

О СЛАБЫХ ЭКЗОСТЕРАХ*

М. Э. Аббасов

abbasov.majid@gmail.com

18 января 2014 г.

Аннотация Понятие «экзостер» было введено В. Ф. Демьяновым в работе [1]. Дальнейшему анализу этого понятия посвящены работы [2–5]. В данном докладе даётся обзор недавних результатов по слабым экзостерам [6, 7].

1°. Определения и дополнительные сведения

Пусть $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, где $X \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество. Будем говорить, что у функции f в точке $x \in X$ существует верхний экзостер, если имеет место разложение

$$f(x + \Delta) = f(x) + \inf_{C \in E^*(x)} \max_{v \in C} \langle v, \Delta \rangle + o_x(\Delta), \quad (1)$$

где

$$\lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{o_x(\alpha \Delta)}{\alpha} = 0 \quad \forall \Delta \in \mathbb{R}^n, \quad (2)$$

а $E^*(x)$ — семейство выпуклых компактов в $\mathbb{R}^n$, называемое верхним экзостером.

Будем говорить, что у функции f в точке $x \in X$ существует нижний экзостер, если имеет место разложение

$$f(x + \Delta) = f(x) + \sup_{C \in E_*(x)} \min_{v \in C} \langle v, \Delta \rangle + o_x(\Delta), \quad (3)$$

где

$$\lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{o_x(\alpha \Delta)}{\alpha} = 0 \quad \forall \Delta \in \mathbb{R}^n, \quad (4)$$

а $E_*(x)$ — семейство выпуклых компактов в $\mathbb{R}^n$, называемое нижним экзостером. Обратим внимание, что экзостеры определяются неоднозначно.

Существует широкий класс негладких функций, допускающих разложения (1), (3).

*Семинар по конструктивному негладкому анализу и недифференцируемой оптимизации «CNSA & NDO»: <http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/>

Пусть $f(\bar{x}) < \infty$, где $\bar{x} \in X$. Пара $(x^*, c) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ называется *слабым субградиентом* f в точке $\bar{x}$, если для любого $x \in \mathbb{R}^n$ выполняется неравенство

$$-c\|x - \bar{x}\| + \langle x^*, x - \bar{x} \rangle \leq f(x) - f(\bar{x}).$$

Множество всех таких пар называется *слабым субдифференциалом* функции f в точке $\bar{x}$ и обозначается $\underline{\partial}^\omega f(\bar{x})$.

Пара $(x^*, c) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ называется *слабым суперградиентом* f в точке $\bar{x} \in X$, если для любого $x \in \mathbb{R}^n$ выполняется неравенство

$$c\|x - \bar{x}\| + \langle x^*, x - \bar{x} \rangle \geq f(x) - f(\bar{x}).$$

Множество всех таких пар называется *слабым супердифференциалом* функции f в точке $\bar{x}$ и обозначается $\overline{\partial}^\omega f(\bar{x})$.

Напомним, что в определении «обычных» суб- и супердифференциалов в соответствующих неравенствах нет слагаемого c .

Если $\underline{\partial}^\omega f(\bar{x}) \neq \emptyset$, то функция f называется *слабо субдифференцируемой* в точке $\bar{x}$.

Если $\overline{\partial}^\omega f(\bar{x}) \neq \emptyset$, то функция f называется *слабо супердифференцируемой* в точке $\bar{x}$.

В [7] получены следующие результаты:

ТЕОРЕМА 1. Пусть $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ положительно однородная функция. Если f полунепрерывна снизу, то f слабо субдифференцируема в 0_n и

$$f(g) = \sup \{ \langle x^*, g \rangle - c\|g\| \mid (x^*, c) \in \underline{\partial}^\omega f(0_n) \}, \quad \forall g \in \mathbb{R}^n.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ положительно однородная функция. Если f полунепрерывна сверху, то f слабо супердифференцируема в 0_n и

$$f(g) = \inf \{ \langle x^*, g \rangle + c\|g\| \mid (x^*, c) \in \overline{\partial}^\omega f(0_n) \}, \quad \forall g \in \mathbb{R}^n.$$

Обозначим $B(x^*, c)$ замкнутый шар радиуса c с центром в x^* .

