениям (5). Это гарантирует регулярность ограничений задачи (4) в точке x^*.

Введём вектор-функцию $U(t) = (t^n, t^{n-1}, \ldots, 1)$. С её помощью полином $P_n(x,t)$ можно представить в виде скалярного произведения

$$P_n(x,t) = \big\langle U(t), x \big\rangle.$$

Согласно необходимому условию минимума [1, с. 349–350], оптимальному плану x^* соответствуют неотрицательные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ и вещественное γ, такие, что

$$-U(b) + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \xi_k U(t_k) + \gamma U(a) = \mathbb{O}, \tag{6}$$

где $\xi_k = \operatorname{sign} P_n(x^*, t_k)$. При $r < n$ равенство (6) противоречит линейной независимости векторов $U(b), U(t_1), \dots, U(t_r), U(a)$. Значит, $r = n$, все коэффициенты λ_k положительны и $\gamma \neq 0$.

Обозначим

$$t_{n+1} = a, \quad \xi_{n+1} = \operatorname{sign} \gamma, \quad \lambda_{n+1} = |\gamma|$$

и перепишем равенство (6) в виде

$$\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k \xi_k U(t_k) = U(b).$$

По формуле Крамера

$$\lambda_k \xi_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}, \ k \in 1 : n+1,$$

где Δ — определитель со столбцами $U(t_1), \dots, U(t_{n+1})$ и Δ_k — аналогичный определитель, в котором k-й столбец $U(t_k)$ заменён на столбец $U(b)$. Нетрудно понять, что $\operatorname{sign}(\lambda_k \xi_k) = (-1)^{k-1}$, откуда в силу положительности λ_k следует равенство $\xi_k = (-1)^{k-1}$. Умножив это равенство на $\big|P_n(x^*, t_k)\big| := M$, придём к (3). Значение $\xi_{n+1} = (-1)^n$ не используется.

Достаточность. Предположим, что x^* принадлежит Ω и выполняются соотношения (3), однако существует другой вектор $\hat{x} \in \Omega$, на котором $P_n(\hat{x}, b) > P_n(x^*, b)$. Рассмотрим разность $Q(t) = P_n(x^*, t) - P_n(\hat{x}, t)$. Для неё

$$(-1)^{k-1} Q(t_k) \geqslant 0, \ k \in 0 : n+1,$$

где положено $t_0 = b$, $t_{n+1} = a$. По лемме о нулях полинома, $Q(t) \equiv 0$, что противоречит неравенству $Q(b) < 0$.

Теорема доказана. □

ТЕОРЕМА 3. *Решение задачи* (1) *единственно.*

Доказательство. Допустим, что существуют два решения x^* и $\check{x}$. В частности, $P_n(x^*, b) = P_n(\check{x}, b)$. Рассмотрим разность

$$Q(t) = P_n(x^*, t) - P_n(\check{x}, t).$$

Согласно (3) имеем $(-1)^{k-1}Q(t_k) \geqslant 0$, $k \in 0 : n{+}1$, где, как и раньше, положено $t_0 = b$, $t_{n+1} = a$. По лемме о нулях полинома, $Q(t) \equiv 0$, так что $P_n(x^*, t) \equiv \equiv P_n(\check{x}, t)$.

Теорема доказана. $\square$

З а м е ч а н и е. Если $P_n(x^*, t)$ — решение задачи (1) при некотором значении параметра b, то тот же полином остается решением задачи (1) при любом другом значении $b < -1$.

4°. Чтобы подчеркнуть зависимость решения задачи (1) от параметра A, будем обозначать его $x^*(A)$. Положим также

$$B(A) = P_n\bigl(x^*(A), b\bigr).$$

ТЕОРЕМА 4. *Максимальное значение $B(A)$ целевой функции в задаче* (1) *при чётном n монотонно возрастает на интервале $(-A_n, A_n)$, а при нечётном n — монотонно убывает.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим сначала случай чётного n. Нужно проверить, что $B(A^{(1)}) < B(A^{(2)})$ при $A^{(1)} < A^{(2)}$. Допустим противное $B(A^{(1)}) \geqslant \geqslant B(A^{(2)})$. Полином

$$Q(t) = P_n\bigl(x^*(A^{(2)}), t\bigr) - P_n\bigl(x^*(A^{(1)}), t\bigr) \tag{7}$$

в точках альтернанса $t_k(A^{(2)})$ удовлетворяет неравенствам

$$(-1)^{k-1}Q\bigl(t_k(A^{(2)})\bigr) \geqslant 0, \;\; k \in 1 : n. \tag{8}$$

В частности, $-Q\bigl(t_n(A^{(2)})\bigr) \geqslant 0$ в силу чётности n. К этому нужно добавить, что $Q(a) = A^{(2)} - A^{(1)} > 0$ и $Q(b) = B(A^{(2)}) - B(A^{(1)}) \leqslant 0$. Мы находимся в условиях леммы о нулях полинома, согласно которой $Q(t) \equiv 0$. Это противоречит неравенству $Q(a) > 0$.

