НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ МИНИМУМА ПОЛИНОМА ОТ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ*

А. В. Фоминых

alexfomster@mail.ru

20 марта 2014 г.

Аннотация. В докладе исследуются условия минимума «полиномиального» функционала. Для «полиномиального» функционала выписан градиент Гато, найдены необходимые условия минимума, которые используются при описании метода наискорейшего спуска для решения рассматриваемой задачи. Дополнительно исследуется задача минимизации «полиномиального» функционала, когда присутствуют ограничения. С помощью теории точных штрафных функций задача при наличии ограничений сводится к задаче безусловной минимизации. Получены условия минимума, которые позволяют описать метод гиподифференциального спуска для рассматриваемой задачи.

1°. Введение и постановка задачи. В данном докладе выводятся необходимые условия минимума функционала (далее будем называть его «полиномиальным») вида

$$P_k\big[I_1(x), \ldots, I_n(x)\big] \tag{1}$$

с заданным начальным условием

$$x(0) = x_0. \tag{2}$$

В выражении (1) P_k — полином заданной конечной степени $k \in \mathbb{N}$ (его общий вид будет выписан ниже), а I_j, $j = \overline{1, n}$, — интегральный функционал вида

$$I_j(x) = \int_0^T f_j\big(x(t), \dot{x}(t), t\big) dt,$$

рассматриваемый в классической задаче вариационного исчисления [1]. Здесь $T > 0$ — некоторый фиксированный момент времени, f_j — вещественная скалярная функция, непрерывная по всем трём аргументам и непрерывно дифференцируемая по x и $\dot{x}$, $x(t)$ — n-мерная вектор-функция, непрерывно дифференцируемая на промежутке $[0, T]$.

*Семинар по конструктивному негладкому анализу и недифференцируемой оптимизации «CNSA & NDO»: `http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/`

Положим $z(t) = \dot{x}(t)$, $z \in C_n[0,T]$. Тогда с учётом (2) имеем $x(t) = x_0 + \int_0^t z(\tau)d\tau$.

Требуется найти такую вектор-функцию $x^* \in C_n^1[0,T]$, удовлетворяющую ограничению (2), которая доставляет минимум «полиномиальному» функционалу (1).

2°. Необходимые условия минимума «полиномиального» функционала P_k. Сначала рассмотрим частный случай, когда минимизируемый функционал имеет следующий вид

$$P_2(z) = \Big[\int_0^T f\big(x_0 + \int_0^t z(\tau)d\tau, z(t), t\big)dt\Big]^2, \tag{3}$$

общий случай будет рассмотрен далее. Найдём производную $P_2'(z,v)$ по направлению $v \in C_n[0,T]$ функционала (3). Имеем

$$\begin{gathered}
P_2(z+\alpha v) = \Big[\int_0^T f\big(x_0 + \int_0^t z(\tau) + \alpha v(\tau)d\tau, z(t) + \alpha v(t), t\big)dt\Big]^2 = \\
= \Big[\int_0^T f\big(x_0 + \int_0^t z(\tau)d\tau, z(t), t\big) + \alpha \int_0^T \Big\{\big(\frac{\partial f}{\partial x}, \int_0^t v(\tau)d\tau\big) + \big(\frac{\partial f}{\partial z}, v(t)\big)\Big\}dt + o(\alpha)\Big]^2 = \\
= P_2(z) + 2\alpha \int_0^T \Big\{\big(\frac{\partial f}{\partial x}, \int_0^t v(\tau)d\tau\big) + \big(\frac{\partial f}{\partial z}, v(t)\big)\Big\}dt \int_0^T f\big(x_0 + \int_0^t z(\tau)d\tau, z(t), t\big)dt + o(\alpha) = \\
= P_2(z) + 2\alpha \int_0^T \Big\{\big(\int_t^T \frac{\partial f}{\partial x}d\tau, v(t)\big) + \big(\frac{\partial f}{\partial z}, v(t)\big)\Big\}dt \int_0^T f\big(x_0 + \int_0^t z(\tau)d\tau, z(t), t\big)dt + o(\alpha),
\end{gathered} \tag{4}$$

