АЛЬТЕРНАНСНЫЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЯ ВТОРОЙ ЗАДАЧИ ЗОЛОТАРЁВА*

В. Н. Малозёмов — malv@math.spbu.ru

Г. Ш. Тамасян — g.tamasyan@spbu.ru

24 апреля 2014 г.

Аннотация. Продолжается изучение расположения точек альтернанса у решения Второй задачи Золотарёва в зависимости от параметра, начатое в докладе [1].

1°. Напомним постановку Второй задачи Золотарёва [2].

Обозначим

$$P_n(x,t) = t^n + x_1 t^{n-1} + x_2 t^{n-2} + \ldots + x_n.$$

Требуется минимизировать величину

$$\varphi_n(x) = \max_{t\in[-1,1]} |P_n(x,t)|$$

при ограничении

$$P_n(x,a) = A,$$

где $a > 1$ и A — произвольное вещественное число.

Решение этой задачи существует и единственно. Оно характеризуется следующим свойством:

для того чтобы план x^* был оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы соответствующий полином $P_n(x^*,t)$ обладал полным альтернансом, то есть чтобы нашлись точки $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ из $[-1,1]$, в которых

$$|P_n(x^*,t_i)| = \varphi_n(x^*), \quad i = 1,\ldots,n;$$

$$P_n(x^*,t_i) = -P_n(x^*,t_{i-1}), \quad i = 2,\ldots,n.$$

В простейшем случае $n = 2$ расположение точек альтернанса в зависимости от параметра A проанализировано в докладе [1]. Теперь мы рассмотрим случай $n = 3$, после которого прояснится альтернансная картина для произвольного n.

---

*Семинар по конструктивному негладкому анализу и недифференцируемой оптимизации «CNSA & NDO»: `http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/`

2°. Нас интересуют полиномы третьей степени вида

$$P_3(t) = t^3 - \tfrac{3}{2}(c+d)t^2 + 3cdt + h. \tag{1}$$

В этом случае

$$P_3'(t) = 3(t-c)(t-d),$$
$$P_3''(c) = 3(c-d), \qquad P_3''(d) = -3(c-d).$$

В дальнейшем мы будем выбирать параметры c и d так, чтобы выполнялось неравенство $c < d$. Это гарантирует монотонное возрастание полинома $P_3(t)$ на $(-\infty, c]$, монотонное убывание $P_3(t)$ на $[c, d]$ и снова монотонное возрастание $P_3(t)$ на $[d, +\infty)$. Отметим также, что

$$P_3(c) = \tfrac{3}{2}c^2 d - \tfrac{1}{2}c^3 + h. \tag{2}$$

Параметр c считаем свободным. Параметры d и h будем выбирать так, чтобы соответствующий полином $P_3^*(t)$ обладал полным (трёхточечным) альтернансом. При этом будем следить за величиной $A(c) = P_3^*(a)$.

3°. Рассмотрим четыре случая.

1) $c \leqslant -1$. Из геометрических соображений ясно, что точками альтернанса должны быть $t_1 = -1$, $t_2 = d$, $t_3 = 1$. Альтернансные условия запишем в виде

$$P_3^*(-1) = P_3^*(1), \quad P_3^*(d) = -P_3^*(1).$$

Из первого условия и формулы (1) следует, что

$$d = -\tfrac{1}{3c}, \quad d \in (0, \tfrac{1}{3}].$$

При этом

$$P_3^*(t) = t(t^2-1) - \tfrac{3}{2}(c - \tfrac{1}{3c})t^2 + h, \tag{3}$$
$$P_3^*(d) = \frac{1}{6c} + \frac{1}{54c^3} + h.$$

Коэффициент h находим из второго альтернансного условия:

$$h = \frac{81c^4 - 36c^2 - 1}{108c^3}. \tag{4}$$

Таким образом, при $c \leqslant -1$ полином $P_3^*(t)$ допускает представление (3), в котором коэффициент h определяется формулой (4).