При нечётном n нужно проверить, что $B(A^{(1)}) > B(A^{(2)})$ при $A^{(1)} < A^{(2)}$. Доказательство аналогично предыдущему, только вместо неравенств (8) следует воспользоваться неравенствами

$$(-1)^{k}Q\bigl(t_k(A^{(1)})\bigr) \geqslant 0, \;\; k \in 1 : n. \tag{9}$$

Детали мы опускаем. $\square$

ТЕОРЕМА 5. *Старший коэффициент $x_0^*(A)$ экстремального полинома $P_n\bigl(x^*(A), t\bigr)$ при всех $n \geqslant 2$ монотонно возрастает на интервале $(-A_n, A_n)$.*

Доказательство. Нужно проверить, что $x_0^*(A^{(1)}) < x_0^*(A^{(2)})$ при $A^{(1)} < A^{(2)}$. Допустим противное. Тогда старший коэффициент q_0 полинома $Q(t)$ вида (7) равен нулю или меньше нуля. Независимо от чётности n так же, как в теореме 4, строится набор из $n+1$ точек $t_1, \dots, t_n, t_{n+1} = a$, в которых

$$(-1)^{n+1-k} Q(t_k) \geqslant 0, \ \ k \in 1 : n+1. \tag{10}$$

При этом $Q(t_{n+1}) > 0$. Если $q_0 = 0$, то полином $Q(t)$ имеет степень не выше $n-1$. В этом случае неравенства (10) и лемма о нулях полинома гарантируют, что $Q(t) \equiv 0$. Но это противоречит условию $Q(t_{n+1}) > 0$.

При $q_0 < 0$ полином $Q(t)$ имеет степень n и стремится к $-\infty$ при $t \to +\infty$. Так как $Q(t_{n+1}) > 0$, то найдётся точка $t_{n+2} > t_{n+1}$, в которой $Q(t_{n+2}) < 0$. Дополнив ею неравенства (10), на основании леммы о нулях полинома получим $Q(t) \equiv 0$. Это противоречит условию $Q(t_{n+1}) > 0$.

Теорема доказана. □

5°. Как отмечалось в п. 2°, при $A = A_n$ и $A = -A_n$ решение задачи (1) можно записать в явном виде. Существуют и другие значения параметра A, при которых можно указать явное решение задачи (1).

ТЕОРЕМА 6. *Справедливы формулы*

$$P_n\big(x^*(-A_{n-1}), t\big) = -M T_{n-1}(t) \quad \textit{при чётном} \quad n;$$
$$P_n\big(x^*(A_{n-1}), t\big) = M T_{n-1}(t) \quad \textit{при нечётном} \quad n.$$

Здесь $A_{n-1} = M T_{n-1}(a)$.

Доказательство. Достаточно проверить, что предъявленные полиномы обладают требуемым альтернансом.

Согласно (2),

$$T_{n-1}(\tau_{k-1}^{(n-1)}) = (-1)^{n-k}, \ \ k \in 1 : n.$$

При чётном n имеем

$$-M T_{n-1}(\tau_{k-1}^{(n-1)}) = (-1)^{k-1} M, \ \ k \in 1 : n.$$

При нечётном n

$$M T_{n-1}(\tau_{k-1}^{(n-1)}) = (-1)^{k-1} M, \ \ k \in 1 : n.$$

Остаётся сослаться на теоремы 2 и 3. □

На основании теорем 5 и 6 приходим к следующему выводу:

при чётном n старший коэффициент $x_0^*(A)$ экстремального полинома $P_n\big(x^*(A), t\big)$ положителен при $A \in (-A_{n-1}, A_n)$, равен нулю при $A = -A_{n-1}$ и отрицателен при $A \in (-A_n, -A_{n-1})$;

при нечётном n старший коэффициент $x_0^*(A)$ экстремального полинома $P_n\big(x^*(A), t\big)$ положителен при $A \in (A_{n-1}, A_n)$, равен нулю при $A = A_{n-1}$ и отрицателен при $A \in (-A_n, A_{n-1})$.

