

# ПРИНЦИП МАКСИМУМА ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ\*

В. Н. Малозёмов

malv@math.spbu.ru

19 июня 2014 г.

1°. Рассмотрим линейную дискретную задачу оптимального управления [1, с. 152—157]:

$$\sum_{k=1}^{s+1} \langle c_k, x_k \rangle + \sum_{k=0}^s \langle b_k, u_k \rangle \rightarrow \sup, \quad (1)$$

$$x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k, \quad k = 0, 1, \dots, s; \quad (2)$$

$$D_k u_k \leq d_k, \quad k = 0, 1, \dots, s; \quad (3)$$

$$x_0 = \hat{x}. \quad (4)$$

Здесь  $A_k, B_k, D_k$  — матрицы с описанием

$$A_k = A_k[N, N], \quad B_k = B_k[N, M], \quad D_k = D_k[L, M].$$

Вектор  $x_k = x_k[N]$  характеризует положение некоторой системы в момент времени  $k$ . С помощью вектора  $u_k = u_k[M]$  осуществляется управляющее воздействие на систему. Этот вектор должен удовлетворять ограничениям (3). Траектория системы  $\{x_0, x_1, \dots, x_{s+1}\}$  однозначно определяется рекуррентным соотношением (2) и начальным условием (4) — после выбора последовательности управлений  $\{u_k\}_{k=0}^s$ .

Целевую функцию задачи (1) можно интерпретировать как оценку «качества» траектории (с учетом «цены» управления). Требуется выбрать последовательность управлений так, чтобы соответствующая траектория имела наивысшую оценку «качества».

---

\*Семинар по конструктивному негладкому анализу и недифференцируемой оптимизации «CNSA & NDO»: <http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/>

2°. Задача (1)–(4) является задачей линейного программирования относительно блочного вектора неизвестных

$$(u_0, x_1, u_1, x_2, u_2, \dots, x_s, u_s, x_{s+1}).$$

Представим атрибуты этой задачи в развёрнутом виде.

	$b_0$	$c_1$	$b_1$	$c_2$	$b_2$	$c_3$	$\dots$	$c_s$	$b_s$	$c_{s+1}$	
$p_0$	$-B_0$	$E$	0	0	0	0	$\dots$	0	0	0	$= A_0 \hat{x}$
$q_0$	$D_0$	0	0	0	0	0	$\dots$	0	0	0	$\leq d_0$
$p_1$	0	$-A_1$	$-B_1$	$E$	0	0	$\dots$	0	0	0	$= \mathbb{O}$
$q_1$	0	0	$D_1$	0	0	0	$\dots$	0	0	0	$\leq d_1$
$p_2$	0	0	0	$-A_2$	$-B_2$	$E$	$\dots$	0	0	0	$= \mathbb{O}$
$q_2$	0	0	0	0	$D_2$	0	$\dots$	0	0	0	$\leq d_2$
$\dots$	$\dots$										$\dots$
$p_s$	0	0	0	0	0	0	$\dots$	$-A_s$	$-B_s$	$E$	$= \mathbb{O}$
$q_s$	0	0	0	0	0	0	$\dots$	0	$D_s$	0	$\leq d_s$

Здесь  $E = E[N, N]$  — единичная матрица. В крайнем левом столбце указаны блоки двойственных переменных.

Запишем двойственную задачу линейного программирования:

$$\begin{aligned} \langle A_0 \hat{x}, p_0 \rangle + \sum_{k=0}^s \langle d_k, q_k \rangle &\rightarrow \inf, \\ -p_k B_k + q_k D_k &= b_k, \quad k = 0, 1, \dots, s; \\ p_{k-1} - p_k A_k &= c_k, \quad k = 1, \dots, s; \quad p_s = c_{s+1}; \\ q_k &\geq \mathbb{O}, \quad k = 0, 1, \dots, s. \end{aligned} \quad (5)$$

Из ограничений задачи (5) выделим соотношения

$$\begin{aligned} p_{k-1} &= p_k A_k + c_k, \quad k = s, s-1, \dots, 1; \\ p_s &= c_{s+1}. \end{aligned} \quad (6)$$

Они позволяют однозначно определить половину блоков двойственных переменных  $p_s, p_{s-1}, \dots, p_0$ . Задача (5) (после отбрасывания постоянной величины  $\langle A_0 \hat{x}, p_0 \rangle$ ) принимает вид

$$\sum_{k=0}^s \langle d_k, q_k \rangle \rightarrow \inf, \quad (7)$$

$$D_k^\top q_k = B_k^\top p_k + b_k, \quad k = 0, 1, \dots, s;$$

$$q_k \geq \mathbb{O}, \quad k = 0, 1, \dots, s.$$

Слагаемое с индексом  $k$  в целевой функции задачи (7) зависит от блока  $q_k$ . На  $q_k$  наложены ограничения

