МЕТОД ТОЧНЫХ ШТРАФОВ: ДРУГОЙ ПОДХОД*

Л.Н. Полякова
lnpol07@mail.ru

11 сентября 2014 г.

Аннотация. Рассматривается метод точных штрафных функций для решения задач квазидифференцируемой оптимизации. Вводится условие регулярности, при выполнении которого существует точный штрафной параметр.

1°. Метод штрафных функций. В нелинейном программировании широкое распространение имеют методы штрафных функций, как внешних, так и внутренних. Основная идея этих методов состоит в замене условной задачи оптимизации последовательностью вспомогательных задач безусловной оптимизации. Вспомогательная функция в штрафных методах подбирается таким образом, чтобы она совпадала на множестве, задающем ограничение, с исходной функцией, и возрастала вне этого множества.

Поскольку среди множества задач безусловной оптимизации наиболее хорошо изученными являются гладкие задачи, то в качестве вспомогательных задач естественно рассматривались оптимизационные задачи с гладкой целевой функцией. Но использование гладких вспомогательных задач приводило к тому, что приблизиться к решению исходной задачи можно лишь с возрастанием штрафных параметров. В настоящее время большое внимание уделяется методам точных штрафов — методам, в которых, начиная с некоторого момента, любое решение вспомогательной задачи является решением исходной задачи. При этом выяснилось, что “платой” за существование точной штрафной функции является негладкость функции, задающей ограничение. Прогресс в области методов недифференцируемой оптимизации позволяет преодолеть трудности, связанные с упомянутой негладкостью. Впервые существование точного штрафного параметра для задач выпуклого программирования было замечено И.И. Ереминым [1], чуть позднее — У.И. Зангвилом [2]. Впоследствии этому вопросу были посвящены многие работы, например, работы [3-6,14,17].

*Семинар по конструктивному негладкому анализу и недифференцируемой оптимизации «CNSA & NDO»: `http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/`

Рассмотрим задачу условной оптимизации

$$f(x) \to \inf_{x \in X}, \tag{1}$$

где f — непрерывная на $\mathbb{R}^n$ функция. Предположим, что множество $X \subset \mathbb{R}^n$ непусто, компактно, задано в виде

$$X = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(x) = 0\}, \tag{2}$$

где φ — непрерывная на $\mathbb{R}^n$ функция, и $\varphi(x) > 0 \quad \forall x \notin X$. Нетрудно заметить, что X есть замкнутое множество точек глобального минимума функции φ на $\mathbb{R}^n$.

Как обычно, для решения задачи (1) методом штрафных функций введем функцию

$$F(c, x) = f(x) + c\varphi(x),$$

где c — некоторое неотрицательное число, называемое *штрафным параметром*, и рассмотрим задачу безусловной минимизации

$$F(c, x) \to \inf_{x \in \mathbb{R}^n}. \tag{3}$$

Для применения методов штрафов существенно предположение о существовании решений у вспомогательных задач. Будем предполагать, что инфимум в задаче (3) достигается для любого неотрицательного числа c. Достаточным условием для этого является ограниченность лебегова множества

$$\mathcal{L}(f, x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leqslant f(x_0)\},$$

где x_0 — некоторая точка из $\mathbb{R}^n$. Обозначим

$$f^* = \min_{x \in X} f(x), \quad F^*(c) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} F(c, x), \quad x(c) = \arg\min_{x \in \mathbb{R}^n} F(c, x).$$

Заметим, что $f^* \geqslant F^*(c)$ для любого положительного c.

Выберем монотонно возрастающую последовательность неотрицательных чисел $\{c_k\}(k = 0, 1, 2, \dots)$, стремящуюся к $+\infty$,

$$0 = c_0 < c_1 < c_2 < \ldots < c_k < \ldots.$$

При $c_0 = 0$ проверяем, не принадлежит ли множеству X точка глобального минимума функции f на $\mathbb{R}^n$.

В теории штрафных функции большое значение имеет следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. *Если $x(c_k)$ есть последовательность решений вспомогательных задач (3), то справедливы следующие неравенства:*

$$1)\qquad F^*(c_k) = F(c_k, x(c_k)) \leqslant F(c_{k+1}, x(c_{k+1})) = F^*(c_{k+1}) \quad \forall k > 0;$$

$$2)\qquad f(x(c_k)) \leqslant f(x(c_{k+1}));$$

$$3)\qquad f(x(c_k)) \leqslant F(c_k, x(c_k)) \leqslant f^*. \tag{4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Для $k = 0, 1, \dots$ имеем

$$F^*(c_k) = F(c_k, x(c_k)) = f(x_k) + c_k\varphi(x(c_k)) \leqslant f(x(c_{k+1})) + c_k\varphi(x(c_{k+1})) \leqslant$$

$$\leq f(x(c_{k+1})) + c_{k+1}\varphi(x(c_{k+1})) = F(c_{k+1}, x(c_{k+1})) = F^*(c_{k+1}).$$