где $\frac{o(\alpha)}{\alpha} \to 0$ при $\alpha \downarrow 0$ и $\int_0^T (v_1, v_2)dt$ — скалярное произведение вектор-функций v_1, v_2. Из (4) далее получаем

$$\begin{gathered}
P_2'(z,v) = \lim_{\alpha\downarrow 0} \frac{P_2(z+\alpha v) - P_2(z)}{\alpha} = \\
= 2\int_0^T \Big\{\big(\int_t^T \frac{\partial f}{\partial x}d\tau, v(t)\big) + \big(\frac{\partial f}{\partial z}, v(t)\big)\Big\}dt \int_0^T f\big(x_0 + \int_0^t z(\tau)d\tau, z(t), t\big)dt.
\end{gathered} \tag{5}$$

Из (5) следует, что функционал $P_2(z)$ дифференцируем по Гато [2] в точке z и его «градиент» выражается по формуле

$$\nabla P_2(z) = 2\Big[\int_t^T \frac{\partial f}{\partial x}d\tau + \frac{\partial f}{\partial z}\Big] \int_0^T f\big(x_0 + \int_0^t z(\tau)d\tau, z(t), t\big)dt. \tag{6}$$

Отсюда заключаем, что для того, чтобы вектор-функция $z^* \in C_n[0,T]$ была точкой минимума функционала (3), необходимо выполнение соотношений

$$\begin{gathered}\Big[\int_t^T \frac{\partial f}{\partial x}d\tau + \frac{\partial f}{\partial z}\Big]\int_0^T f\big(x_0+\int_0^t z^*(\tau)d\tau, z^*(t), t\big)dt = 0_n \quad \forall\, t\in[0,T],\\ \frac{\partial f(x^*,z^*,T)}{\partial z}\int_0^T f\big(x_0+\int_0^t z^*(\tau)d\tau, z^*(t), t\big)dt = 0_n,\end{gathered} \tag{7}$$

где 0_n — нулевой элемент пространства $C_n[0,T]$. Второе равенство в (7) представляет собой условие трансверсальности на правом конце.

Теперь получим выражения, аналогичные (5) и (6), и необходимое условие минимума, аналогичное (7), для «полиномиального» функционала

$$P_k\big[I_1(x),\ldots,I_n(x)\big].$$

В общем случае «полиномиальный» функционал имеет вид

$$P_k = \sum_{i=1}^{\ell} a_i F_i,$$

где

$$F_i = \big(\int_0^T f_1 dt\big)^{m_1^i}\times\ldots\times\big(\int_0^T f_n dt\big)^{m_n^i}.$$

Здесь $f_j = f_j(x,z,t)$, $j=\overline{1,n}$, $k := \max\limits_{i=\overline{1,\ell}}(m_1^i+\ldots+m_n^i)$, $m_j^i\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. Обозначим

$$\begin{cases} f_1^i = \big(\int_0^T f_1 dt\big)^{m_1^i-1}\times\big(\int_0^T f_2 dt\big)^{m_2^i}\times\ldots\times\big(\int_0^T f_n dt\big)^{m_n^i}, \text{ если } m_1^i\geqslant 1,\\ \hfill f_1^i = 0, \text{ если } m_1^i = 0,\end{cases}$$

$$\vdots$$

$$\begin{cases} f_j^i = \big(\int_0^T f_1 dt\big)^{m_1^i}\times\ldots\times\big(\int_0^T f_{j-1} dt\big)^{m_{j-1}^i}\times\big(\int_0^T f_j dt\big)^{m_j^i-1}\times\\ \qquad\times\big(\int_0^T f_{j+1} dt\big)^{m_{j+1}^i}\times\cdots\times\big(\int_0^T f_n dt\big)^{m_n^i}, \text{ если } m_j^i\geqslant 1,\\ \hfill f_j^i = 0, \text{ если } m_j^i = 0,\end{cases}$$

$$\vdots$$

$$\begin{cases} f_n^i = \Big(\displaystyle\int_0^T f_1 dt\Big)^{m_1^i} \times \ldots \times \Big(\displaystyle\int_0^T f_{n-1} dt\Big)^{m_{n-1}^i} \times \Big(\displaystyle\int_0^T f_n dt\Big)^{m_n^i - 1}, \text{ если } m_n^i \geqslant 1, \\ \hfill f_n^i = 0, \text{ если } m_n^i = 0, \end{cases}$$

где $f_j^i = f_j^i(z)$, $i = \overline{1, \ell}$, $j = \overline{1, n}$.