6°. Укажем ещё два случая, когда решение задачи (1) можно записать в явном виде.

Обозначим $\tau^* = \tau_{n-1}^{(n)} = -\tau_1^{(n)} = \cos\frac{\pi}{n}$ и рассмотрим при $\tau \in [\tau^*, 1)$ два полинома

$$\Lambda_n(\tau, t) = MT_n\Big(\frac{1+\tau}{2}t + \frac{1-\tau}{2}\Big), \tag{11}$$

$$V_n(\tau, t) = MT_n\Big(\frac{1+\tau}{2}t - \frac{1-\tau}{2}\Big). \tag{12}$$

При $t \in [-1, 1]$ полином $\Lambda_n(\tau, t)$ использует значения полинома Чебышёва на отрезке $[-\tau, 1]$, а полином $V_n(\tau, t)$ — на отрезке $[-1, \tau]$. Ясно, что $\big|\Lambda_n(\tau, t)\big| \leqslant M$ и $\big|V_n(\tau, t)\big| \leqslant M$ при $t \in [-1, 1]$. При этом в точках

$$u_k = \frac{2}{1+\tau}\tau_k^{(n)} - \frac{1-\tau}{1+\tau},$$
$$v_k = \frac{2}{1+\tau}\tau_{k-1}^{(n)} + \frac{1-\tau}{1+\tau},$$

удовлетворяющих условиям

$$-1 \leqslant u_1 < u_2 < \ldots < u_n = 1,$$
$$-1 = v_1 < v_2 < \ldots < v_n \leqslant 1,$$

выполняются соотношения

$$\Lambda_n(\tau, u_k) = MT_n\big(\tau_k^{(n)}\big) = (-1)^{n-k}M,\ \ k \in 1:n; \tag{13}$$

$$V_n(\tau, v_k) = MT_n\big(\tau_{k-1}^{(n)}\big) = (-1)^{n-k+1}M,\ \ k \in 1:n. \tag{14}$$

Вычислим

$$\hat{A}_n = \Lambda_n(\tau^*, a), \quad \check{A}_n = V_n(\tau^*, a).$$

ТЕОРЕМА 7. *Пусть n — чётное число.*

Если $A \in [\check{A}_n, A_n)$, то решение задачи (1) *можно представить в виде $V_n(\tau, t)$, где τ — единственный на промежутке $[\tau^*, 1)$ корень уравнения $V_n(\tau, a) = A$.*

Если $A \in (-A_n, -\hat{A}_n]$, то решение задачи (1) *можно представить в виде $-\Lambda_n(\tau, t)$, где τ — единственный на промежутке $[\tau^*, 1)$ корень уравнения $-\Lambda_n(\tau, a) = A$.*

Доказательство. Согласно (13) и (14) полиномы $V_n(\tau, t)$ и $-\Lambda_n(\tau, t)$ при чётном n и всех $\tau \in [\tau^*, 1)$ обладают требуемым альтернансом. Остаётся разобраться с их значениями при $t = a$.

При $\tau \in [\tau^*, 1)$ имеем

$$1 < \frac{1+\tau}{2}a + \frac{1-\tau}{2} < a,$$
$$\tau^* < \frac{1+\tau}{2}a - \frac{1-\tau}{2} < a.$$

При $t > \tau^*$ полином Чебышёва монотонно возрастает, поэтому, когда τ пробегает промежуток $[\tau^*, 1)$, значения $\Lambda_n(\tau, a)$, монотонно возрастая, заполняют промежуток $[\hat{A}_n, A_n)$, а значения $V_n(\tau, a)$, монотонно возрастая, заполняют промежуток $[\check{A}_n, A_n)$. Значит, при $A \in [\check{A}_n, A_n)$ найдётся единственное $\tau_A \in [\tau^*, 1)$, при котором $V_n(\tau_A, a) = A$. Полином $V_n(\tau_A, t)$ будет решением задачи (1) при выбранном A.

Если $A \in (-A_n, -\hat{A}_n]$, то $-A \in [\hat{A}_n, A_n)$. В этом случае найдётся единственное $\tau_{-A} \in [\tau^*, 1)$, при котором $\Lambda_n(\tau_{-A}, a) = -A$. Значит, $-\Lambda_n(\tau_{-A}, a) = A$. Полином $-\Lambda_n(\tau_{-A}, t)$ будет решением задачи (1) при выбранном A.