2. Для $k = 0, 1, \dots$ справедливы неравенства

$$f(x(c_k)) + c_k\varphi(x(c_k)) \leqslant f(x(c_{k+1})) + c_k\varphi(x(c_{k+1})),$$

$$f(x(c_{k+1})) + c_{k+1}\varphi(x(c_{k+1})) \leqslant f(x_k) + c_{k+1}\varphi(x(c_k)).$$

Отсюда следует

$$\left(1 - \frac{c_k}{c_{k+1}}\right) f(x(c_k)) \leqslant \left(1 - \frac{c_k}{c_{k+1}}\right) f(x(c_{k+1})),$$

т.е.,

$$f(x(c_k)) \leqslant f(x(c_{k+1})).$$

3. Для $k = 0, 1, \dots$ имеем

$$f(x(c_k)) \leq f(x(c_k)) + c_k\varphi(x(c_k)) \leqslant f(x^*) + c_k\varphi(x^*) = f(x^*) = f^*.$$

□

Таким образом, последовательности чисел $\{f(x(c_k))\}$ и $\{F(c_k, x_k)\}$ являются неубывающими, причем число f^* является их верхней оценкой.

ЛЕММА 1. *При сделанных предположениях справедливо неравенство*

$$\varphi(x(c_{k+1})) \leqslant \varphi(x(c_k)) \quad \forall k > 0. \tag{5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как

$$F(c_{k+1}, x(c_{k+1})) \leqslant f(x(c_k)) + c_{k+1}\varphi(x(c_k)),$$

то

$$f(x(c_{k+1})) + c_{k+1}\varphi(x(c_{k+1})) \leqslant f(x(c_k)) + c_{k+1}\varphi(x(c_k)) =$$

$$= f(x(c_k)) + c_k\varphi(x(c_k)) + (c_{k+1} - c_k)\varphi(x(c_k)) \leqslant$$
$$\leqslant f(x(c_{k+1})) + c_k\varphi(x(c_{k+1})) + (c_{k+1} - c_k)\varphi(x(c_k)).$$

Отсюда имеем

$$(c_{k+1} - c_k)\varphi(x(c_{k+1})) \leqslant (c_{k+1} - c_k)\varphi(x(c_k)).$$

□

Из неравенства (5) вытекает, что все точки последовательности $\{x(c_k)\}$ будут лежать в множестве $\mathcal{L}(\varphi, x^{**})$, где

$$\mathcal{L}(\varphi, x^{**}) = \{x \in \mathbb{R}^n \bigm| \varphi(x) \leqslant \varphi(x^{**})\}.$$

ЛЕММА 2. *Для любой монотонно возрастающей последовательности положительных чисел* $\{c_k\}$, $c_k \to +\infty$, *справедливо соотношение*

$$\varphi(x(c_k)) \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0.$$

Доказательство. (От противного). Выберем произвольную последовательность положительных чисел c_k, стремящуюся к $+\infty$. Предположим, что $\varphi(x(c_k)) \not\to 0$. Тогда найдется такая подпоследовательность чисел $c_{k_s} \to +\infty$ и число $a > 0$, что справедливо неравенство

$$\varphi(x(c_{k_s})) \geqslant a > 0 \quad \forall k_s > 0.$$

Обозначив через $x_{k_s} = x(c_{k_s})$, имеем

$$F(c_{k_s}, x_{k_s}) = f(x_{k_s}) + c_{k_s}\varphi(x_{k_s}) \geqslant f^{**} + c_{k_s}\varphi(x_{k_s}) \geqslant f^{**} + c_{k_s}a.$$

Отсюда следует

$$F(c_{k_s}, x_{k_s}) \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty.$$

Данное утверждение противоречит ограниченности сверху последовательности $\{F(c_{k_s}, x_{k_s})\}$. □

Последовательность точек $\{x(c_k)\}$, получаемая в результате глобальной минимизации семейства функций $F(c_k, x)$, является минимизирующей последовательностью для функции φ.

Особый интерес представляют точные штрафные функции, т.е. функции, для которых существует такой штрафной параметр c^*, что для любых $c \geqslant c^*$ множество точек минимума функции $F(c, x)$ на $\mathbb{R}^n$ будет совпадать с множеством решений задачи (1). Число c^* будем называть *точным штрафным параметром* для семейства функций $F(c, x)$. Поэтому любое число, превосходящее точный штрафной параметр, является также точным штрафным параметром.