2) $c \in (-1, -\frac{1}{2}]$. В этом случае $t_1 = c$, $t_2 = d$, $t_3 = 1$. Альтернансные условия запишем в виде

$$P_3^*(c) = P_3^*(1), \quad P_3^*(d) = -P_3^*(1), \quad P_3^*(-1) \geqslant P_3^*(d).$$

Из первого условия и формул (1), (2) следует, что

$$d = \tfrac{1}{3}(c+2), \quad d \in (\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{2}].$$

При этом

$$P_3^*(t) = t^3 - (2c+1)t^2 + c(c+2)t + h, \tag{5}$$
$$P_3^*(d) = \frac{1}{27}(c+2)^2(4c-1) + h,$$
$$P_3^*(1) = c^2 + h.$$

Коэффициент h находим из второго альтернансного условия:

$$h = \tfrac{1}{2}\left[-c^2 - \tfrac{1}{27}(c+2)^2(4c-1)\right] = \tfrac{2}{27}(1-c)^3 - c^2. \tag{6}$$

Таким образом, при $c \in (-1, -\frac{1}{2}]$ полином $P_3^*(t)$ допускает представление (5), в котором коэффициент h определяется формулой (6).

Последнее альтернансное условие $P_3^*(-1) \geqslant P_3^*(d)$ равносильно неравенству

$$(2c+1)(c+5)^2 \leqslant 0.$$

При $c \in (-1, -\frac{1}{2}]$ оно выполняется автоматически (при $c = -\frac{1}{2}$ становится равенством).

Отметим, что при $c = -\frac{1}{2}$ полином $P_3^*(t)$ принимает вид

$$P_3^*(t) = t^3 - \tfrac{3}{4}t,$$

то есть при $c = -\frac{1}{2}$ полином $P_3^*(t)$ совпадает с полиномом Чебышёва третьей степени, наименее уклоняющимся от нуля на отрезке $[-1, 1]$. Этот полином имеет дополнительную точку альтернанса $t = -1$. При увеличении параметра c точку альтернанса $t = -1$ мы сохраним.

3) $c \in (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3})$. Альтернанс будем искать в виде $t_1 = -1$, $t_2 = c$, $t_3 = d$. Запишем альтернансные условия

$$P_3^*(-1) = P_3^*(d), \quad P_3^*(c) = -P_3^*(-1), \quad P_3^*(1) \leqslant P_3^*(c).$$

В силу (1) первое условие сводится к уравнению относительно d:

$$d^3 - 3cd^2 - 3(2c+1)d - 3c - 2 = 0.$$

Легко проверить, что полином $Q_3(d)$, стоящий в левой части этого уравнения, имеет двойной корень $d = -1$. Полином $Q_3(d)$ разлагается на множители

$$Q_3(d) = (d+1)^2(d-3c-2).$$

Нас интересует корень $Q_3(d)$, удовлетворяющий неравенству $c < d$. Очевидно, что

$$d = 3c+2, \quad d \in (\tfrac{1}{2}, 1).$$

При этом

$$P_3^*(t) = t^3 - 3(2c+1)t^2 + 3c(3c+2)t + h, \tag{7}$$
$$P_3^*(c) = 4c^3 + 3c^2 + h,$$
$$P_3^*(-1) = -9c^2 - 12c - 4 + h.$$

Коэффициент h находим из второго альтернансного условия:

$$h = -2c^3 + 3c^2 + 6c + 2. \tag{8}$$

Таким образом, при $c \in (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3})$ полином $P_3^*(t)$ допускает представление (7), в котором коэффициент h определяется формулой (8).

Последнее альтернансное условие $P_3^*(1) \leqslant P_3^*(c)$ равносильно неравенству

$$(2c+1)(c-1)^2 \geqslant 0.$$

При $c \in (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3})$ оно выполняется автоматически (даже как строгое неравенство).

4) $c \in [-\frac{1}{3}, 0)$. Положим $t_1 = -1$, $t_2 = c$, $t_3 = 1$. Запишем альтернансные условия

$$P_3^*(-1) = P_3^*(1), \quad P_3^*(c) = -P_3^*(1).$$

Из первого условия следует, что

$$d = -\tfrac{1}{3c}, \quad d \in [1, +\infty).$$

При этом

$$P_3^*(t) = t(t^2 - t) - \tfrac{3}{2}(c - \tfrac{1}{3c})t^2 + h, \tag{9}$$
$$P_3^*(c) = -\tfrac{1}{2}c^3 - \tfrac{1}{2}c + h,$$
$$P_3^*(1) = -\tfrac{3}{2}c + \tfrac{1}{2c} + h.$$

Коэффициент h находим из второго альтернансного условия:

$$h = \tfrac{c^4 + 4c^2 - 1}{4c}. \tag{10}$$

Таким образом, при $c \in [-\frac{1}{3}, 0)$ полином $P_3^*(t)$ допускает представление (9) (такое же, как при $c \leqslant -1$), в котором коэффициент h определяется формулой (10).