$$D_k^\top q_k = B_k^\top p_k + b_k, \quad q_k \geq \mathbb{O},$$

которые не зависят от других ограничений. В этом случае значение целевой функции задачи (7) будет наименьшим, если каждое слагаемое независимо примет наименьшее значение. Задача (7) распадается на  $s + 1$  независимых подзадач (при  $k = 0, 1, \dots, s$ )

$$\langle d_k, q_k \rangle \rightarrow \inf, \quad (8)$$

$$D_k^\top q_k = B_k^\top p_k + b_k,$$

$$q_k \geq \mathbb{O}.$$

Каждая задача вида (8) является задачей линейного программирования. Обозначим через  $u_k$  блок двойственных переменных и запишем двойственную задачу:

$$H_k(u_k) := \langle B_k^\top p_k + b_k, u_k \rangle \rightarrow \sup, \quad (9)$$

$$D_k u_k \leq d_k.$$

Вычислив по формулам (6) блоки двойственных переменных  $p_s, p_{s-1}, \dots, p_0$  задачи (1) и решив при  $k = 0, 1, \dots, s$  задачи (9), двойственные к задачам (8), найдём последовательность допустимых управлений  $u_0^*, u_1^*, \dots, u_s^*$ . Поскольку мы дважды переходили к двойственным задачам, то можно предположить, что построенная последовательность управлений будет оптимальной для задачи (1). Покажем, что это действительно так.

**3°.** Обозначим через  $U_k$  множество планов задачи (9).

**ТЕОРЕМА** (принцип максимума). *Для того чтобы последовательность допустимых управлений  $\{u_0^*, u_1^*, \dots, u_s^*\}$  была оптимальной для задачи (1), необходимо и достаточно, чтобы при каждом  $k = 0, 1, \dots, s$  выполнялось условие*

$$H_k(u_k^*) = \max_{u_k \in U_k} H_k(u_k), \quad (10)$$

*то есть чтобы  $u_k^*$  было решением задачи (9).*

Доказательство. Необходимость. Пусть  $\{u_k^*\}_{k=0}^s$  — оптимальная последовательность управлений для задачи (1). Это значит, что блочный вектор

$$(u_0^*, x_1^*, u_1^*, x_2^*, u_2^*, \dots, x_s^*, u_s^*, x_{s+1}^*), \quad (11)$$

где блоки  $x_k^*$  последовательно вычисляются на основе рекуррентного соотношения (2) и начального условия (4), является решением задачи линейного программирования (1). По первой теореме двойственности двойственная задача (5) также имеет решение

$$(p_0, q_0^*, p_1, q_1^*, \dots, p_s, q_s^*), \quad (12)$$

в котором блоки  $p_k$  последовательно вычисляются (в обратном порядке) по формулам (6). По второй теореме двойственности выполняется условие дополнителности

$$\sum_{k=0}^s \langle d_k - D_k u_k^*, q_k^* \rangle = 0. \quad (13)$$

Поскольку  $d_k - D_k u_k^* \geq \mathbb{O}$  и  $q_k \geq \mathbb{O}$  при всех  $k \in 0 : s$ , от из (13) следует, что

$$\langle d_k - D_k u_k^*, q_k^* \rangle = 0 \quad \text{при каждом } k \in 0 : s. \quad (14)$$

Теперь при фиксированном  $k \in 0 : s$  рассмотрим пару двойственных задач линейного программирования (8) и (9). Векторы  $q_k^*$  и  $u_k^*$  являются планами этих задач и выполняется условие дополнителности (14). По второй теореме двойственности  $u_k^*$  — решение задачи (9), что и требовалось установить.

Достаточность. Допустим, что мы вычислили последовательность векторов  $p_s, p_{s-1}, \dots, p_0$  по формулам (6) и при каждом  $k \in 0 : s$  нашли решение  $u_k^*$  задачи (9). Нужно проверить, что последовательность управлений  $\{u_0^*, u_1^*, \dots, u_s^*\}$  является оптимальной для задачи (1).

По первой теореме двойственности при каждом  $k \in 0 : s$  существует решение  $q_k^*$  задачи (8). По второй теореме двойственности выполняется условие дополнителности (14).

Отметим, что векторы (11) и (12) удовлетворяют ограничениям двойственных задач (1) и (5) соответственно, причем как следствие соотношений (14) выполняется условие дополнителности (13). По второй теореме двойственности вектор (11) является решением задачи (1), так что последовательность управлений  $\{u_0^*, u_1^*, \dots, u_s^*\}$  будет оптимальной.

Теорема доказана. □

4°. Принцип максимума позволяет свести большую задачу (1) к последовательности небольших задач вида (9). Имеется ещё одна особенность принципа максимума. Решение «сопряжённой» системы (6) зависит только от матриц  $A_k$  и векторов  $c_k$ . Это значит, что сведение задачи (1) к последовательности задач (9) остаётся в силе при изменении матриц  $B_k$ ,  $D_k$  и векторов  $b_k$ ,  $d_k$  — атрибутов, связанных с управлением.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ашманов С. А. *Линейное программирование*. М.: Наука, 1981. 340 с.