Теорема доказана. □

ТЕОРЕМА 8. *Пусть n — нечётное число.*

Если $A \in [\hat{A}_n, A_n)$, то решение задачи (1) можно представить в виде $\Lambda_n(\tau, t)$, где τ — единственный на промежутке $[\tau^*, 1)$ корень уравнения $\Lambda_n(\tau, a) = A$.

Если $A \in (-A_n, -\check{A}_n]$, то решение задачи (1) можно представить в виде $-V_n(\tau, t)$, где τ — единственный на промежутке $[\tau^*, 1)$ корень уравнения $-V_n(\tau, a) = A$.

Доказательство аналогично доказательству предыдущей теоремы.

7°. Дополним теоремы 7 и 8 следующим результатом.

ТЕОРЕМА 9. *При $A \in (-\hat{A}_n, \check{A}_n)$ в случае чётного n и при $A \in (-\check{A}_n, \hat{A}_n)$ в случае нечётного n оба конца отрезка $[-1, 1]$ являются точками альтернанса.*

Доказательство. Начнём со случая чётного n. Допустим, что у экстремального полинома $P_n(x^*, t)$ при некотором $A \in (-\hat{A}_n, \check{A}_n)$ точка $t = 1$ не будет точкой альтернанса, то есть $t_n < 1$. Рассмотрим разность

$$Q(t) = P(x^*, t) - V_n(\tau^*, t).$$

В точках альтернанса t_k полинома $P_n(x^*, t)$ имеем $(-1)^{k+1}Q(t_k) \geqslant 0$, $k \in 1:n$. В частности, $-Q(t_n) \geqslant 0$. Кроме того,

$$Q(1) = P_n(x^*, 1) - MT_n(\tau^*) > 0,$$
$$Q(a) = A - \check{A}_n < 0.$$

Мы находимся в условиях леммы о нулях полинома, согласно которой $Q(t) \equiv 0$. Это противоречит неравенству $Q(a) < 0$.

Если допустить, что $t = -1$ не является точкой альтернанса полинома $P_n(x^*, t)$, то противоречие получим с помощью суммы

$$Q(t) = P_n(x^*, t) + \Lambda_n(\tau^*, t).$$

У неё

$$\begin{gathered} Q(-1) = P_n(x^*, -1) + MT_n(-\tau^*) < 0; \\ (-1)^{k+1} Q(t_k) \geqslant 0,\ k \in 1:n; \\ Q(a) = A + \hat{A}_n > 0. \end{gathered}$$

В случае нечётного n доказательство аналогично. Противоречие получается с помощью полинома

$$Q(t) = \begin{cases} P_n(x^*, t) + V_n(\tau^*, t), & \text{если допустить, что } t_n < 1; \\ P_n(x^*, t) - \Lambda_n(\tau^*, t), & \text{если допустить, что } t_1 > -1. \end{cases}$$

Теорема доказана. □

8°. Решение задачи (1) связано с полиномами Золотарёва. Напомним постановку Второй задачи Золотарёва [2]:

среди всех алгебраических полиномов вида

$$H_n(z, t) = t^n + z_1 t^{n-1} + \ldots + z_n,$$

удовлетворяющих условию $H_n(z, a) = A$, найти полином, у которого величина

$$\varphi(z) = \max_{t \in [-1,1]} \bigl| H_n(z, t) \bigr|$$

принимает наименьшее значение.

Решение этой задачи существует и единственно. Обозначим его z^*. Полином $H_n^*(t) = H_n(z^*, t)$ называется полиномом Золотарёва с параметрами $a > 1$, A.

ТЕОРЕМА 10. *Пусть $P_n(x^*, t)$ — решение задачи (1) с параметрами $a > 1$, $b < -1$, $A \in (-A_n, A_n)$, $M > 0$. Тогда при $A \neq -A_{n-1}$ в случае чётного n и при $A \neq A_{n-1}$ в случае нечётного n справедливо тождество*

$$\frac{1}{x_0^*} P_n(x^*, t) \equiv H^*(t), \tag{15}$$

где x_0^* — старший коэффициент полинома $P_n(x^*, t)$ и $H^*(t)$ — полином Золотарёва с параметрами a, A/x_0^*.

Доказательство. Полином из левой части тождества (15) является унитарным (его старший коэффициент равен единице), в точке $t = a$ принимает значение A/x_0^* и обладает n-точечным альтернансом. Этого достаточно, чтобы быть решением Второй задачи Золотарёва с указанными параметрами [3].

