ПРЕДСТАВЛЕНИЕ КУСОЧНО-АФФИННЫХ ФУНКЦИЙ В ВИДЕ РАЗНОСТИ ПОЛИЭДРАЛЬНЫХ*

Т. А. Ангелов

angelov.t@gmail.com

28 мая 2015 г.

Аннотация. Рассматривается задача представления любой аналитически заданной кусочно-аффинной функции в виде суммы выпуклой и вогнутой полиэдральных функций, или, что эквивалентно, в виде разности выпуклых полиэдральных функций. Предложены два алгоритма, решающие поставленную задачу. Первый алгоритм однозначно восстанавливает любую кусочно-аффинную функцию из своего кодифференциального отображения и значения функции в точке. Второй алгоритм обеспечивает прямое преобразование кусочно-аффинной функции в сумму выпуклой и вогнутой полиэдральных функций.

1°. Класс разности выпуклых полиэдральных функций является достаточно хорошо изученным. Известны конструктивные необходимые и достаточные условия глобального минимума для этого класса [1]. На базе этих условий можно строить эффективные методы оптимизации.

Введём некоторые вспомогательные определения. Под $\langle \cdot, \cdot \rangle$ будем понимать скалярное произведение двух векторов. Пусть I, J — конечные индексные множества.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 ([2])**.** Функция

$$f(x) = \max_{i \in I}\{a_i + \langle v_i, x \rangle\}, \quad v_i, x \in \mathbb{R}^n, \quad a_i \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

называется *выпуклой полиэдральной* функцией.

Аналогичным образом задаётся вогнутая полиэдральная функция.

*Семинар по конструктивному негладкому анализу и недифференцируемой оптимизации «CNSA & NDO»: `http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/`

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Функция

$$f(x) = \min_{j \in J} \{b_j + \langle w_j, x \rangle\}, \quad w_j, x \in \mathbb{R}^n, \quad b_j \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

называется *вогнутой полиэдральной* функцией.

По умолчанию под *полиэдральной* функцией понимается выпуклая полиэдральная функция.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пространством кусочно-аффинных функций (обозначим его $\mathbf{F}$) называется линейное пространство, содержащее аффинные функции и замкнутое относительно операции взятия конечного максимума.

Таким образом, пространство $\mathbf{F}$ содержит функции вида

$$f = \sum_{i \in I} \alpha_i \max_{j \in J_i} f_i^j,$$

где $\alpha_i \in \mathbb{R}$ и все f_i^j принадлежат $\mathbf{F}$.

ТЕОРЕМА 1 ([3, 4])**.** *Кусочно-аффинная функция $f \in \mathbf{F}$ допускает представление*

$$f(x) = \max_{i \in I} \{a_i + \langle v_i, x \rangle\} + \min_{j \in J} \{b_j + \langle w_j, x \rangle\}, \tag{3}$$

или, что равносильно,

$$f(x) = \max_{i \in I} \{a_i + \langle v_i, x \rangle\} - \max_{j \in J} \{-b_j + \langle -w_j, x \rangle\}.$$

В докладе описываются два алгоритма приведения кусочно-аффинных функций к стандартному виду (3).

2°. Напомним определения выпуклой оболочки и крайних точек выпуклого множества (см. [5]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. *Выпуклой оболочкой* $\operatorname{co} M$ множества M называется наименьшее выпуклое множество, содержащее M.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Точка p выпуклого множества $S \subset \mathbb{R}^n$ называется *крайней*, если не существует пары точек $a, b \in S$ таких, что p лежит в интервале (a, b).

Множество E крайних точек S представляет собой наименьшее подмножество S, обладающее тем свойством, что $\operatorname{co} E = \operatorname{co} S$.

Зададим множество векторов

$$M = \bigcup_{i \in I} \begin{pmatrix} a_i \\ v_i \end{pmatrix},$$

где $a_i \in \mathbb{R}$, $v_i \in \mathbb{R}^n$. Пусть E является множеством крайних точек множества $\operatorname{co} M$:

$$E = \bigcup_{i \in I_0} \begin{pmatrix} a_i \\ v_i \end{pmatrix},$$

где $I_0 \subset I$. Справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА 1 ([6])**.** *Для функций*

$$\varphi_M(x) = \max_{i \in I}\{a_i + \langle v_i, x\rangle\}$$

и

$$\varphi_E(x) = \max_{i \in I_0}\{a_i + \langle v_i, x\rangle\}$$

справедливо равенство

$$\varphi_M(x) = \varphi_E(x).$$

Доказательство. По теореме Крейна-Мильмана ([7], с. 32) любой вектор $(a, v^T)^T$ из выпуклого множества $\operatorname{co} M$ представим в виде выпуклой комбинации крайних точек $\operatorname{co} M$:

$$\begin{pmatrix} a \\ v \end{pmatrix} = \sum_{j \in I_0} \alpha_j \begin{pmatrix} a_j \\ v_j \end{pmatrix}, \quad \sum_{j \in I_0} \alpha_j = 1, \ \alpha_j \geq 0, \ j \in I_0.$$