4°. Положим $A(c) = P_3^*(a)$. На основании (3)–(10) имеем

$$A(c) = \begin{cases} \frac{3}{4}(1-2a^2)c + a(a^2-1) + \frac{1}{6}(3a^2-2)\frac{1}{c} - \frac{1}{108c^3} & \text{при } c \leqslant -1, \\ -\frac{2}{27}c^3 + (a-\frac{7}{9})c^2 - 2(a^2-a+\frac{1}{9})c + a^3 - a^2 + \frac{2}{27} & \text{при } c \in (-1, -\frac{1}{2}], \\ -2c^3 + 3(3a+1)c^2 - 6(a^2-a-1)c + a^3 - 3a^2 + 2 & \text{при } c \in (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}), \\ \frac{1}{4}c^3 + \frac{1}{2}(2-3a^2)c + a(a^2-1) + \frac{1}{4}(2a^2-1)\frac{1}{c} & \text{при } c \in [-\frac{1}{3}, 0). \end{cases}$$

При этом

$$A'(c) = \begin{cases} \frac{1}{36c^4} - \frac{1}{6}(3a^2-2)\frac{1}{c^2} + \frac{3}{4}(1-2a^2) & \text{при } c < -1, \\ -\frac{2}{9}c^2 + 2(a-\frac{7}{9})c - 2(a^2-a+\frac{1}{9}) & \text{при } c \in (-1, -\frac{1}{2}), \\ -6c^2 + 6(3a+1)c - 6(a^2-a-1) & \text{при } c \in (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}), \\ \frac{3}{4}c^2 + \frac{1}{2}(2-3a^2) - \frac{1}{4}(2a^2-1)\frac{1}{c^2} & \text{при } c \in (-\frac{1}{3}, 0). \end{cases}$$

Указанные формулы позволяют сделать следующие выводы:

функция $A(c)$ непрерывна на полуоси $(-\infty, 0)$ и непрерывно дифференцируема на интервалах $(-\infty, -\frac{1}{2})$ и $(-\frac{1}{2}, 0)$; в точке $c = -\frac{1}{2}$ производная $A'(c)$ терпит разрыв.

Непрерывность $A(c)$ в точках $c = -1$, $c = -\frac{1}{2}$ и $c = -\frac{1}{3}$ проверяется непосредственно. Разберёмся с дифференцируемостью. Вычислим односторонние пределы:

$$\begin{aligned} &\lim_{c\uparrow -1} A'(c) = \lim_{c\downarrow -1} A'(c) = -2a^2 + \tfrac{10}{9}, \\ &\lim_{c\uparrow -\frac{1}{3}} A'(c) = \lim_{c\downarrow -\frac{1}{3}} A'(c) = -6a^2 + \tfrac{10}{3}, \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} &\lim_{c\uparrow -\frac{1}{2}} A'(c) = -2a^2 + a + \tfrac{1}{2}, \\ &\lim_{c\downarrow -\frac{1}{2}} A'(c) = -6a^2 - 3a + \tfrac{3}{2}. \end{aligned} \tag{12}$$

Теперь утверждение о дифференциальных свойствах функции $A(c)$ становится очевидным.

Отметим также, что при $a > 1$

$$\lim_{c\to-\infty} A(c) = +\infty, \qquad \lim_{c\uparrow 0} A(c) = -\infty.$$

ТЕОРЕМА. *Функция $A(c)$ строго убывает на интервале $(-\infty, 0)$ от $+\infty$ до $-\infty$.*

Доказательство. Покажем, что производная $A'(c)$ отрицательна на всех интервалах $(-\infty, -1)$, $(-1, -\frac{1}{2})$, $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3})$ и $(-\frac{1}{3}, 0)$.

Пусть $c < -1$. Разложим $A'(c)$ на множители:

$$A'(c) = \tfrac{1}{36c^4}(3c^2+1)\left(9(1-2a^2)c^2+1\right).$$

Знак $A'(c)$ определяется последним сомножителем

$$B_2(c) = 9(1-2a^2)c^2+1.$$

При $a > 1$ графиком $B_2(c)$ является парабола с вершиной $(0,1)$ и ветвями, направленными вниз. Так как $B_2(-1) < 0$, то $A'(c) < 0$ при $c < -1$.