Вначале найдём вариацию функционала F_i. Проводя вычисления, аналогичные (4), (5), получаем

$$F_i(z + \alpha v) = \Big[\int_0^T f_1\big(x_0 + \int_0^t z(\tau) + \alpha v(\tau) d\tau, z(t) + \alpha v(t), t\big) dt\Big]^{m_1^i} \times \ldots \times$$

$$\times \Big[\int_0^T f_n\big(x_0 + \int_0^t z(\tau) + \alpha v(\tau) d\tau, z(t) + \alpha v(t), t\big) dt\Big]^{m_n^i} =$$

$$= \Big[\Big(\int_0^T f_1 dt\Big)^{m_1^i} + \alpha m_1^i \int_0^T \Big(\int_t^T \frac{\partial f_1}{\partial x} d\tau + \frac{\partial f_1}{\partial z}, v(t)\Big) dt \Big(\int_0^T f_1 dt\Big)^{m_1^i - 1} + o(\alpha)\Big] \times \ldots \times$$

$$\times \Big[\Big(\int_0^T f_n dt\Big)^{m_n^i} + \alpha m_n^i \int_0^T \Big(\int_t^T \frac{\partial f_n}{\partial x} d\tau + \frac{\partial f_n}{\partial z}, v(t)\Big) dt \Big(\int_0^T f_n dt\Big)^{m_n^i - 1} + o(\alpha)\Big] =$$

$$= \Big(\int_0^T f_1 dt\Big)^{m_1^i} \times \ldots \times \Big(\int_0^T f_n dt\Big)^{m_n^i} + \alpha m_1^i f_1^i \int_0^T \Big(\int_t^T \frac{\partial f_1}{\partial x} d\tau + \frac{\partial f_1}{\partial z}, v(t)\Big) dt +$$

$$+ \ldots + \alpha m_n^i f_n^i \int_0^T \Big(\int_t^T \frac{\partial f_n}{\partial x} d\tau + \frac{\partial f_n}{\partial z}, v(t)\Big) dt + o(\alpha), \quad (8)$$

$$F_i'(z, v) = m_1^i f_1^i \int_0^T \Big(\int_t^T \frac{\partial f_1}{\partial x} d\tau + \frac{\partial f_1}{\partial z}, v(t)\Big) dt + \ldots +$$

$$+ m_n^i f_n^i \int_0^T \Big(\int_t^T \frac{\partial f_n}{\partial x} d\tau + \frac{\partial f_n}{\partial z}, v(t)\Big) dt + o(\alpha). \quad (9)$$

«Градиент» Гато для функционала F_i имеет вид

$$\nabla F_i = \sum_{j=1}^n \Big(\int_t^T \frac{\partial f_j}{\partial x} d\tau + \frac{\partial f_j}{\partial z}\Big) m_j^i f_j^i. \quad (10)$$

Для «полиномиального» функционала P_k с учётом (8)–(10) запишем

$$P_k(z + \alpha v) = P_k(z) + \alpha \sum_{i=1}^{\ell} a_i \sum_{j=1}^n m_j^i f_j^i \int_0^T \Big(\int_t^T \frac{\partial f_j}{\partial x} d\tau + \frac{\partial f_j}{\partial z}, v(t)\Big) dt + o(\alpha),$$

$$P'_k(z,v)=\sum_{i=1}^{\ell}a_i\sum_{j=1}^{n}m_j^i f_j^i\int_0^T\Big(\int_t^T\frac{\partial f_j}{\partial x}d\tau+\frac{\partial f_j}{\partial z},v(t)\Big)dt.$$