При $i \in I \setminus I_0$ получаем

$$a_i + \langle v_i, x\rangle = \sum_{j \in I_0} \alpha_j (a_j + \langle v_j, x\rangle) \leq \sum_{j \in I_0} \alpha_j \varphi_E(x) = \varphi_E(x),$$

откуда следует неравенство

$$\max_{i \in I \setminus I_0}\{a_i + \langle v_i, x\rangle\} \leq \max_{i \in I_0}\{a_i + \langle v_i, x\rangle\}. \tag{4}$$

На основании (4) заключаем, что

$$\begin{aligned} \varphi_M(x) &= \max\{\max_{i \in I \setminus I_0}\{a_i + \langle v_i, x\rangle\}, \max_{i \in I_0}\{a_i + \langle v_i, x\rangle\}\} = \\ &= \max_{i \in I_0}\{a_i + \langle v_i, x\rangle\} = \varphi_E(x). \end{aligned}$$

Лемма доказана. □

СЛЕДСТВИЕ 1. *Справедливо равенство*

$$\max_{i \in I}\{a_i + \langle v_i, x\rangle\} = \max_{(a, v^T)^T \in \operatorname{co} M}\{a + \langle v, x\rangle\}. \tag{5}$$

Аналогичные утверждения справедливы и для дискретного минимума.

3°. Ниже представлен алгоритм перевода произвольной кусочно-аффинной функции к стандартному виду (3). Для этого сперва напомним определения кодифференциала (см. [8]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество и $x \in X$. Будем говорить, что функция f, заданная и конечная на X, *кодифференцируема* в точке x, если существуют такие выпуклые компакты $\underline{d}f(x) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ и $\overline{d}f(x) \subset \mathbb{R}^{n+1}$, что

$$f(x+\Delta) = f(x) + \Phi_x(\Delta) + o_x(\Delta), \tag{6}$$

где

$$\Phi_x(\Delta) = \max_{(a,v)^T \in \underline{d}f(x)} \{a + \langle v, \Delta\rangle\} + \min_{(b,w)^T \in \overline{d}f(x)} \{b + \langle w, \Delta\rangle\},$$

$$\frac{o_x(\alpha\Delta)}{\alpha} \xrightarrow[\alpha\downarrow 0]{} 0 \quad \forall\, \Delta \in \mathbb{R}^n. \tag{7}$$

Здесь a, $b \in \mathbb{R}$, v, $w \in \mathbb{R}^n$. Если (7) имеет место равномерно по Δ из $S = \{\Delta \in \mathbb{R}^n \mid \|\Delta\| = 1\}$, то будем говорить, что функция f кодифференцируема в точке x равномерно по направлениям. Пара $Df(x) = [\underline{d}f(x), \overline{d}f(x)]$ называется кодифференциалом f в точке x, $\underline{d}f(x)$ — гиподифференциалом, а $\overline{d}f(x)$ — гипердифференциалом.

Покажем, что функция вида (3) является кодифференцируемой и найдём её кодифференциал.

ТЕОРЕМА 2. *Любая кусочно-аффинная функция $f \in \mathbf{F}$ является кодифференцируемой. При этом, разложение функции $f(x)$ имеет вид*

$$f(x+\Delta) = f(x) + \max_{(a,v^T)^T \in \underline{d}f(x)} \{a + \langle v, \Delta\rangle\} + \min_{(b,w^T)^T \in \overline{d}f(x)} \{b + \langle w, \Delta\rangle\}.$$

Доказательство. Воспользуемся представлением (3) функции $f \in \mathbf{F}$:

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

где

$$f_1(x) = \max_{i \in I} \varphi_i(x), \quad \varphi_i(x) = a_i + \langle v_i, x\rangle,$$

$$f_2(x) = \min_{j \in J} \psi_j(x), \quad \psi_j(x) = b_j + \langle w_j, x\rangle.$$

Имеем

$$f(x+\Delta) - f(x) = \max_{i\in I}\{\varphi_i(x+\Delta) - f_1(x)\} + \min_{j\in J}\{\psi_j(x+\Delta) - f_2(x)\} =$$
$$= \max_{i\in I}\{\varphi_i(x) - f_1(x) + \langle v_i, \Delta\rangle\} + \min_{j\in J}\{\psi_j(x) - f_2(x) + \langle w_j, \Delta\rangle\}.$$