При $c \in (-1, -\frac{1}{2})$ графиком $A'(c)$ будет парабола. Абсцисса её вершины $c = \frac{9}{2}(a - \frac{7}{9})$ при $a > 1$ находится правее интервала $(-1, -\frac{1}{2})$, а ветви параболы направлены вниз. Принимая во внимание соотношение (12), заключаем, что $A'(c) < 0$ при $c \in (-1, -\frac{1}{2})$.

Случай $c \in (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3})$ аналогичен предыдущему. Графиком $A'(c)$ является парабола с ветвями, направленными вниз. Абсцисса её вершины $c = \frac{1}{2}(3a+1)$ при $a > 1$ лежит правее интервала $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3})$. Принимая во внимание соотношение (11), заключаем, что $A'(c) < 0$ при $c \in (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3})$.

Пусть, наконец, $c \in (-\frac{1}{3}, 0)$. Разложим $A'(c)$ на множители:

$$A'(c) = \tfrac{1}{4c^2}(3c^2+1)(c^2+1-2a^2).$$

Очевидно, что $A'(c) < 0$ при $a > 1$ и $c \in (-\frac{1}{3}, 0)$.

Теорема доказана. $\square$

На рис. 1 изображен график функции $A(c)$ при $a = 3/2$, 2, 3.

5°. Решение Второй задачи Золотарёва при $n = 3$, фиксированном $a > 1$ и произвольном вещественном A сводится к решению уравнения $A(c) = A$. Согласно доказанной выше теореме решение этого уравнения существует и единственно. Обозначим его c^*. Вид оптимального полинома $P_3^*(t)$ определяется формулами (3)–(4), (5)–(6), (7)–(8) или (9)–(10) при $c = c^*$ в зависимости от того, какому из промежутков $(-\infty, 1]$, $(-1, -\frac{1}{2}]$, $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3})$ или $[-\frac{1}{3}, 0)$ принадлежит c^*.

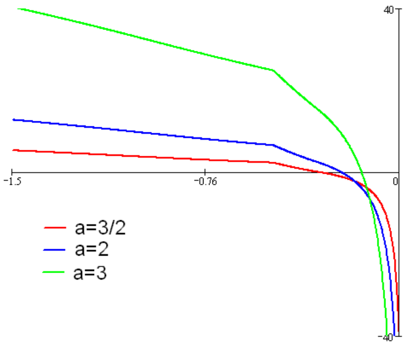
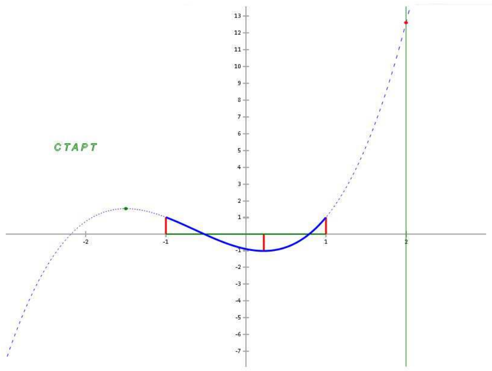


Рис. 1. График функции $A(c)$ при $a = 3/2,\ 2,\ 3$.

Ниже представлен этюд, который в динамическом режиме показывает, как выглядит решение Второй задачи Золотарёва при $n = 3$, $a = 2$ и различных A (воспользуйтесь кнопкам «СТАРТ», «ПРОДОЛЖИТЬ» и «ПОВТОРИТЬ»).

Этюд на тему Второй задачи Золотарёва ($n = 3$).



6°. Как отмечалось в п. 3°, при $c = -\frac{1}{2}$ полином $P_3^*(t)$ совпадает с полиномом Чебышёва

$$T_3(t) = t^3 - \tfrac{3}{4}t,$$

который имеет на отрезке $[-1, 1]$ четыре точки альтернанса $t = -1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 1$ (см. рис. 2). Наличие лишней точки альтернанса позволяет преобразовать $T_3(t)$ в $P_3^*(t)$ при $c \in [-1, -\frac{1}{2}]$. Для этого нужно использовать растяжение отрезка $[-\frac{1}{2}, 1]$ до $[c, 1]$.

