ЭТЮД НА ТЕМУ ВТОРОЙ ЗАДАЧИ ЗОЛОТАРЁВА*

В. Н. Малозёмов — malv@math.spbu.ru
М. П. Сукач — nskmike@yandex.ru
Г. Ш. Тамасян — g.tamasyan@spbu.ru

3 апреля 2014 г.

1°. Обозначим

$$P_n(x,t) = t^n + x_1 t^{n-1} + x_2 t^{n-2} + \ldots + x_n.$$

Вторая задача Золотарёва ставится так [1]: *минимизировать величину*

$$\varphi_n(x) = \max_{t \in [-1,1]} |P_n(x,t)|$$

при ограничении

$$P_n(x,a) = A,$$

где $a > 1$ и A — произвольное вещественное число.

Решение этой задачи существует и единственно. Сформулируем критерий оптимальности.

Для того чтобы план x^* был оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы соответствующий полином $P_n(x^*,t)$ обладал полным альтернансом, то есть чтобы нашлись точки $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ из $[-1,1]$, в которых

$$|P_n(x^*,t_i)| = \varphi_n(x^*), \quad i = 1,\ldots,n;$$

$$P_n(x^*,t_i) = -P_n(x^*,t_{i-1}), \quad i = 2,\ldots,n.$$

Представляет интерес более детальная информация о расположении точек альтернанса в зависимости от параметра A. Мы исследуем этот вопрос в простейшем случае $n = 2$.

*Семинар по конструктивному негладкому анализу и недифференцируемой оптимизации «CNSA & NDO»: `http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/`

2°. Полином второй степени $P_2^*(t) = P_2(x^*, t)$ со старшим коэффициентом, равным единице, допускает представление

$$P_2^*(t) = (t - c)^2 + h.$$

График полинома $P_2^*(t)$ можно получить из графика полинома $\widetilde{P}_2(t) = t^2$ (параболы) с помощью последовательного сдвига вдоль оси абсцисс и оси ординат. Число c есть абсцисса вершины параболы $P_2^*(t)$.

По условию полином $P_2^*(t)$ имеет две точки альтернанса. Выясним, как это может выглядеть при различных c. Рассмотрим четыре случая.

1) $|c| \geqslant 1$. Абсцисса вершины параболы $P_2^*(t)$ находится вне интервала $(-1, 1)$, поэтому на отрезке $[-1, 1]$ полином $P_2^*(t)$ изменяется строго монотонно. Точками альтернанса могут быть только концы отрезка $[-1, 1]$, так что $t_1 = -1$, $t_2 = 1$. Условие $P_2^*(-1) = -P_2^*(1)$ принимает вид $(1 + c)^2 + h = -(1 - c)^2 - h$, откуда следует равенство

$$h = -(1 + c^2).$$

Таким образом, при $|c| \geqslant 1$ имеем

$$P_2^*(t) = (t - c)^2 - (1 + c^2) = t^2 - 2c\,t - 1. \tag{1}$$

2) $c \in (-1, 0)$. В этом случае необходимо $t_1 = c$, $t_2 = 1$. Условие $P_2^*(c) = -P_2^*(1)$ принимает вид $h = -(1 - c)^2 - h$, так что

$$h = -\tfrac{1}{2}(1 - c)^2.$$

Получаем

$$P_2^*(t) = (t - c)^2 - \tfrac{1}{2}(1 - c)^2 \quad \text{при} \;\; c \in (-1, 0). \tag{2}$$

3) $c \in (0, 1)$. Геометрически очевидно, что $t_1 = -1$, $t_2 = c$. Условие $P_2^*(-1) = -P_2^*(c)$ принимает вид $(1 + c)^2 + h = -h$, так что

$$h = -\tfrac{1}{2}(1 + c)^2$$

и

$$P_2^*(t) = (t - c)^2 - \tfrac{1}{2}(1 + c)^2 \quad \text{при} \;\; c \in (0, 1). \tag{3}$$

4) $c = 0$. Полином

$$P_2^*(t) = t^2 - \tfrac{1}{2} \tag{4}$$

имеет три точки максимального по модулю отклонения $t = -1,\ 0,\ 1$. Из них можно составить два альтернанса: $t_1 = -1$, $t_2 = 0$ и $t_1 = 0$, $t_2 = 1$.

3°. Положим $A(c) = P_n^*(a)$. На основании (1)–(4) имеем

$$A(c) = \begin{cases} a^2 - 2ac - 1 & \text{при } \ |c| \geqslant 1, \\ (a-c)^2 - \frac{1}{2}(1-c)^2 & \text{при } \ c \in (-1,0), \\ a^2 - \frac{1}{2} & \text{при } \ c = 0, \\ (a-c)^2 - \frac{1}{2}(1+c)^2 & \text{при } \ c \in (0,1). \end{cases} \tag{5}$$

При этом

$$A'(c) = \begin{cases} -2a, & \text{если } \ |c| > 1, \\ c - 2a + 1, & \text{если } \ c \in (-1,0), \\ c - 2a - 1, & \text{если } \ c \in (0,1). \end{cases} \tag{6}$$

Формулы (5), (6) позволяют сделать следующие выводы: функция $A(c)$ непрерывна на $\mathbb{R}$ и непрерывно дифференцируема по полуосях $(-\infty, 0]$ и $[0, +\infty)$; в точке $c = 0$ производная терпит разрыв,

$$A'(-0) = -2a + 1, \quad A'(+0) = -2a - 1,$$

причем величина скачка производной, $A'(-0) - A'(+0) = 2$, не зависит от a; в силу условия $a > 1$ функция $A(c)$ строго убывает на $\mathbb{R}$ от $+\infty$ до $-\infty$.