В силу (5) получаем разложение в виде (6):

$$f(x+\Delta) = f(x) + \max_{(a,v^T)^T\in \underline{d}f(x)}\{a + \langle v, \Delta\rangle\} + \min_{(b,w^T)^T\in \overline{d}f(x)}\{b + \langle w, \Delta\rangle\},$$

где

$$\underline{d}f(x) = \mathrm{co}\left\{\bigcup_{i\in I}\begin{pmatrix} \varphi_i(x) - f_1(x) \\ v_i \end{pmatrix}\right\}, \quad \overline{d}f(x) = \mathrm{co}\left\{\bigcup_{j\in J}\begin{pmatrix} \psi_j(x) - f_2(x) \\ w_j \end{pmatrix}\right\}.$$

Теорема доказана. □

СЛЕДСТВИЕ 2. *Любая кусочно-аффинная функция $f \in \mathbf{F}$ однозначно восстанавливается в виде суммы выпуклой и вогнутой полиэдральных функций, если известны значение функции хотя бы в одной точке $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ и соответствующий кодифференциал $Df(\hat{x})$.*

Доказательство. Пусть задана функция $f \in \mathbf{F}$ не обязательно вида (3). Не умаляя общности, выберем $\hat{x} = 0_n$. Для вычисления кодифференциала функции в точке можно воспользоваться работами [8–10]. Вычислим $f(0_n)$ и $Df(0_n) = [\underline{d}f(0_n), \overline{d}f(0_n)]$, где

$$\underline{d}f(0_n) = \mathrm{co}\left\{\bigcup_{i\in I}\begin{pmatrix} a_i \\ v_i \end{pmatrix}\right\}, \quad \overline{d}f(0_n) = \mathrm{co}\left\{\bigcup_{j\in J}\begin{pmatrix} b_j \\ w_j \end{pmatrix}\right\},$$

a_i, $b_j \in \mathbb{R}$, v_i, $w_j \in \mathbb{R}^n$, $i \in I$, $j \in J$. В силу теоремы 2 справедливо представление

$$f(\Delta) = f(0_n) + \max_{(a,v^T)^T\in \underline{d}f(x)}\{a + \langle v, \Delta\rangle\} + \min_{(b,w^T)^T\in \overline{d}f(x)}\{b + \langle w, \Delta\rangle\}.$$

Теперь восстановим конечные наборы аффинных функций под максимумом и минимумом (см. (5)):

$$f(\Delta) = f(0_n) + \max_{i\in I}\{a_i + \langle v_i, \Delta\rangle\} + \min_{j\in J}\{b_j + \langle w_j, \Delta\rangle\} =$$
$$= \max_{i\in I}\{f(0_n) + a_i + \langle v_i, \Delta\rangle\} + \min_{j\in J}\{b_j + \langle w_j, \Delta\rangle\}. \tag{8}$$

Следствие доказано. □

Опишем основные шаги алгоритма представления кусочно-аффинной функции в виде (8).

Алгоритм 1. Пусть задана кусочно-аффинная функция $f \in \mathbf{F}$.

1) Используя кодифференциальное исчисление (см. [8–10]) вычислим $f(0_n)$ и $Df(0_n) = [\underline{d}f(0_n), \overline{d}f(0_n)]$, где

$$\underline{d}f(0_n) = \mathrm{co}\left\{\bigcup_{i\in I}\begin{pmatrix} a_i \\ v_i \end{pmatrix}\right\}, \quad \overline{d}f(0_n) = \mathrm{co}\left\{\bigcup_{j\in J}\begin{pmatrix} b_j \\ w_j \end{pmatrix}\right\},$$

a_i, $b_j \in \mathbb{R}$, v_i, $w_j \in \mathbb{R}^n$, $i \in I$, $j \in J$.