Покажем, что при $c \in [-1, -\frac{1}{2}]$ справедливо представление

$$P_3^*(t) = \left(\tfrac{2(1-c)}{3}\right)^3 T_3\left(\tfrac{3t-2c-1}{2(1-c)}\right). \tag{13}$$

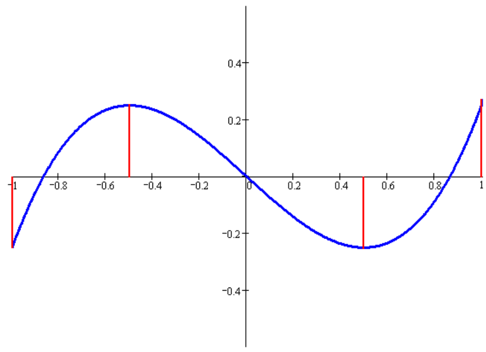


Рис. 2. График полинома Чебышёва $T_3(t)$.

Обозначим

$$\lambda^{(1)} = \left(\tfrac{2(1-c)}{3}\right)^3, \quad H_3^{(1)}(t) = \lambda^{(1)} T_3\left(\tfrac{3t-2c-1}{2(1-c)}\right).$$

Старший коэффициент у полинома $H_3^{(1)}(t)$ равен единице.

Очевидно, что

$$H_3^{(1)}(c) = \lambda^{(1)} T_3(-\tfrac{1}{2}), \quad H_3^{(1)}(1) = \lambda^{(1)} T_3(1).$$

При $d = \frac{1}{3}(c+2)$, $d \in [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$, имеем

$$H_3^{(1)}(d) = \lambda^{(1)} T_3\left(\tfrac{1}{2}\right).$$

Наконец,

$$H_3^{(1)}(-1) = \lambda^{(1)} T_3\left(\tfrac{-2-c}{1-c}\right).$$

Учитывая, что

$$-1 \leqslant \tfrac{-2-c}{1-c} \leqslant -\tfrac{1}{2},$$

получаем $H_3^{(1)}(-1) \geqslant \lambda^{(1)} T_3(-1)$. Значит, полином $H_3^{(1)}(t)$ обладает на отрезке $[-1, 1]$ трёхточечным альтернансом $t_1 = c$, $t_2 = d$, $t_3 = 1$. Это гарантирует тождество $H_3^{(1)}(t) \equiv P_3^*(t)$, равносильное (13).

Впрочем, справедливость формулы (13) при $c \in [-1, -\frac{1}{2}]$ можно проверить и непосредственно.

На рис. 3 изображён график полинома $P_3^*(t)$ при $c = -\frac{3}{4}$.

7°. С помощью растяжения отрезка $[-1, \frac{1}{2}]$ до $[-1, d]$ можно получить из $T_3(t)$ полином $P_3^*(t)$ при $d \in [\frac{1}{2}, 1]$.

Покажем, что при $d \in [\frac{1}{2}, 1]$ справедливо представление

$$P_3^*(t) = \left(\tfrac{2(1+d)}{3}\right)^3 T_3\left(\tfrac{3t-2d+1}{2(1+d)}\right). \tag{14}$$

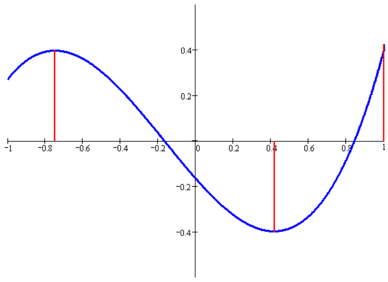


Рис. 3. График полинома $P_3^*(t)$ при $c = -\frac{3}{4}$.

Обозначим
$$\lambda^{(2)} = \left(\tfrac{2(1+d)}{3}\right)^3, \quad H_3^{(2)}(t) = \lambda^{(2)} T_3\left(\tfrac{3t-2d-1}{2(1+d)}\right).$$
Старший коэффициент у полинома $H_3^{(2)}(t)$ равен единице.