Теорема доказана. □

ПРИЛОЖЕНИЕ

ЛЕММА О НУЛЯХ ПОЛИНОМА

В основном тексте активно использовалось следующее утверждение

ЛЕММА О НУЛЯХ ПОЛИНОМА. *Пусть $Q(t)$ — нетривиальный алгебраический полином. Если существуют m точек $t_1 < t_2 < \ldots < t_m$, в которых*

$$\varepsilon(-1)^k Q(t_k) \geqslant 0,\ \ k \in 1 : m, \tag{16}$$

где $\varepsilon = \pm 1$, то $Q(t)$ имеет на $[t_1, t_m]$ не менее $m - 1$ нулей с учётом их кратности.

Доказательство (см. [4, с. 190–191]). Назовём «длиной» отрезка $[t_i, t_j]$, $1 \leqslant i < j \leqslant m$, величину $j - i$. Доказательство леммы проведём с помощью индукции по длине отрезка.

Возьмём отрезок $[t_i, t_{i+1}]$ длины 1. При выполнении условия (16) полином $Q(t)$ имеет на $[t_i, t_{i+1}]$ хотя бы один нуль. Это очевидно, если $Q(t_i) = 0$ или $Q(t_{i+1}) = 0$. В противном случае $Q(t)$ имеет на концах отрезка $[t_i, t_{i+1}]$ значения разных знаков, что также гарантирует наличие нуля.

Предположим, что лемма верна, когда длина отрезка не больше k. Рассмотрим отрезок $[t_i, t_{i+k+1}]$ длины $k+1$. Если в одной из точек $t_{i+1}, \ldots, t_{i+k}$ полином $Q(t)$ отличен от нуля, скажем, в точке t_{i+s}, то заключение леммы следует из индукционного предположения. Действительно, количество нулей на $[t_i, t_{i+k+1}]$ равно количеству нулей на $[t_i, t_{i+s}]$ плюс количеству нулей на $[t_{i+s}, t_{i+k+1}]$, а это по индукционному предположению не меньше $s + (k + 1 - s) = k + 1$. В дальнейшем считаем, что

$$Q(t_{i+1}) = 0, \ldots, Q(t_{i+k}) = 0.$$

Если на отрезке $[t_i, t_{i+k+1}]$ найдётся ещё хоть одна точка, в которой $Q(t)$ обращается в нуль, то лемма верна. Допустим, что $Q(t)$ во всех точках из $[t_i, t_{i+k+1}]$, отличных от $t_{i+1}, \ldots, t_{i+k}$, не равен нулю. В частности $Q(t_i) \neq 0$, $Q(t_{i+k+1}) \neq 0$. Согласно (16),

$$\operatorname{sign} Q(t_i) = \varepsilon(-1)^i, \quad \operatorname{sign} Q(t_{i+k+1}) = \varepsilon(-1)^{i+k+1}. \tag{17}$$

Покажем, что один из нулей $t_{i+1}, \ldots, t_{i+k}$ имеет кратность, большую, чем 1. Этим завершится доказательство леммы.

В противном случае все указанные нули простые и в них полином $Q(t)$ меняет знак. Учитывая это, получаем

$$\operatorname{sign} Q(t_{i+k+1}) = (-1)^k \operatorname{sign} Q(t_i) = \varepsilon(-1)^{k+i},$$

что противоречит (17).

Лемма доказана. □

СЛЕДСТВИЕ. *Если $Q(t)$ — алгебраический полином степени не выше n и существуют $n+2$ точки $t_0 < t_1 < \ldots < t_{n+1}$, в которых*

$$\varepsilon(-1)^k Q(t_k) \geqslant 0,\ \ k \in 0 : n+1,$$

где $\varepsilon = \pm 1$, то $Q(t) \equiv 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Даугавет В. А., Малозёмов В. Н. *Нелинейные задачи аппроксимации* / В кн.: Современное состояние теории исследования операций. М.: Наука, 1979. С. 336–363.

2. Золотарёв Е. И. *Приложение эллиптических функций к вопросам о функциях, наименее и наиболее отклоняющихся от нуля* / В кн.: Золотарёв Е. И. Полное собрание сочинений. Выпуск второй. Л.: Изд-во АН СССР, 1932. С. 1–59.

3. Малозёмов В. Н., Тамасян Г. Ш. *Альтернансные свойства решения Второй задачи Золотарёва* // Семинар «CNSA & NDO». Избранные доклады. 24 апреля 2014 г. (`http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/reps14.shtml#0424`)

4. Коровкин П. П. *Линейные операторы и теория приближений.* М.: Физматлит, 1959. 212 с.