2) Запишем $f(x)$ в виде (8)

$$f(x) = \max_{i\in I}\{f(0_n) + a_i + \langle v_i, x\rangle\} + \min_{j\in J}\{b_j + \langle w_j, x\rangle\}. \tag{9}$$

Приведём пример работы алгоритма.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим функцию $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ вида (см. рис. 1)

$$f(x) = \max\left\{\min\{0, -x-1\}, 1 + \min\{x, -x\}, x - 3\right\}. \tag{10}$$

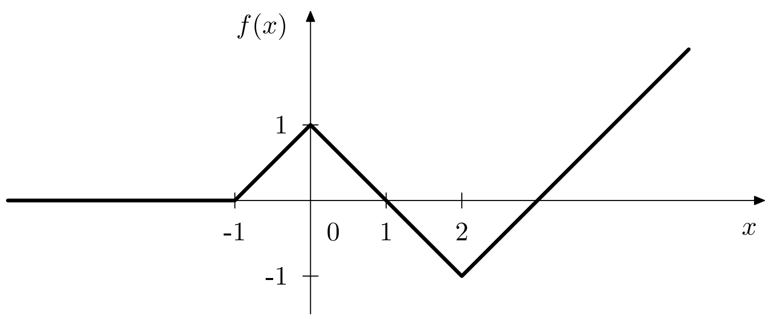

Рис. 1. График функции (10)

Имеем $f(0) = 1$. Вычислим кодифференциал $Df(0) = [\underline{d}f(0), \overline{d}f(0)]$ функции $f(x)$ в точке $x = 0$. Здесь

$$\underline{d}f(0) = \mathrm{co}\left\{\bigcup_{i=1:8}\begin{pmatrix} a_i \\ v_i \end{pmatrix}\right\} =$$

$$= \mathrm{co}\left\{\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}, \tag{11}$$

$$\overline{d}f(0) = \mathrm{co}\left\{ \bigcup_{j=1:4} \begin{pmatrix} b_j \\ w_j \end{pmatrix} \right\} = \mathrm{co}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}. \tag{12}$$

Запишем функцию (10) в виде (9):

$$f(x) = \max_{i=1:8}\{f(0_n) + a_i + \langle v_i, x\rangle\} + \min_{j=1:4}\{b_j + \langle w_j, x\rangle\}. \tag{13}$$

В силу (11)–(13) получим

$$\begin{aligned} f(x) = &\max\{-3+3x, -4+2x, -3+x, -4, 1+x, 0, -1+x, -1-x\}+ \\ &+\min\{2x, -1+x, 0, -1-x\}. \end{aligned}$$

4°. Рассмотрим еще один метод представления кусочно-аффинных функций в виде (3), который не использует вычисление кодифференциала.

Сперва рассмотрим схематично разложение функции (10) из примера 1 в виде дерева (см рис. 2).

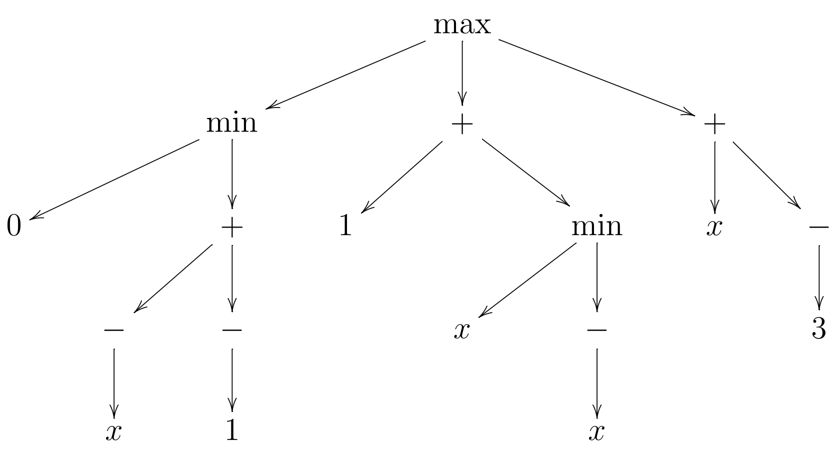

Рис. 2. Дерево функции (10)

Построить его можно, например, используя обратную польскую запись [11]. Полученное выражение может представлять собой всевозможные суперпозиции функций взятия поточечного максимума и минимума, аффинных функций от любого количества переменных, а также арифметических операций сложение, вычитание, умножение. Приведём три очевидных предложения, которые обеспечат исчисление суперпозиций элементов дерева.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Пусть*

$$f_1(x) = \max_{i=1:r}\{a_{1,i} + \langle v_{1,i}, x\rangle\} + \min_{j=1:s}\{b_{1,j} + \langle w_{1,j}, x\rangle\}, \tag{14}$$

$$f_2(x) = \max_{i=1:t}\{a_{2,i} + \langle v_{2,i}, x\rangle\} + \min_{j=1:u}\{b_{2,j} + \langle w_{2,j}, x\rangle\}.$$

Тогда для функции

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

справедливо представление

$$f(x) = \max_{i=1:\overline{r}}\{a_i + \langle v_i, x\rangle\} + \min_{j=1:\overline{s}}\{b_j + \langle w_j, x\rangle\}, \tag{15}$$