Очевидно, что
$$H_3^{(2)}(-1) = \lambda^{(2)} T_3(-1), \quad H_3^{(2)}(d) = \lambda^{(2)} T_3(\tfrac{1}{2}).$$
Подставим $d = 3c + 2$, $c \in [-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}]$. Получим
$$H_3^{(2)}(c) = \lambda^{(2)} T_3\left(-\tfrac{1}{2}\right).$$
Наконец,
$$H_3^{(2)}(1) = \lambda^{(2)} T_3\left(\tfrac{2-d}{1+d}\right).$$
Так как
$$\tfrac{1}{2} \leqslant \tfrac{2-d}{1+d} \leqslant 1,$$
то $H_3^{(2)}(1) \geqslant \lambda^{(2)} T_3(1)$. Значит, полином $H_3^{(2)}(t)$ обладает на отрезке $[-1, 1]$ трёхточечным альтернансом $t_1 = -1$, $t_2 = c$, $t_3 = d$. Это гарантирует тождество $H_3^{(2)}(t) \equiv P_3^*(t)$, равносильное (14).

От параметра d можно перейти к параметру c по формуле $d = 3c + 2$. Представление (14) примет вид
$$P_3^*(t) = \big(2(c+1)\big)^3 \, T_3\left(\tfrac{t-2c-1}{2(1+c)}\right).$$

Получили новое представление для полинома $P_3^*(t)$ при $c \in [-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}]$. Его справедливость можно проверить и непосредственно.

На рис. 4 изображён график полинома $P_3^*(t)$ при $d = \frac{3}{4}$ $(c = -\frac{5}{12})$.

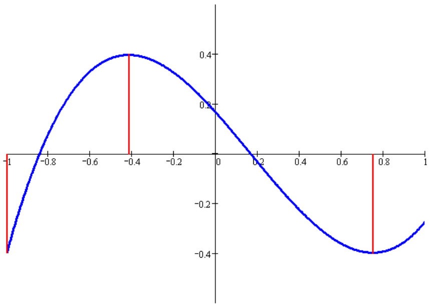


Рис. 4. График полинома $P_3^*(t)$ при $c = -\frac{5}{12}$.

8°. Анализ случая $n = 3$ проясняет вопрос об альтернансных свойствах решения Второй задачи Золотарёва $P_n^*(t)$ при произвольном $n \geqslant 4$.

Прежде всего отметим, что все n точек альтернанса полинома $P_n^*(t)$ не могут лежать внутри интервала $(-1, 1)$ (иначе производная полинома $P_n^*(t)$ обращалась бы в ноль n раз). Поэтому имеются две возможности:

1) точкой альтернанса является один из концов отрезка $[-1, 1]$;

2) оба конца отрезка $[-1, 1]$ являются точками альтернанса.

Покажем, что в первом случае полином $P_n^*(t)$ можно выразить через полином Чебышёва n-й степени со старшим коэффициентом, равным единице,

$$T_n(t) = \tfrac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos t), \quad t \in [-1, 1],$$

который имеет $n+1$ точку альтернанса $\tau_k = \cos \frac{(n-k)\pi}{n}$, $k = 0, 1, \ldots, n$.

Обозначим через c и d самую левую и самую правую точки локального минимума полинома $P_n^*(t)$. С помощью растяжения отрезка $[\tau_1, 1]$ до $[c, 1]$ получим при $c \in (-1, \tau_1)$ представление для $P_n^*(t)$ с точкой альтернанса $t = 1$:

$$P_n^*(t) = \Big(\frac{1-c}{1-\tau_1}\Big)^n T_n\Big(\frac{(1-\tau_1)t + \tau_1 - c}{1-c}\Big), \quad t \in [-1, 1].$$

С помощью растяжения отрезка $[-1, \tau_{n-1}]$ до $[-1, d]$ получим при $d \in (\tau_{n-1}, 1)$ представление для $P_n^*(t)$ с точкой альтернанса $t = -1$:

$$P_n^*(t) = \Big(\frac{1+d}{1+\tau_{n-1}}\Big)^n T_n\Big(\frac{(1+\tau_{n-1})t + \tau_{n-1} - d}{1+d}\Big), \quad t \in [-1, 1].$$

При $c \leqslant -1$ или $d \geqslant 1$ точками альтернанса полинома $P_n^*(t)$ являются оба конца отрезка $[-1, 1]$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Малозёмов В. Н., Сукач М. П., Тамасян Г. Ш. *Этюд на тему Второй задачи Золотарёва* // Семинар «CNSA & NDO». Избранные доклады. 3 апреля 2014 г. (`http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/reps14.shtml#0403`)

2. Золотарёв Е. И. *Приложение эллиптических функций к вопросам о функциях, наименее и наиболее отклоняющихся от нуля* / В кн.: Полное собрание сочинений. Вып. 2. Л.: Изд-во АН СССР, 1932. С. 27–29.