Очевидно, что реализация метода точных штрафных функций прежде всего зависит от свойств функции, с помощью которой задается ограничение. В работе рассматриваются некоторые достаточные условия, при выполнении которых функция φ пригодна для конструировании семейства штрафных функций, обладающего точным штрафным параметром. Отметим тот факт, что при выполнении этих условий, точный штрафной параметр существует всегда, какова бы ни была целевая функция, лишь бы она была локально липшицева на $\mathbb{R}^n$. Целевая функция влияет только на величину точного штрафного параметра.

2°. Точные штрафные функции. В дальнейшем будут рассматриваться локально липшицевые квазидифференцируемые функции [14]. Пусть функция f определена на $\mathbb{R}^n$, в каждой точке $x \in \mathbb{R}^n$ дифференцируема по любому направлению $g \in \mathbb{R}^n$ и при этом для ее производной по направлению справедливо разложение

$$f'(x,g) = \max_{v \in \underline{\partial} f(x)} \langle v, g \rangle + \min_{w \in \overline{\partial} f(x)} \langle w, g \rangle,$$

где $\underline{\partial} f(x) \subset \mathbb{R}^n$, $\overline{\partial} f(x) \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклые компактные множества. Функция f, удовлетворяющая этим требованиям называется *квазидифференцируемой* в точке x. Пара множеств $\mathcal{D}f(x) = [\underline{\partial} f(x), \overline{\partial} f(x)]$ называется *квазидифференциалом* квазидифференцируемой функции f в точке x, а множества $\underline{\partial} f(x) \subset \mathbb{R}^n$ и $\overline{\partial} f(x) \subset \mathbb{R}^n$ — соответственно, *субдифференциалом* и *супердифференциалом* квазидифференцируемой функции f в точке x. Квазидифференциал функции f в точке x определен неоднозначно. Если среди множества квазидифференциалов в точке $x \in \mathbb{R}^n$ функция f имеет квазидифференциал вида $\mathcal{D}f(x) = [\underline{\partial} f(x), \{0_n\}]$, то функция f называется *субдифференцируемой* функцией в этой точке. Если среди множества квазидифференциалов в точке $x \in X$ функция f имеет квазидифференциал вида $\mathcal{D}f(x) = [\{0_n\}, \overline{\partial} f(x)]$, то функция f называется *супердифференцируемой* функцией в этой точке.

Предположим, что f и φ — локально липшицевые квазидифференцируемые на $\mathbb{R}^n$ функции. Множество вида (2) называется *квазидифференцируемым множеством.*

Пусть $x \in \mathbb{R}^n$, $g \in \mathbb{R}^n$. Так как функция φ квазидифференцируема, то справедливо разложение

$$\varphi(x + \alpha g) = \varphi(x) + \alpha \varphi'(x,g) + o(\alpha, x, g),$$

где

$$\frac{o(\alpha, x, g)}{\alpha} \underset{\alpha \downarrow 0}{\longrightarrow} 0. \tag{6}$$

Предположим, что в каждой точке $x \in \mathbb{R}^n$ стремление к нулю в формуле (6) равномерно по $g \in \mathbb{R}^n$, $||g|| = 1$. Поскольку множество X является множеством точек минимума функции φ на $\mathbb{R}^n$, то в каждой точке $x \in X$ выполнено включение [10]

$$-\overline{\partial}\varphi(x) \subset \underline{\partial}\varphi(x).$$

ЛЕММА 3. *Если функция φ, определяющая множество X вида (2), супердифференцируема в точке $x \in X$, то она также и непрерывно дифференцируема в этой точке.*

Доказательство. Так как функция φ субдифференцируема в каждой точке $x \in X$, то среди множества ее квазидифференциалов в этой точке есть квазидифференциал вида $\mathcal{D}\varphi(x) = [\{0_n\}, \overline{\partial}\varphi(x)]$. Следовательно,

$$-\overline{\partial}\varphi(x) \subset \{0_n\}.$$

Но это включение возможно лишь, когда функция φ непрерывно дифференцируема в x (см. [11]). □

Пусть точка $x \in X$. Направление $g \in \mathbb{R}^n$, $||g|| \neq 0$, назовем *возможным (в широком смысле) направлением* в точке $x \in X$, если существует последовательность $\{x_k\}$ такая, что

$$x_k \in X, \quad x_k \neq x, \quad x_k \to x, \quad \frac{x_k - x}{||x_k - x||} \to \tilde{g}, \quad g = \alpha\tilde{g}, \quad \alpha > 0.$$