ТЕОРЕМА 3. Пусть функция $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — положительно однородна и полунепрерывна сверху. Тогда семейство

$$E^\omega = \{B(x^*, c) \mid (x^*, c) \in \overline{\partial}^\omega h(0_n)\}$$

является верхним экзостером функции h .

ТЕОРЕМА 4. Пусть функция $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — положительно однородна и полунепрерывна снизу. Тогда семейство

$$E_\omega = \{B(x^*, c) \mid (x^*, c) \in \underline{\partial}^\omega h(0_n)\}$$

является нижним экзостером функции h .

Так как эти экзостеры конструируются с помощью слабых суб- и супердифференциалов, то будем называть их *слабыми экзостерами*.

2°. Основные результаты.

Для облегчения работы с экзостерами естественным является желание каким-то образом «уменьшить» эти семейства (например, путем отбрасывания «лишних», «ненужных» множеств). Впервые данную задачу изучала В.А. Рощина [3]. В работе [6] на основании результатов Рощиной предлагается решение аналогичной задачи для слабых экзостеров. Итак, пусть $\text{bd}(A)$ обозначает границу множества A . Тогда справедливы следующие результаты.

ТЕОРЕМА 5. Пусть функция $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ – положительно однородна и полунепрерывна снизу. Тогда семейство множеств

$$\tilde{E}_\omega = \{B(x^*, c) \mid (x^*, c) \in \text{bd}(\underline{\partial}^\omega h(0_n))\}$$

является нижним экзостером функции h .

ТЕОРЕМА 6. Пусть функция $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ – положительно однородна и полунепрерывна сверху. Тогда семейство множеств

$$\tilde{E}^\omega = \{B(x^*, c) \mid (x^*, c) \in \text{bd}(\overline{\partial}^\omega h(0_n))\}$$

является верхним экзостером функции h .

ПРИМЕР 1. Пусть $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ и $h(x_1, x_2) = -\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $\bar{x} = (0, 0)$. Вычислим слабый субдифференциал h в точке $\bar{x}$. По определению имеем:

$$-c\sqrt{x_1^2 + x_2^2} + ax_1 + bx_2 \leq -\sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

что эквивалентно

$$a \sin \alpha + b \cos \alpha \leq c - 1, \quad \forall \alpha \in [0, 2\pi],$$

где $\sin \alpha = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$, $\cos \alpha = \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$. Ясно, что последнее неравенство справедливо тогда и только тогда, когда оно выполнено для α , такого что $\sin \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\cos \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Поэтому

$$\underline{\partial}^\omega h(0, 0) = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \mid a^2 + b^2 \leq (c - 1)^2, c \geq 1\},$$

а по теореме 5

$$\begin{aligned} \tilde{E}_\omega &= \{\overline{B}((a, b), c) \mid (a, b, c) \in \text{bd}(\underline{\partial}^\omega h(0, 0))\} = \\ &= \{\overline{B}((a, b), c) \mid a^2 + b^2 = (c - 1)^2, c \geq 1\}. \end{aligned}$$

УТВЕРЖДЕНИЕ. Слабый субдифференциал и супердифференциал нулевой функции $0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ совпадают

$$\underline{\partial}^\omega 0(0_n) = \overline{\partial}^\omega 0(0_n) = \{(x^*, c) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid \|x^*\| \leq c\}.$$

Действительно, по определению, если пара (x^*, c) является слабым субградиентом, то для произвольного $\bar{x}$, и, в частности, для $\bar{x} = 0_n$ должно быть выполнено неравенство

$$-c\|x - \bar{x}\| + \langle x^*, x - \bar{x} \rangle \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Ясно, что это неравенство выполняется тогда и только тогда, когда

$$\|x^*\| \|x - \bar{x}\| \leq c \|x - \bar{x}\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

откуда и следует справедливость утверждения относительно $\underline{\partial}^\omega 0(0_n)$. Совершенно аналогично можно показать справедливость утверждения и для $\overline{\partial}^\omega 0(0_n)$.

ТЕОРЕМА 7. Пусть $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ положительно однородная, полунепрерывная снизу функция. Если существует множество $A \subset \underline{\partial}^\omega h(0_n)$, такое что

$$A + \underline{\partial}^\omega 0(0_n) = \underline{\partial}^\omega h(0_n),$$

то семейство множеств $E_A = \{B(x^*, c) \mid (x^*, c) \in A\}$ – нижний экзостер функции h , полученный сокращением слабого нижнего экзостера.