где $\overline{r} = rt$, $\overline{s} = su$,

$$\begin{pmatrix} a_i \\ v_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{(k-1)t+\ell} \\ v_{(k-1)t+\ell} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,k} + a_{2,\ell} \\ v_{1,k} + v_{2,\ell} \end{pmatrix}, \quad k = 1:r,\ \ell = 1:t, \tag{16}$$

$$\begin{pmatrix} b_j \\ w_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{(k-1)u+\ell} \\ w_{(k-1)u+\ell} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{1,k} + b_{2,\ell} \\ w_{1,k} + w_{2,\ell} \end{pmatrix}, \quad k = 1:s,\ \ell = 1:u. \tag{17}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Для функции*

$$f(x) = \lambda f_1(x),$$

где $f_1(x)$ *имеет вид* (14), *справедливо представление*

$$f(x) = \max_{i=1:\overline{r}}\{a_i + \langle v_i, x\rangle\} + \min_{j=1:\overline{s}}\{b_j + \langle w_j, x\rangle\},$$

где для $\lambda \geq 0$ $\ \overline{r} = r$, $\overline{s} = s$,

$$\begin{pmatrix} a_i \\ v_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{1,i} \\ \lambda v_{1,i} \end{pmatrix},\ i = 1:r, \qquad \begin{pmatrix} b_j \\ w_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda b_{1,j} \\ \lambda w_{1,j} \end{pmatrix},\ j = 1:s,$$

а для $\lambda \leq 0$ $\ \overline{r} = s$, $\overline{s} = r$,

$$\begin{pmatrix} a_i \\ v_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda b_{1,i} \\ \lambda w_{1,i} \end{pmatrix},\ i = 1:s, \qquad \begin{pmatrix} b_j \\ w_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{1,j} \\ \lambda v_{1,j} \end{pmatrix},\ j = 1:r.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3 ([8], с. 116)**.** *Пусть заданы функции* $f_1, \ldots, f_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, *причем* $f_i(x) = \chi_i(x) + \psi_i(x)$, $i \in 1:k$. *Тогда*

$$\max_{i\in 1:k} f_i(x) = \max_{j\in 1:k}\left\{\chi_j(x) - \sum_{i\in 1:k, i\neq j}\psi_i(x)\right\} + \sum_{i=1}^{k}\psi_i(x), \tag{18}$$

$$\min_{i\in 1:k} f_i(x) = \sum_{i=1}^{k}\chi_i(x) + \min_{j\in 1:k}\left\{\psi_j(x) - \sum_{i\in 1:k, i\neq j}\chi_i(x)\right\}. \tag{19}$$

Доказательство предложения 3 в книге [8] является довольно громоздким. Более изящный вариант приведен в докладе [6].

Опишем основные шаги второго алгоритма представления кусочно-аффинной функции в виде (3).

Алгоритм 2. Пусть заданы функция $f \in \mathbf{F}$ и вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$.

1) Разложим функцию $f(x)$ в виде дерева так, чтобы на вершинах дерева находились только переменные x_i, $i = 1 : n$, и положительные скаляры.

2) Запишем элементы вектора $x \in \mathbb{R}^n$ в виде (3):

$$x_i = \max\{0 + \langle e_i, x\rangle\} + \min\{0 + \langle 0_n, x\rangle\}, \tag{20}$$

где $e_i = (\underset{1}{0}, \underset{2}{0}, \ldots, \underset{i-1}{0}, \underset{i}{1}, \underset{i+1}{0}, \ldots, \underset{n}{0})^T$, $i = 1 : n$. Аналогичным образом записываем скаляры $c \in \mathbb{R}_+$:

$$c = \max\{c + \langle 0_n, x\rangle\} + \min\{0 + \langle 0_n, x\rangle\}. \tag{21}$$

3) Произведём движение по дереву снизу вверх. Используя предложения 1-3, запишем каждую суперпозицию элементов дерева в виде суммы минимума и максимума от аффинных функций, т. е.

$$\max_{i=1:r}\{a_i + \langle v_i, x\rangle\} + \min_{j=1:s}\{b_j + \langle w_j, x\rangle\}. \tag{22}$$

По достижении вершины дерева получим искомое представление функции $f(x)$ в виде (3).

Приведем два примера, иллюстрирующих работу алгоритма 2.