Приходим к формуле

$$\nabla P_k=\sum_{i=1}^{\ell}a_i\sum_{j=1}^{n}\Big(\int_t^T\frac{\partial f_j}{\partial x}d\tau+\frac{\partial f_j}{\partial z}\Big)m_j^i f_j^i.$$

Для того чтобы вектор-функция z^* была точкой минимума функционала P_k, необходимо [3] выполнение соотношений

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{\ell}a_i\sum_{j=1}^{n}\Big(\int_t^T\frac{\partial f_j}{\partial x}d\tau+\frac{\partial f_j}{\partial z}\Big)m_j^i f_j^i=0_n\quad\forall\,t\in[0,T],\\ \sum_{i=1}^{\ell}a_i\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_j(x^*,z^*,T)}{\partial z}m_j^i f_j^i=0_n,\end{gathered}\tag{11}$$

где второе равенство представляет собой условие трансверсальности на правом конце.

Заметим, что в случае $n=\ell=1$, $a_1=1$, $m_1^1=1$ первый сомножитель в (11) равен 1, и мы приходим к необходимым условиям минимума

$$\int_t^T\frac{\partial f_1}{\partial x}d\tau+\frac{\partial f_1}{\partial z}=0_n\quad\forall\,t\in[0,T],\tag{12}$$

$$\frac{\partial f_1(x^*,z^*,T)}{\partial z}=0_n.\tag{13}$$

Дифференцируя (12) на интервале $[0,T]$, получаем уравнение Эйлера в дифференциальной форме для классической задачи вариационного исчисления. Выражение (13) представляет собой условие трансверсальности на правом конце.

3°. Метод наискорейшего спуска. Опишем метод наискорейшего спуска для поиска стационарных точек функционала P_k.

Фиксируем произвольное $z_1\in C_n[0,T]$. Пусть уже построено $z_p\in C_n[0,T]$. Если выполнено необходимое условие минимума (11), то z_p является стационарной точкой функционала P_k, и процесс прекращается. В противном случае положим

$$z_{p+1}=z_p+\gamma_p q_p,$$

где $q_p=q(z_p)$ представляет собой антиградиент функционала P_k в точке z_p, который вычисляется по формуле

$$q_p=-\sum_{i=1}^{\ell}a_i\sum_{j=1}^{n}\Big(\int_t^T\frac{\partial f_j}{\partial x}d\tau+\frac{\partial f_j}{\partial z}\Big)m_j^i f_j^i,$$

а γ_p является решением следующей задачи одномерной минимизации

$$\min_{\gamma \geqslant 0} P(z_p + \gamma q_p) = P(z_p + \gamma_p q_p). \tag{14}$$

Согласно (14), $P_k(z_{p+1}) < P_k(z_p)$. Если последовательность $\{z_p\}$ бесконечна, то при некоторых дополнительных предположениях метод наискорейшего спуска сходится в следующем смысле [4]:

$$||q(z_p)|| = \sqrt{\int_0^T q_p^2 dt} \to 0 \text{ при } p \to \infty.$$

Если последовательность $\{z_p\}$ конечна, то последняя её точка является стационарной точкой функционала P_k по построению.

4°. Задача с ограничением на правом конце. Вернёмся к исходной постановке задачи. Пусть помимо начального условия (2) задано ограничение на правом конце

$$x(T) = x_T. \tag{15}$$

Требуется найти вектор-функцию x^*, удовлетворяющую ограничениям (2), (15) которая доставляет минимум «полиномиальному» функционалу (1).

Введём функцию

$$\varphi(z) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(z), \tag{16}$$

где

$$\varphi_i(z) = \left| x_{0i} + \int_0^T z_i(t) dt - x_{Ti} \right|.$$

Здесь x_{0i} — i-я компонента вектора x_0, а x_{Ti} — i-я компонента вектора x_T, $i = \overline{1, n}$. Нетрудно убедиться, что $\varphi(z) = 0$, когда (15) выполняется, и $\varphi(z) > 0$, если (15) не имеет места.