Замыкание всех возможных (в широком смысле) направлений в точке $x \in X$ будем обозначать через $\Gamma(X, x)$. Конус $\Gamma(X, x)$ называется *конусом Булигана* или *конусом возможных (в широком смысле) направлений множества X в точке x*. Конус Булигана является замкнутым конусом и не зависит от вида функции φ. Если точка $x \in X$ такова, что $\varphi(x) < 0$, то в этом случае $\Gamma(X, x) = \mathbb{R}^n$. Обозначим через $\Gamma^*(X, x)$ конус, сопряженный к конусу $\Gamma(X, x)$. Конус $-\Gamma^*(X, x)$ назовем *нормальным конусом* в точке $x \in X$ к множеству X и, по аналогии с выпуклым случаем, будем обозначать его через $N(X, x)$ (см. [12]). Таким образом,

$$N(X, x) = \{g \in \mathbb{R}^n \mid \langle g_1, g\rangle \leqslant 0 \quad \forall g_1 \in \Gamma(X, x)\}.$$

Исходя из этого определения, конус $N(X, x)$ является выпуклым замкнутым конусом. В некоторых точках квазидифференцируемого множества нормальный конус может состоять лишь из одного нулевого вектора. Наряду с конусом Булигана рассмотрим конус

$$\gamma_0(X, x) = \left\{ \ g \in \mathbb{R}^n \ \middle| \ \varphi'(x, g) = 0 \ \right\}.$$

Конус $\gamma_0(X, x)$ является замкнутым множеством, зависящим от свойств функции φ, определяющей множество X.

Выберем точку $z \notin X$ и спроектируем ее на X. Пусть точка x является проекцией z ($x = \mathrm{pr}(z)$) на множество X. Поскольку множество X замкнуто, то проекция точки z существует, хотя может быть не единственной. Рассмотрим множество

$$\mathcal{A}(X) = \{x \in \mathrm{bd}(X) \bigm| \exists z \notin X,\ x = \mathrm{pr}\ (z)\}.$$

Здесь и далее через $\mathrm{bd}(X)$ обозначено множество граничных точек множества X. Покажем, что в каждой точке $x \in \mathcal{A}(X)$ нормальный конус $N(X, x)$ состоит не только из нулевого вектора.

ЛЕММА 4. *Если $z \notin X$ и $x = pr(z)$, то справедливо включение*

$$(z - x) \in N(X, x).$$

Доказательство. Пусть выполнено условие леммы. Выберем произвольный вектор $g \in \Gamma(X, x)$, $||g|| \neq 0$, тогда найдется такая последовательность точек $\{x_k\}$, что

$$x_k \in X,\ x_k \neq x,\ x_k \to x,\ g_k = \frac{x_k - x}{r_k} \to g, \quad r_k = \frac{||x_k - x||}{||g||}.$$

Так как $x_k = x + r_k g_k \in X$, то

$$||z - x - r_k g_k||^2 \ \geqslant\ ||z - x||^2.$$

Отсюда имеем

$$\langle g, z - x\rangle \ \leqslant\ 0.$$

Поскольку данное неравенство справедливо для каждого $g \in \Gamma(X, x)$, то

$$(z - x) \in N(X, x).$$

$\square$

При рассмотрении оптимизационных задач при наличии квазидифференцируемых ограничений огромную роль играют свойства функций, задающих ограничение. В дальнейшем будем предполагать, что для функции φ выполнено условие регулярности:

для каждой граничной точки $x^* \in \mathrm{bd}\ (X)$ существуют такие положительные числа $\varepsilon(x^*)$ и *$\beta(x^*)$, что справедливо неравенство*

$$\frac{o(\alpha, x, g)}{\alpha} > -\varphi'(x, g) + \beta(x^*),$$
$$\forall \alpha \in (0, \varepsilon(x^*)],\ \forall x \in \mathcal{A}(X) \cap B_{\varepsilon(x^*)}(x^*),\ \forall g \in N(X, x),\ ||g|| = 1. \quad (7)$$

Здесь и далее в работе через $B_r(x)$ обозначен замкнутый шар радиуса r с центром в точке x.

ТЕОРЕМА 2. *Если множество X компактно и для функции φ выполнено условие регулярности (7), то для семейства штрафных функций*

$$F(c_k, x) = f(x) + c_k\varphi(x)$$

существует точный штрафной параметр c^*, то есть

$$x(c_k) \in X \quad \forall c_k \geqslant c^*. \tag{8}$$

Доказательство. (От противного). Пусть соотношение (8) не имеет место. Предположим, что последовательность $\{x(c_k)\}$ бесконечна и все точки $x(c_k)$ не принадлежат множеству X. Не ограничивая общности, можно считать, что $x(c_k) \to x^* \in \mathrm{bd}\,(X)$ при $c_k \to +\infty$. Обозначим через L константу Липшица функции f на множестве $\mathcal{L}(x^{**})$. Положим $c^* = L/\beta(x^*)$ и предположим, что $c_k > c^*$. Так как

$$f(y) - f(x) \geqslant -L||x-y|| \quad \forall x, y \in \mathcal{L}(x^{**}),$$

то

$$f(y) \geqslant f^* - L||x-y|| \quad \forall x \in X,\ \forall y \in \mathcal{L}(x^{**}). \tag{9}$$