ПРИМЕР 2. Воспользуемся функцией $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ из примера 1:

$$f(x) = \max\left\{\min\{0, -x-1\}, 1 + \min\{x, -x\}, x - 3\right\}. \tag{23}$$

Представим разложение функции (23) в виде дерева (см рис. 2). Рассмотрим элементы дерева снизу вверх. Каждую функцию, представляющую суперпозицию элементов, запишем в виде (22). Подробно распишем алгоритм для левой ветви дерева

$$\varphi(x) := \min\{0, -x-1\}.$$

Для функции $\varphi_1(x) := 0$ положим

$$\varphi_1(x) = \max\{0 + 0 \cdot x\} + \min\{0 + 0 \cdot x\}.$$

Используя (20), функцию $\varphi_2(x) := x$ представим в виде (22):

$$\varphi_2(x) = \max\{0 + 1 \cdot x\} + \min\{0 + 0 \cdot x\}.$$

Для функции $\varphi_3(x) := -x$ воспользуемся предложением 2, где $\lambda = -1$ и $f_1(x) = \varphi_2(x)$. Получим

$$\varphi_3(x) = \max\{0 + 0 \cdot x\} + \min\{0 + (-1) \cdot x\}.$$

Используя (21), функцию $\varphi_4(x) := 1$ представим в виде (22):

$$\varphi_4(x) = \max\{1 + 0 \cdot x\} + \min\{0 + 0 \cdot x\}.$$

Для функции $\varphi_5(x) := -1$ воспользуемся предложением 2, где $\lambda = -1$ и $f_1(x) = \varphi_4(x)$. Получим

$$\varphi_5(x) = \max\{0 + 0 \cdot x\} + \min\{-1 + 0 \cdot x\}.$$

Далее для суммы $\varphi_6(x) := \varphi_3(x) + \varphi_5(x)$ на основании предложения 1 получим

$$\varphi_6(x) = \max\{0 + 0 \cdot x\} + \min\{-1 + (-1) \cdot x\}.$$

Чтобы закончить преобразование функции $\varphi(x) = \min\{\varphi_1(x), \varphi_6(x)\}$, обратимся к формуле (19) предложения 3. Положим $f_1(x) := \varphi_1(x)$, $f_2(x) := \varphi_6(x)$, где $\varphi_1(x) = \chi_1(x) + \psi_1(x)$ и $\varphi_6(x) = \chi_2(x) + \psi_2(x)$,

$$\begin{array}{rclcrcl} \chi_1(x) & = & \max\{0 + 0 \cdot x\}, & & \psi_1(x) & = & \min\{0 + 0 \cdot x\}, \\ \chi_2(x) & = & \max\{0 + 0 \cdot x\}, & & \psi_2(x) & = & \min\{-1 + (-1) \cdot x\}. \end{array}$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \min\{0, -x - 1\} \equiv \max\{0 + 0 \cdot x\} + \max\{0 + 0 \cdot x\} + \\ & + \min\left\{\min\{0 + 0 \cdot x\} - \max\{0 + 0 \cdot x\}, \min\{-1 + (-1) \cdot x\} - \max\{0 + 0 \cdot x\}\right\} = \\ & = \max\{0 + 0 \cdot x\} + \min\left\{\min\{0 + 0 \cdot x\}, \min\{-1 + (-1) \cdot x\}\right\} = \\ & = \max\{0 + 0 \cdot x\} + \min\{0 + 0 \cdot x, -1 + (-1) \cdot x\}. \end{aligned}$$

Подобным образом продолжим движение вверх по дереву до получения конечного результата:

$$\begin{aligned} f(x) = & \max\left\{\min\{0, -x - 1\}, 1 + \min\{x, -x\}, x - 3\right\} = \\ = & \max\{2 - 2x, 2, 3 - x, 4, -1 - x, -1 + x, 0, 2x\} + \\ & + \min\{-2 + 2x, -2, -3 + x, -3 - x\}. \end{aligned}$$

З а м е ч а н и е 1. В предложении 1 векторы (см. (16), (17))

$$\begin{pmatrix} a_i \\ v_i \end{pmatrix}, \ i = 1 : \overline{r}, \quad \begin{pmatrix} b_j \\ w_j \end{pmatrix}, \ j = 1 : \overline{s},$$

формируются, используя сумму по Минковскому, т. е. каждый элемент одного множества складывается со всеми элементами другого множества. Получаются множества точек, которые являются избыточными для представления функции в виде (22), что отрицательно будет сказываться при дальнейших численных манипуляциях с преобразованной функцией (15). Опишем один метод удаления избыточных точек на примере дискретного максимума в функции (15). Пусть

$$M = \bigcup_{i=1:\overline{r}} \begin{pmatrix} a_i \\ v_i \end{pmatrix}.$$

Не умаляя общности, предположим, что крайние точки выпуклой оболочки co M имеют индексы $i = 1 : \hat{r}$, $\hat{r} \leq \overline{r}$. Тогда из леммы 1 следует равенство

$$\max_{i=1:\overline{r}} \{a_i + \langle v_i, x \rangle\} = \max_{i=1:\hat{r}} \{a_i + \langle v_i, x \rangle\}.$$

Таким образом векторы $(a_i, v_i^T)^T$, $i = \hat{r} + 1 : \overline{r}$, являются избыточными.