Теперь можно составить функционал

$$\Phi(z) = P_k(z) + \lambda \varphi(z). \tag{17}$$

Здесь λ — достаточно большое положительное число. Ниже будет показано, что при некоторых дополнительных предположениях это точная штрафная функция. Тогда задачу минимизации (1) при наличии ограничений (2), (15) можно свести к безусловной минимизации функционала (17).

5°. Дифференциальные свойства функционала $\varphi(z)$. Рассмотрим функционал $\varphi(z)$ подробнее. Обозначим

$$\overline{\varphi}_i(z) = x_{0i} + \int_0^T z_i(t)dt - x_{Ti}, \quad i = \overline{1,n}.$$

Введём индексные множества

$$I_0 = \{i = \overline{1,n} \mid \overline{\varphi}_i(z) = 0\},$$

$$I_- = \{i = \overline{1,n} \mid \overline{\varphi}_i(z) < 0\},$$
$$I_+ = \{i = \overline{1,n} \mid \overline{\varphi}_i(z) > 0\}.$$

Ниже нам также потребуются множества

$$\Omega = \{z \in C_n[0,T] \mid \varphi(z) = 0\},$$

$$\Omega_\delta = \{z \in C_n[0,T] \mid \varphi(z) < \delta\},$$
$$\Omega_\delta/\Omega = \{z \in C_n[0,T] \mid 0 < \varphi(z) < \delta\}.$$

Пусть сначала $\varphi(z) = 0$. В этом случае $\varphi(z)$ субдифференцируема, и её субдифференциал с учётом (16) имеет вид

$$\partial\varphi(z) = \mathrm{co}\Big\{ \sum_{i=1}^n \omega_i e_i \mid \omega_i \in [-1,1],\ i = \overline{1,n}\Big\}, \tag{18}$$

где e_i — единичный вектор, в котором единица стоит на i-ом месте, $i = \overline{1,n}$.

Пусть теперь $\varphi(z) > 0$. В этом случае $\varphi(z)$ также оказывается субдифференцируемой, и её субдифференциал с учётом (16) выражается по формуле

$$\partial\varphi(z) = \mathrm{co}\Big\{ \sum_{i\in I_0} \omega_i e_i + \sum_{i=1}^n \mu_i e_i \mid \omega_i \in [-1,1],\ i \in I_0,$$

$$\mu_i = 0,\ \text{если}\ i \in I_0,\ \ \mu_i = 1,\ \text{если}\ i \in I_+,\ \ \mu_i = -1,\ \text{если}\ i \in I_-\Big\}.$$

Используя ту же технику, что и в [5], можно показать, что имеет место

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $\inf\limits_{z\in\Omega} P_k(z) = P_k(z^*) > -\infty$ и найдётся такое положительное число $\lambda_0 < \infty$, что $\forall\lambda > \lambda_0$ существует $z(\lambda) \in \Omega$, для которого $\Phi_\lambda(z(\lambda)) = \inf\limits_{z\in\Omega} \Phi_\lambda(z)$. Пусть также функционал $P_k(z)$ является локально липшицевым на множестве Ω_δ/Ω. Тогда функционал (17) будет точной штрафной функцией.*

Теперь можно сформулировать необходимые условия минимума «полиномиального» функционала.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Для того, чтобы точка* $x^*(t) = x_0 + \int_0^t z^*(\tau)d\tau$ *удовлетворяла ограничениям (2), (15) и доставляла минимум функционалу (1), необходимо, чтобы для всех t из промежутка* $[0, T]$ *выполнялось включение*

$$0_n \in \sum_{i=1}^{\ell} a_i \sum_{j=1}^{n} \Big(\int_t^T \frac{\partial f_j}{\partial x} d\tau + \frac{\partial f_j}{\partial z} \Big) m_j^i f_j^i + \lambda \operatorname{co} \Big\{ \sum_{i=1}^{n} \omega_i e_i \mid \omega_i \in [-1, 1],\ i = \overline{1, n} \Big\}. \tag{19}$$