Обозначим через $\rho(X,x)$ функцию евклидова расстояния от точки $y \in \mathbb{R}^n$ до множества X. Тогда из (9) имеем

$$f(y) \geqslant f^* - L\,\rho(X,y) \quad \forall y \in \mathcal{L}(x^{**}) \setminus X. \tag{10}$$

Так как $\varphi(x(c_k)) = \varphi(x_k + \alpha_k g_k)$, где

$$x_k = \mathrm{pr}\,(x(c_k)),\ g_k = \frac{x(c_k) - x_k}{\alpha_k},\ \alpha_k = \rho(X, x(c_k)) = ||x(c_k) - x_k||,$$

то $x_k \in \mathcal{A}(X)$, $g_k \in N(X, x_k)$, $||g_k|| = 1$. Следовательно, найдется такое целое число $K > 0$, что справедливо

$$x(c_k) \in B_{\varepsilon(x^*)}(x^*), \quad \forall c_k > c^*, \quad \forall k > K.$$

Применяя формулы (6) и (7), получим

$$\varphi(x_k + \alpha_k g_k) \geqslant \alpha_k\varphi'(x_k, g_k) + o(\alpha_k, x_k, g_k) \geqslant \alpha_k\beta(x^*).$$

Из этого неравенства и неравенства (9) следует, что

$$f^* \geqslant F(c_k, x(c_k)) = F^*(c_k) = f(x(c_k)) + c_k\varphi(x(c_k)) \geqslant$$

$$\geqslant f^* + c_k\alpha_k\beta(x^*) - L\alpha_k = f^* + \alpha_k(c_k\beta(x^*) - L) > f^*, \quad k > K.$$

Данное противоречие доказывает теорему. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 1. *При достаточно больших c_k любой глобальный минимум функции $F(c_k, x)$ является глобальным минимумом функции f на множестве X. Справедливо и обратное утверждение.*

Доказательство. Следует из теоремы 2 и формулы (4).

Рассмотрим один частный случай задания множества X. Пусть X - непустое компактное множество в пространстве $\mathbb{R}^n$. В качестве функции φ возьмем функцию евклидова расстояния от точки $x \in \mathbb{R}^n$ до множества $X(\varphi(x) = \rho(X, x))$. Напомним, что $\rho(X, x)$ - липшицевая функция с константой 1. Тогда эта функция удовлетворяет нашим требованиям, накладываемым на φ.

ТЕОРЕМА 3. *Для семейства штрафных функций*

$$F(x, c_k) = f(x) + c_k \rho(X, x)$$

в качестве точного штрафного параметра можно взять константу Липшица функции f на множестве $\mathcal{L}(\varphi, x^{**})$.

Доказательство. Положим $c^* = L$, где L - константа Липшица функции f на множестве $\mathcal{L}(\varphi, x^{**})$. Тогда справедливо неравенство (10). Выберем произвольное число $\bar{c} > c^*$. Докажем, что точка $x(\bar{c})$ содержится в множестве X. Предположим противное. Пусть $\rho(X, x(\bar{c})) > 0$. Тогда

$$f^* \geqslant F(\bar{c}, x(\bar{c})) = F^*(\bar{c}) = f(x(\bar{c})) + \bar{c}\varphi(x(\bar{c})) = f(x(\bar{c})) + \bar{c}\rho(X, x(\bar{c})) \geqslant$$

$$\geqslant f^* + \bar{c}\rho(X, (x(\bar{c})) - L\rho(X, (x(\bar{c})) = f^* + \rho(X, x(\bar{c}))(\bar{c} - L) > f^*.$$

Полученное противоречие доказывает теорему. $\square$

ЛЕММА 5. *Если для функции φ, задающей множество X вида (2), в точке $x^* \in \mathcal{A}(X)$ выполнено условие регулярности (7), то*

$$\varphi'(x^*, g) \geqslant \beta(x^*) \quad \forall g \in N(X, x^*), \quad ||g|| = 1.$$

Доказательство. Выберем произвольное $g \in N(X, x^*)$, $||g|| = 1$, и произвольную последовательность чисел $t_k \to +0$. Тогда

$$\frac{\varphi(x^* + t_k\, g) - \varphi(x^*)}{t_k} = \frac{t_k \varphi'(x^*, g) + o(t_k, x^*, g)}{t_k} =$$

$$= \varphi'(x^*, g) + \frac{o(t_k, x^*, g)}{t_k} > \beta(x^*).$$

Следовательно,

$$\varphi'(x^*, g) \geqslant \beta(x^*).$$

Полученное неравенство выполняется для каждого $g \in N(X, x^*)$, $||g|| = 1$. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 2. *Если для функции φ в точке $x^* \in \mathcal{A}(X)$ выполнено условие регулярности (7), то справедливо неравенство*

$$\min_{\substack{||g||=1 \\ g \in N(X,x^*)}} \varphi'(x^*,g) \geqslant \beta(x^*).$$