Для иллюстрации описанного в замечании 1 эффекта рассмотрим выпуклую полиэдральную функцию

$$\chi(x) = \max\{2 - 2x, \underline{2}, \underline{3 - x}, 4, -1 - x, -1 + x, \underline{0}, 2x\}. \qquad (24)$$

Функция (24) эквивалентна функции взятия поточечного максимума от меньшего количества элементов

$$\chi(x) \equiv \max\{2 - 2x, 4, -1 - x, -1 + x, 2x\}.$$

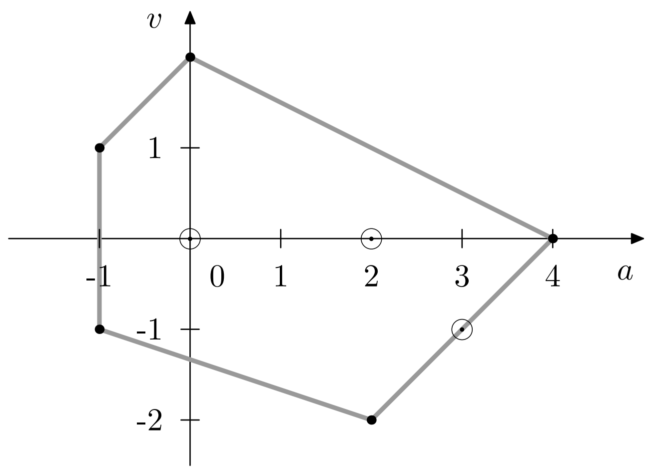

Рис. 3. Выпуклая оболочка коэффициентов (24)

Заметим, что векторы коэффициентов подчеркнутых функций из (24), которые на рис. 3 обведены кружками, являются неинформативными при построении выпуклой оболочки.

Замечание 2. В алгоритме 2 выражение (22) задается не единственным образом. По ходу исполнения алгоритма 2 будем стараться второе слагаемое в (22) записывать равным тождественному нулю.

Чтобы осуществить оптимизацию записи (22), воспользуемся следующим предложением.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Если в выражении* (22) $s = 1$, *то*

$$\max_{i=1:r}\{a_i + \langle v_i, x\rangle\} + \min_{j=1:1}\{b_j + \langle w_j, x\rangle\} = \\ = \max_{i=1:r}\{a_i + b_1 + \langle v_i + w_1, x\rangle\} + \min\{0 + \langle 0_n, x\rangle\}. \quad (25)$$

ПРИМЕР 3. Рассмотрим функцию $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = \max\Big\{ \max\{x_1 - x_2, -x_1 + x_2\}, \\ \min\big\{ \max\{-x_1 - x_2 + 3, x_1 + x_2 - 3\}, \max\{-x_1 - x_2 + 7, x_1 + x_2 - 6\}\big\}\Big\}. \quad (26)$$

Подробно распишем шаги алгоритма 2 для функции (см. рис. 4)

$$\varphi(x) := \max\{x_1 - x_2, -x_1 + x_2\}. \quad (27)$$

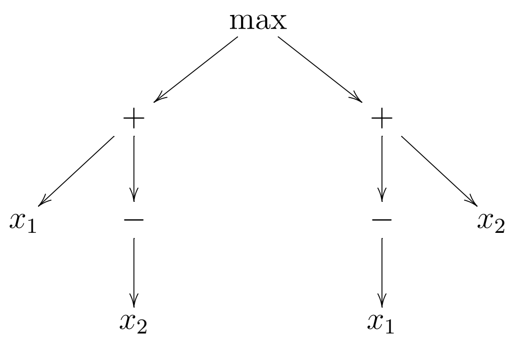

Рис. 4. Дерево функции (27)

Используя (20), функции $\varphi_1(x) := x_1$ и $\varphi_2(x) := x_2$ представим в виде (22):

$$\varphi_1(x) = \max\{0 + \langle (1,0)^T, x\rangle\} + \min\{0 + \langle (0,0)^T, x\rangle\},$$

$$\varphi_2(x) = \max\{0 + \langle (0,1)^T, x\rangle\} + \min\{0 + \langle (0,0)^T, x\rangle\}.$$