Доказательство. По теореме 1 функционал (17) — точная штрафная функция, поэтому существует такое число λ^*, что для всех $\lambda > \lambda^*$ задача минимизации функционала (1) при наличии ограничений (2), (15) эквивалентна задаче безусловной минимизации (17). Для того, чтобы x^* была точкой минимума (19), необходимо [3] выполнение соотношения

$$0_n \in \partial \Phi(x^*). \tag{20}$$

Поскольку при $z \in \Omega$ субдифференциал функции $\varphi(z)$ выражается соотношением (18), а функционал $P_k(z)$ дифференцируем по Гато и его градиент выписан в (11), то условие (20) запишется в виде

$$0_n \in \sum_{i=1}^{\ell} a_i \sum_{j=1}^{n} \Big(\int_t^T \frac{\partial f_j}{\partial x} d\tau + \frac{\partial f_j}{\partial z} \Big) m_j^i f_j^i + \lambda \operatorname{co} \Big\{ \sum_{i=1}^{n} \omega_i e_i \mid \omega_i \in [-1, 1],\ i = \overline{1, n} \Big\},$$

и включение (19) доказано. □

6°. Метод гиподифференциального спуска. Найдём гиподифференциал функционала $\Phi(z)$. Для гиподифференциала функционалов $\varphi_i(z)$, $i = \overline{1, n}$, имеем выражение [6]

$$d\varphi_i(z) = \operatorname{co}\{[\overline{\varphi}_i(z) - \varphi_i(z), e_i], [-\overline{\varphi}_i(z) - \varphi_i(z), -e_i]\}.$$

Тогда гиподифференциал функционала $\Phi(z)$ выражается по формуле

$$d\Phi(z) = \Big[0, \sum_{i=1}^{\ell} a_i \sum_{j=1}^{n} \Big(\int_t^T \frac{\partial f_j}{\partial x} d\tau + \frac{\partial f_j}{\partial z} \Big) m_j^i f_j^i \Big] + \lambda \sum_{i=1}^{n} d\varphi_i(z).$$

Известно, что необходимым условием минимума функционала (17) в точке x^* в терминах гиподифференциала является условие [6]

$$[0, 0_n] \in d\Phi(x^*). \tag{21}$$

Переход от субдифференциала к гиподифференциалу обусловлен тем фактом, что гиподифференциальное отображение, в отличие от субдифференциального, является непрерывным в метрике Хаусдорфа [6], что позволит гарантировать сходимость в некотором смысле рассматриваемого численного метода.

Найдём минимальный по норме гипоградиент $u \in d\Phi(z)$, то есть решим задачу

$$\min_{u \in d\Phi(z)} ||u||^2 = \min_{\substack{\beta_k \in [0,1] \\ k=\overline{1,n}}} ||u(\beta_1, \ldots, \beta_n)||^2, \tag{22}$$

где

$$u(\beta_1, \ldots, \beta_n) = \Big[0, \sum_{i=1}^{\ell} a_i \sum_{j=1}^{n} \Big(\int_t^T \frac{\partial f_j}{\partial x} d\tau + \frac{\partial f_j}{\partial z} \Big) m_j^i f_j^i \Big] + \lambda \big(\beta_1 [\overline{\varphi}_1 - \varphi_1, e_1] +$$

$$+ (1-\beta_1)[-\overline{\varphi}_1 - \varphi_1, -e_1] + \cdots + \beta_n [\overline{\varphi}_n - \varphi_n, e_n] + (1-\beta_n)[-\overline{\varphi}_n - \varphi_n, -e_n] \big) =$$

$$= [\lambda(2\beta_1 - 1)\overline{\varphi}_1 + \cdots + \lambda(2\beta_n - 1)\overline{\varphi}_n - \lambda\varphi, \sum_{i=1}^{\ell} a_i \sum_{j=1}^{n} \Big(\int_t^T \frac{\partial f_j}{\partial x} d\tau + \frac{\partial f_j}{\partial z} \Big) m_j^i f_j^i +$$

$$+ \lambda(2\beta_1 - 1)e_1 + \cdots + \lambda(2\beta_n - 1)e_n] =$$

$$= \big[\lambda \sum_{i=1}^{n} (2\beta_i - 1)\overline{\varphi}_i - \lambda\varphi, \sum_{i=1}^{\ell} a_i \sum_{j=1}^{n} \Big(\int_t^T \frac{\partial f_j}{\partial x} d\tau + \frac{\partial f_j}{\partial z} \Big) m_j^i f_j^i + \lambda \sum_{i=1}^{n} (2\beta_i - 1) e_i \big].$$