СЛЕДСТВИЕ 3. *Если для функции φ в точке $x^* \in \mathcal{A}(X)$ выполнено условие регулярности (7), то справедливо соотношение*

$$N(X,x^*) \bigcap \gamma_0(X,x^*) = 0_n.$$

ТЕОРЕМА 4. *Если для функции φ в граничной точке $x^* \in X$ выполнено условие регулярности (7), то справедливо соотношение*

$$\Gamma(X,x^*) = \gamma_0(X,x^*). \tag{11}$$

Доказательство. Пусть $x^* \in \mathrm{bd}\ (X)$. Поскольку функция φ непрерывна, то

$$\Gamma(X,x^*) \subset \gamma_0(X,x^*).$$

Докажем обратное включение. Пусть

$$g \in \gamma_0(X,x^*),\ ||g|| = 1.$$

Тогда $\varphi'(x^*,g) = 0$. Покажем, что $g \in \Gamma(X,x^*)$. Предположим, что $g \notin \Gamma(X,x^*)$. Так как конус Булигана замкнут, то существует такое положительное число $\bar{\alpha}$, что

$$y_\alpha = x^* + \alpha g \notin X \quad \forall \alpha \in (0,\bar{\alpha}].$$

Выберем последовательность $\{t_k\}$ так, чтобы

$$t_k \to 0, \quad t_k \in (0,\bar{\alpha}],$$

и

$$y_k = x^* + t_k g \notin X.$$

Спроектируем точки y_k на множество X. Пусть $x_k = \mathrm{pr}(y_k) \in X$. Тогда $x_k \to x^* \in \mathrm{bd}\ (X)$.

Рассмотрим два случая.

1) Если, начиная с некоторого $K > 0$, $x_k = x^*$ для каждого $k > K$, то $x^* \in \mathcal{A}(X)$, и $g \in N(X,x^*)$. Тогда вектор g не содержится в конусе $\gamma_0(X,x^*)$. Данное противоречие доказывает эту часть теоремы.

2) Пусть $x_k \neq x^*$. Положим

$$r_k = ||y_k - x_k||, s_k = \frac{y_k - x_k}{r_k}, ||s_k|| = 1, d_k = ||x_k - x^*||, p_k = \frac{x_k - x^*}{d_k}, ||p_k|| = 1.$$

Не ограничивая общности, можем считать, что

$$p_k \to p,\ s_k \to s,\ ||p|| = 1,\ ||s|| = 1.$$

Следовательно, $p \in \Gamma(X, x^*)$ и $p \neq g$. Тогда, используя лемму 4, имеем $s_k \in N(X, x_k)$. Так как $y_k = x^* + t_k g$, то

$$\varphi(y_k) = \varphi(x^* + t_k g) = \varphi(x^*) + t_k \varphi'(x^*, g) + o_1(t_k, x^*, g) = o_1(t_k, x^*, g).$$

Поскольку для функции φ в точке x^* выполнено условие регулярности (7) и последовательность $x_k \to x^*$, то найдутся такие числа $\beta(x^*) > 0$ и $K > 0$, что

$$\frac{o(r_k, x_k, s_k)}{r_k} > -\varphi'(x_k, s_k) + \beta(x^*) \quad \forall k > K.$$

Отсюда

$$o_1(t_k, x^*, g) = \varphi(y_k) = \varphi(x_k + r_k s_k) =$$
$$= \varphi(x_k) + r_k \varphi'(x_k, s_k) + o(r_k, x_k, s_k) \geqslant r_k \beta(x^*) \quad \forall k > K.$$

Рассмотрим треугольник с вершинами в точках $\{x^*, x_k, y_k\}$. Обозначим через θ_k угол между векторами p_k и g, а через μ_k угол между векторами p_k и s_k. Так как

$$\sin\theta_k / \sin\mu_k = r_k / t_k,$$

и $p_k \to p \neq g$, то существуют числа $\nu > 0$ и $K_1 > K$, что

$$\sin\theta_k > \nu > 0 \quad \forall k > K_1.$$

Следовательно,

$$r_k > \nu\, t_k \quad \forall k > K_1.$$

Таким образом,

$$r_k / t_k > \nu\ \forall k > K_1.$$

Отсюда получим неравенство

$$0 \geqslant \beta(x^*) > 0.$$

Данное противоречие полностью доказывает теорему. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 4. *Если функция φ, определяющая множество (2), непрерывно дифференцируема в каждой точке множества X, то в каждой граничной точке этого множества условие регулярности (7) не выполнено.*

СЛЕДСТВИЕ 5. *Если функция φ, определяющая множество (2), супердифференцируема в каждой точке множества X, то в каждой граничной точке этого множества условие регулярности (7) не выполнено.*

ТЕОРЕМА 5. *Если существует такое положительное число $\omega(X)$, что выполняется неравенство*

$$\inf_{x\in\mathcal{A}(X)} \min_{\substack{\|g\|=1,\\ g\in N(X,x)}} \varphi'(x,g) \geqslant \omega(X), \tag{12}$$

то для семейства штрафных функций $\{F(c_k,x)\}$ существует точный штрафной параметр.