ТЕОРЕМА 8. Пусть $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ положительно однородная, полунепрерывная сверху функция. Если существует множество $A \subset \overline{\partial}^\omega h(0_n)$, такое что

$$A + \overline{\partial}^\omega 0(0_n) = \overline{\partial}^\omega h(0_n),$$

то семейство множеств $E^A = \{B(x^*, c) \mid (x^*, c) \in A\}$ – верхний экзостер функции h , полученный сокращением слабого верхнего экзостера.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим $h(x) = -|x|$ в точке 0. По определению слабого субградиента для любого $x \in \mathbb{R}$ должно выполняться неравенство

$$-c|x| + x^*x \leq -|x|,$$

откуда

$$x^*x \leq |x|(c - 1), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

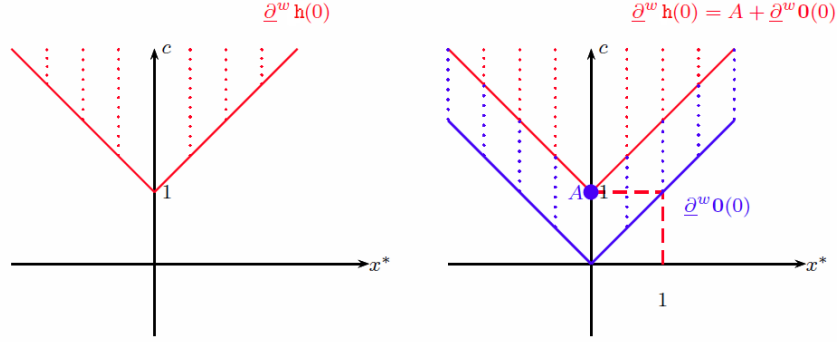
То есть

$$\begin{cases} x^* \leq c - 1 & \text{при } x > 0, \\ x^* \geq -c + 1 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Поэтому получаем

$$\underline{\partial}^\omega h(0) = \{(x^*, c) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid |x^*| \leq c - 1\}.$$

При $A = \{(0, 1)\}$ имеем $A + \underline{\partial}^\omega 0(0_n) = \underline{\partial}^\omega h(0)$. Поэтому по теореме 7 получаем $E_A = [-1, 1]$.



ТЕОРЕМА 9. Пусть функция $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ – положительно однородна и полунепрерывна снизу. Если

$$A = \min(\underline{\partial}^\omega h(0_n), \underline{\partial}^\omega 0(0_n)) = \{\bar{x} \in \underline{\partial}^\omega h(0_n) \mid (\{\bar{x}\} - \underline{\partial}^\omega 0(0_n)) \cap \underline{\partial}^\omega h(0_n) = \{\bar{x}\}\},$$

то $E_A = \{B(x^*, c) \mid (x^*, c) \in A\}$ – нижний экзостер функции h .

ПРИМЕР 3. Рассмотрим $h(x) = -|x|$ в точке 0. Имеем

$$(\{(0; 1)\} - \underline{\partial}^\omega 0(0)) \cap \underline{\partial}^\omega h(0) = \{(0; 1)\},$$

откуда

$$\{(0; 1)\} = \min(\underline{\partial}^\omega h(0), \underline{\partial}^\omega 0(0)).$$

По теореме 9 получаем $E_A = [-1, 1]$.

Обозначим $f_D^\downarrow, f_D^\uparrow, f_H^\downarrow, f_H^\uparrow$ – нижние и верхние производные Дини и Адамара соответственно.

ТЕОРЕМА 10. Пусть $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ и функция $h(g) = f_D^\downarrow(\bar{x}, g)$ полунепрерывна сверху. Если $\bar{x}$ локальный (глобальный) минимум f и существует $A \subset \bar{\partial}^\omega h(0_n)$, такое что $A + \bar{\partial}^\omega 0(0_n) = \bar{\partial}^\omega h(0_n)$, то выполнено одно из условий:

- 1) $0_n \in B(x^*, c) \forall (x^*, c) \in A$;
- 2) $\|x^*\| \leq c, \forall (x^*, c) \in A$;
- 3) $A \subset \bar{\partial}^\omega 0(0_n)$.

Обозначим $U(x^*, c)$ открытый шар радиуса c с центром в точке x^* .