На рис. 1 изображен график функции $A(c)$ при $a = \frac{3}{2}$, 2, 3.

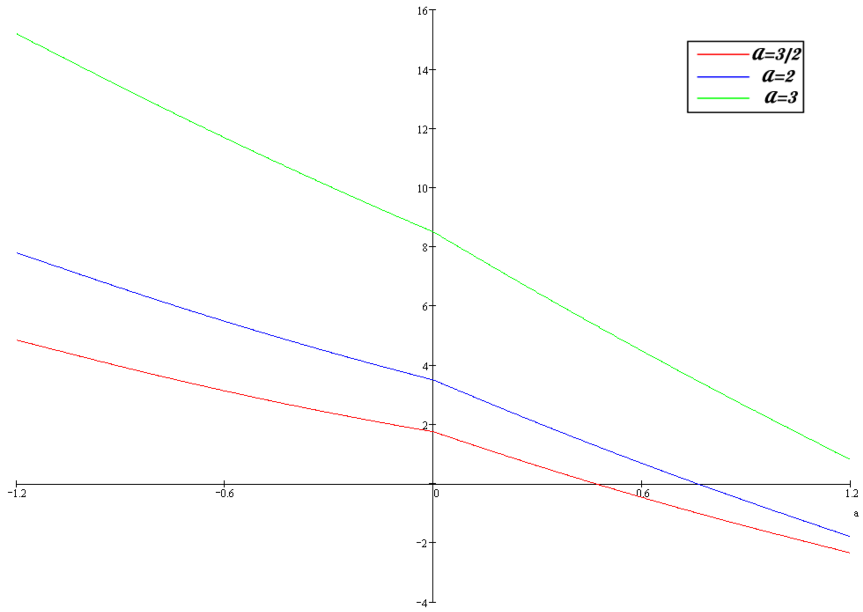


Рис. 1. График функции $A(c)$ при $a = \frac{3}{2}$, 2, 3.

4°. Вернемся к постановке Второй задачи Золотарёва и покажем, как находить её решение при $n = 2$, фиксированном $a > 1$ и произвольном A.

Основное действие — это решение уравнения $A(c) = A$, где $A(c)$ — функция вида (5). Предварительно вычисляем

$$A(-1) = a^2 + 2a - 1, \quad A(0) = a^2 - \tfrac{1}{2}, \quad A(1) = a^2 - 2a - 1.$$

Если $A \in (-\infty, A(-1)]$, то находим единственное на $(-\infty, -1]$ решение линейного уравнения

$$a^2 - 2ac - 1 = A.$$

Решение задачи Золотарёва принимает вид (1).

Если $A \in (A(-1), A(0))$, то находим единственное на $(-1, 0)$ решение квадратного уравнения

$$(a - c)^2 - \tfrac{1}{2}(1 - c)^2 = A.$$

Решение задачи Золотарёва принимает вид (2).

При $A = A(0)$ решением будет полином Чебышёва (4), имеющий избыточный (трёхточечный) альтернанс.

Если $A \in (A(0), A(1))$, то находим единственное на $(0, 1)$ решение квадратного уравнения

$$(a - c)^2 - \tfrac{1}{2}(1 + c)^2 = A.$$

Решение задачи Золотарёва принимает вид (3).

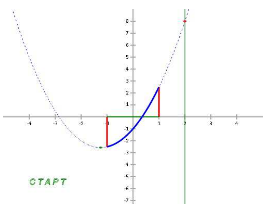
Наконец, если $A \in [A(1), +\infty)$, то находим единственное на $[1, +\infty)$ решение линейного уравнения

$$a^2 - 2ac - 1 = A.$$

Решение задачи Золотарёва принимает вид (1).

Ниже представлен этюд, который в динамическом режиме показывает, как выглядит решение Второй задачи Золотарёва при $n = 2$, $a = 2$ и различных A (воспользуйтесь кнопками «СТАРТ», «ПРОДОЛЖИТЬ» и «ПОВТОРИТЬ»).

Этюд на тему Второй задачи Золотарёва.



ЛИТЕРАТУРА

1. Золотарёв Е. И. *Приложение эллиптических функций к вопросам о функциях, наименее и наиболее отклоняющихся от нуля* / В кн.: Полное собрание сочинений. Вып. 2. Л.: Изд-во АН СССР, 1932. С. 27–29.