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 3.

Заметим, что условие (12) является более конструктивным, чем условие регулярности (7), и оно также может быть использовано в качестве условия регулярности в задаче существования точного штрафного параметра.

Предположим, что для функции φ в точке $x \in \mathrm{bd}\,(X)$ выполнено условие регулярности (7). Тогда в этой точке для множества X выполнено условие (11). Так как функция φ квазидифференцируема, то для конуса $\gamma_0(X,x)$ в точке $x \in X$ справедливо представление

$$\gamma_0(X,x) = -\bigcup_{w\in\overline{\partial}\varphi(x)} \left(\mathrm{cone}\,(\underline{\partial}\varphi(x)+w)\right)^*,$$

где через $\mathrm{cone}\,(A)$ обозначена коническая оболочка множества A. Используя эту формулу, выпишем аналитическое представление нормального конуса $N(X,x)$ к данному множеству X в точке $x \in \mathrm{bd}\,(X)$ (см., например, [13]):

$$N(X,x) = \bigcap_{w\in\overline{\partial}\varphi(x)} \mathrm{cl}\;\mathrm{cone}\,(\underline{\partial}\varphi(x)+w),$$

здесь через $\mathrm{cl}\,(A)$ обозначено замыкание множества A. Тогда в точке $x \in \mathrm{bd}\,(X)$ выполнено соотношение

$$\min_{\substack{\|g\|=1,\\ g\in N(X,x)}} \varphi'(x,g) = \beta(x) > 0.$$

Таким образом, если
$$\inf_{x\in\mathcal{A}(X)}\beta(x)=\omega(X)>0,$$
то данная функция φ может быть использована для построения семейства штрафных функций.

Замечание 5.1. Условие (12) показывает, что существование точного штрафного параметра зависит от поведения функции φ в граничных точках множества X, принадлежащих множеству $\mathcal{A}(X)$.

ПРИМЕР 1. Пусть функция φ имеет вид
$$\varphi(x)=\max\{0,f_1(x),f_2(x)\},\quad x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2,$$
где
$$f_1(x)=x_1^2+x_2^2-1,\quad f_2(x)=-(x_1-1)^2-x_2^2+1.$$
Множество
$$X=\{x\in\mathbb{R}^2 \mid \varphi(x)=0\}$$
невыпукло. Рассмотрим граничные точки множества X. Если точка $x^1\in X$ такова, что
$$f_1(x^1)=0,\ f_2(x^1)<0,$$
то $x^1\in\mathcal{A}(X)$, в этой точке для множества X выполнено условие (11), и
$$\underline{\partial}\varphi(x^1)=\mathrm{co}\ \{(0,0),f_1'(x^1)\},\ \overline{\partial}\varphi(x^1)=(0,0),$$
$$N(X,x^1)=\{g\in\mathbb{R}^2 \mid g=\lambda f_1'(x^1),\quad \lambda\geqslant 0\}.$$
Здесь через $f_1'(x^1)$ обозначен градиент функции f_1 в точке x^1, а через co (A) обозначена выпуклая оболочка множества A. Тогда
$$\min_{\substack{\|g\|=1,\\ g\in N(X,x^1)}}\varphi'(x^1,g)=2.$$

Если точка $x^1\in\mathbb{R}^2$ такова, что
$$f_1(x^1)<0,\quad f_2(x^1)=0,$$
то $x^1\in\mathcal{A}(X)$, в этой точке для множества X также выполнено условие (11) и
$$\underline{\partial}\varphi(x^1)=\mathrm{co}\ \{(0,0),f_2'(x^1)\},\ \overline{\partial}\varphi(x^1)=(0,0),$$
$$N(X,x^1)=\{g\in\mathbb{R}^2 \mid g=\lambda f_2'(x^1),\lambda\geqslant 0\}.$$

Тогда

$$\min_{\substack{\|g\|=1,\\ g\in N(X,x^1)}} \varphi'(x^1,g)=2.$$

Пусть

$$x^1=(0.5,0.5\sqrt{3})\in \text{bd }(X),\ x^2=(0.5,-0.5\sqrt{3})\in \text{bd }(X).$$