Таким образом, задачу (22) можно переписать в виде

$$\min_{\substack{\beta_k \in [0,1] \\ k=\overline{1,n}}} \Big\{ \big(\lambda \sum_{i=1}^{n} (2\beta_i - 1)\overline{\varphi}_i - \lambda\varphi \big)^2 +$$

$$+ \int_0^T \Big[\sum_{i=1}^{\ell} a_i \sum_{j=1}^{n} \Big(\int_t^T \frac{\partial f_j}{\partial x} d\tau + \frac{\partial f_j}{\partial z} \Big) m_j^i f_j^i + \lambda \sum_{i=1}^{n} (2\beta_i - 1) e_i \Big]^2 dt \Big\}. \tag{23}$$

Задача (23) представляет собой задачу квадратичного программирования при наличии линейных ограничений [7]. Обозначим её решение $(\beta_1^*, \ldots, \beta_n^*)$.

Вектор-функция

$$q^*(z) = \sum_{i=1}^{\ell} a_i \sum_{j=1}^{n} \Big(\int_t^T \frac{\partial f_j}{\partial x} d\tau + \frac{\partial f_j}{\partial z} \Big) m_j^i f_j^i + \lambda \sum_{i=1}^{n} (2\beta_i^* - 1) e_i \tag{24}$$

состоит из последних n компонент наименьшего по норме гипоградиента функционала $\Phi(z)$. Если $||q^*(z)|| > 0$ (в этом случае z не является стационарной точкой функционала Φ), то $-\frac{q^*(z)}{||q^*(z)||}$ представляет собой направление спуска функционала Φ в точке z.

Перейдём к описанию метода гиподифференциального спуска для нахождения стационарных точек функционала $\Phi(z)$. Выберем произвольное $z_1 \in C_n[0,T]$. Пусть уже найдено $z_p \in C_n[0,T]$. Если $\varphi(z_p) = 0$ и выполнено необходимое условие минимума (19) или (21), то точка z_p является стационарной, и процесс прекращается. Если же условие $\varphi(z_p) = 0$ не выполнено или $\varphi(z_p) = 0$, но не выполнено необходимое условие минимума (19) или (21), то положим

$$z_{p+1} = z_p + \gamma_p q_p^*,$$

где $q_p^* = q^*(z_p)$ определяется формулой (24), а γ_p является решением следующей задачи одномерной минимизации

$$\min_{\gamma \geqslant 0} \Phi(z_p + \gamma q_p^*) = \Phi(z_p + \gamma_p q_p^*). \tag{25}$$

Согласно (25), $\Phi(z_{p+1}) < \Phi(z_p)$. Если последовательность $\{z_p\}$ конечна, то последняя её точка является стационарной точкой функционала Φ по построению.

ЛИТЕРАТУРА

1. Демьянов В. Ф. Условия экстремума и вариационное исчисление. М.: Высшая школа, 2005. 335 с.

2. Крейн С. Г. Функциональный анализ. М.: Наука, 1964. 424 с.

3. Демьянов В. Ф., Васильев Л. В. Недифференцируемая оптимизация. М.: Наука, 1981. 384 с.

4. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 741 с.

5. Тамасян Г. Ш. *Численные методы в задачах вариационного исчисления для функционалов, зависящих от производных высшего порядка* // Проблемы математического анализа. 2012. Вып. 67. С. 113–132.

6. Демьянов В. Ф., Рубинов А. М. Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. М.: Наука, 1990. 432 с.

7. Даугавет В. А. Численные методы квадратичного программирования. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2004. 128 с.