ТЕОРЕМА 11. Пусть $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ и функция $h(g) = f_H^\downarrow(\bar{x}, g)$ непрерывна сверху. Если существует $A \subset \bar{\partial}^\omega h(0_n)$, такое что $A + \bar{\partial}^\omega 0(0_n) = \bar{\partial}^\omega h(0_n)$ и выполнено одно из нижеописанных условий, то $\bar{x}$ строгий локальный минимум функции f :

- 1) $0_n \in U(x^*, c) \ \forall (x^*, c) \in A$;
- 2) $\|x^*\| < c, \ \forall (x^*, c) \in A$;
- 3) $A \subset \text{int}(\bar{\partial}^\omega 0(0_n))$.

Аналогично формулируются условия максимума.

ТЕОРЕМА 12. Пусть $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ и функция $h(g) = f_D^\uparrow(\bar{x}, g)$ непрерывна снизу. Если $\bar{x}$ локальный (глобальный) максимум f и существует $A \subset \underline{\partial}^\omega h(0_n)$, такое что $A + \underline{\partial}^\omega 0(0_n) = \underline{\partial}^\omega h(0_n)$, то выполнено одно из условий:

- 1) $0_n \in B(x^*, c) \ \forall (x^*, c) \in A$;
- 2) $\|x^*\| \leq c, \ \forall (x^*, c) \in A$;
- 3) $A \subset \underline{\partial}^\omega 0(0_n)$.

ТЕОРЕМА 13. Пусть $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ и функция $h(g) = f_H^\uparrow(\bar{x}, g)$ непрерывна снизу. Если существует $A \subset \underline{\partial}^\omega h(0_n)$, такое что $A + \underline{\partial}^\omega 0(0_n) = \underline{\partial}^\omega h(0_n)$ и выполнено одно из нижеописанных условий, то $\bar{x}$ строгий локальный максимум функции f :

- 1) $0_n \in U(x^*, c) \ \forall (x^*, c) \in A$;
- 2) $\|x^*\| < c, \ \forall (x^*, c) \in A$;
- 3) $A \subset \text{int}(\underline{\partial}^\omega 0(0_n))$.

ПРИМЕР 4. Рассмотрим $f(x_1, x_2) = -\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $\bar{x} = (0, 0)$.

$$h(\bar{x}) = f_H'(\bar{x}; (g_1, g_2)) = -\sqrt{g_1^2 + g_2^2}.$$

В примере 1 мы получили

$$\underline{\partial}^\omega h(0, 0) = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \mid a^2 + b^2 \leq (c-1)^2, c \geq 1\}.$$

Но

$$A = \min(\underline{\partial}^\omega h(0, 0), \underline{\partial}^\omega 0(0, 0)) = \{(0, 0, 1)\},$$

поэтому

$$A \subset \text{int}(\underline{\partial}^\omega 0(0, 0)) = \{(a, b, c) \mid a^2 + b^2 \leq c^2, c > 0\}.$$

По теореме 13 точка $\bar{x}$ – строгий локальный максимум f .

ЛИТЕРАТУРА

1. V. F. Demyanov, Exhausters and Convexifiers – New Tools in Nonsmooth Analysis // In: V. Demyanov and A. Rubinov (Eds.) Quasidifferentiability and related topics. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000. P. 85–137.
2. V. F. Demyanov, V. A. Roschina, *Optimality conditions in terms of upper and lower exhausters* // Optimization. 2006. Vol. 55, N 5/6, P. 525–540.
3. V. A. Roschina, *Reducing Exhausters*, J. Optim. Theory Appl. 2008. Vol. 136, No. 2, P. 261–273.
4. М. Э. Аббасов, В. Ф. Демьянов, Условия экстремума негладкой функции в терминах экзостеров и коэкзостеров. // Труды института математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15. С. 10–19.
5. V. F. Demyanov, M. E. Abbasov *Proper and adjoint exhausters in nonsmooth analysis: optimality conditions*, Journal of Global Optimization. 2013. Vol. 56, Issue 2, P. 569–585.
6. M. Küçük, R. Urbanski, J. Grzybowski et al. *Reduction of weak exhausters and optimality conditions via reduced weak exhausters*, Journal of Optimization Theory and Applications (Under review).
7. M. Küçük, R. Urbanski, J. Grzybowski et al. *Weak Subdifferential/Superdifferential, Weak Exhausters and Optimality Conditions*. Optimization (Under review).