Тогда

$$f_1(x^1)=0,\ f_2(x^1)=0,\quad f_1(x^2)=0,\ f_2(x^2)=0,$$

$x^1,x^2\in\mathcal{A}(X)$ и в этих точках для множества X выполнено условие (11). Имеем

$$\underline{\partial}\varphi(x^1)=\text{co }\{(0,0),f_1'(x^1),f_2'(x^1)\}=$$
$$=\text{co }\{(0,0),(1,\sqrt{3}),(1,-\sqrt{3})\},\ \overline{\partial}\varphi(x^1)=(0,0),$$
$$\underline{\partial}\varphi(x^2)=\text{co }\{(0,0),f_1'(x^2),f_2'(x^2)\}=$$
$$=\text{co }\{(0,0),(1,-\sqrt{3}),(1,\sqrt{3})\},\ \overline{\partial}\varphi(x^1)=(0,0).$$

Тогда

$$\min_{\substack{\|g\|=1,\\ g\in N(X,x^1)}} \varphi'(x^1,g)=1,\qquad \min_{\substack{\|g\|=1,\\ g\in N(X,x^2)}} \varphi'(x^2,g)=1.$$

Следовательно, в качестве числа $\omega(X)$ можно взять число 1.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим множество, являющееся объединением конечного числа прямых в пространстве $\mathbb{R}^2$, проходящих через нулевую точку. Тогда оно может быть задано в виде (2) с помощью функции

$$\varphi(x)=\min_{i\in I}\{\varphi_i(x)\},\ \varphi_i(x)=|\langle a_i,x\rangle|,$$

$$I=1,\dots,m,m>1,x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2,$$

$$a_i\in\mathbb{R}^2,\ a_i\neq(0,0),\ a_i\neq\mu_j a_j,\ i\neq j,\mu_j\neq 0,\ i,j\in I.$$

Для данной функции bd $(X)=X$, в каждой точке $x\in X$ для множества X выполнено условие (11) и множество $\mathcal{A}(X)=X\backslash(0,0)$. Нетрудно проверить, что

$$\inf_{x\in\mathcal{A}(X)}\ \min_{\substack{\|g\|=1\\ g\in N(X,x)}} \varphi'\langle x,g\rangle=\min_{i\in I}||a_i||.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Еремин И.И.* Метод “штрафов” в выпуклом программировании // Доклады АН СССР. 1967. Т. 143. № 4. С. 748–751.

2. *Zangwill W.* Non-linear programming via penalty function // Management Sci. 1967. V. 13. № 5. P. 344–358.

3. *Евтушенко Ю.Г.* Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. М., Наука, 1982. 432 с.

4. *Евтушенко Ю.Г., Жадан В.Г.* К вопросу о систематизации численных методов нелинейного программирования. Методы последовательной безусловной минимизации. М.: ВЦ АН СССР, 1988. 67 с.

5. *Федоров В.В.* О методе штрафных функций в задаче определения максимина // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1972. № 4. С. 897–908.

6. *Di Pillo G., Facchinei F.* Regularity conditions and exact penalty functions in Lipschitz programming problems // In Nonsmooth optimization methods and applications. Ed.F.Gianessi, Gordon and Breach, Amsterdam, 1992. P. 107–120.

7. *Васильев Ф.П.* Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1980. 520 с.

8. *Карманов В.Г.* Математическое программирование. М.: Наука, 1980. 256 с.

9. *Эльстер К.-Х., Рейнгард Р., Шойбле М., Донат Г.* Ввведение в нелинейное программирование. М.: Наука, 1985. 263 с.

10. *Полякова Л.Н.* Необходимые условия экстремума квазидифференцируемых функций // Вестн. Ленингр. ун-та, 1980. № 13. С. 57-62.

11. *Кларк Ф.* Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988. 280 с.

12. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 472 с.

13. *Полякова Л.Н.* Об одной задаче негладкой оптимизации // Кибернетика, 1982. № 2. С. 119–122.

14. *Демьянов В.Ф.* Точные штрафные функции в задачах негладкой оптимизации // Вестн. Санкт-Петерб. ун-та. 1994. Вып. 4.(№ 22). Сер. 1 - С. 21–27.

15. *Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В.* Курс методов оптимизации. М.: Наука, 1986. 325 с.

16. *Dem'yanov V.F., Stavroulakis G.E., Polyakova L.N., Panagiotopoulos P.D.* Quasidifferentiability and nonsmooth modelling in mechanics, Engineering and economics. Kluwer Academic, Doordrecht, 1996. 350 p.

17. *Полякова Л.Н.* О методе точных штрафных квазидифференцируемых функций// Журнал вычислительной математики и математической физики. 2001, т. 41. № 2, С. 225–238.