Для функции $\varphi_3(x) := -x_2$ воспользуемся предложением 2, где $\lambda = -1$ и $f_1(x) = \varphi_2(x)$. Получим

$$\varphi_3(x) = \max\{0 + \langle (0,0)^T, x\rangle\} + \min\{0 + \langle (0,-1)^T, x\rangle\}.$$

Далее для суммы $\varphi_4(x) := \varphi_3(x) + \varphi_1(x)$ воспользуемся предложением 1. Имеем

$$\varphi_4(x) = \max\{0 + \langle (1,0)^T, x\rangle\} + \min\{0 + \langle (0,-1)^T, x\rangle\}.$$

Записываем функцию $\varphi_4(x)$ таким образом, чтобы под функцией взятия минимума остался тождественный ноль (см. (25)), т. е.

$$\varphi_4(x) = \max\{0 + \langle (1,-1)^T, x\rangle\} + \min\{0 + \langle (0,0)^T, x\rangle\}.$$

Аналогичным образом записываем функцию $\varphi_5(x) := x_2 - x_1$:

$$\varphi_5(x) = \max\{0 + \langle (-1,1)^T, x\rangle\} + \min\{0 + \langle (0,0)^T, x\rangle\}.$$

Чтобы закончить преобразование функции $\varphi(x) = \max\{\varphi_4(x), \varphi_5(x)\}$ обратимся к формуле (18) предложения 3. Положим $f_1(x) = \varphi_4(x)$ и $f_2(x) = \varphi_5(x)$, где $\varphi_4(x) = \chi_1(x) + \psi_1(x)$ и $\varphi_5(x) = \chi_2(x) + \psi_2(x)$,

$$\begin{aligned} \chi_1(x) &= \max\{0 + \langle (1,-1)^T, x\rangle\}, & \psi_1(x) &= \min\{0 + \langle (0,0)^T, x\rangle\}, \\ \chi_2(x) &= \max\{0 + \langle (-1,1)^T, x\rangle\}, & \psi_2(x) &= \min\{0 + \langle (0,0)^T, x\rangle\}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} &\max\{x_1 - x_2, -x_1 + x_2\} = \\ &= \max\big\{\max\{0 + \langle (1,-1)^T, x\rangle\} - \min\{0 + \langle (0,0)^T, x\rangle\}, \\ &\qquad \max\{0 + \langle (-1,1)^T, x\rangle\} - \min\{0 + \langle (0,0)^T, x\rangle\}\big\} + \\ &\quad + \min\{0 + \langle (0,0)^T, x\rangle\} + \min\{0 + \langle (0,0)^T, x\rangle\} = \\ &= \max\{0 + \langle (1,-1)^T, x\rangle, 0 + \langle (-1,1)^T, x\rangle\} + \min\{0 + \langle (0,0)^T, x\rangle\}. \end{aligned}$$

Аналогично поступая для остальных частей функции f, получаем нужное нам представление

$$f(x) = \max_{(a_i, v_i^T)^T \in M_1} \{a_i + \langle v_i, x\rangle\} + \min_{(b_j, w_j^T)^T \in M_2} \{b_j + \langle w_j, x\rangle\},$$

где

$$\begin{aligned} M_1 = \Bigg\{ &\begin{pmatrix} -16 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -11 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -13 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ &\begin{pmatrix} -10 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -13 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \Bigg\}, \quad M_2 = \Bigg\{ \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 13 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Bigg\}. \end{aligned}$$

Отметим, что все точки из M_1 и M_2 являются крайними для своих выпуклых оболочек.

ЛИТЕРАТУРА

1. Polyakova L. N. *On global unconstrained minimization of the difference of polyhedral functions* // Journal of Global Optimization, 2011. Vol. 50. pp. 179–195.

2. Rockafellar R. Convex analysis. Prinston University Press. Prinston, 1970.

3. Еремин И. И. *Некоторые вопросы кусочно-линейного программирования* // Изв. вузов. Матем., 1997, № 12, С. 49–61.

4. Gorokhovik V. V., Zorko I. O. *Piecewise affine functions and polyhedral sets* // Optimization. 1994. Vol. 31. pp. 209–221.

5. Препарата Ф., Шеймос М. Вычислительная геометрия: Введение. М.: Мир, 1989.

6. Малозёмов В. Н. *Некоторые свойства дискретного максимума* // Семинар «CNSA & NDO». Избранные доклады. 14 мая 2015 г. (`http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/reps15.shtml#0514a`)

7. Лейхтвейс К. Выпуклые множества. М.: Наука, 1985.

8. Демьянов В. Ф., Рубинов А. М. Основы негладкого анализа и квазидифференциального исчисления. М.: Наука, 1990.

9. Андрамонов М. Ю., Тамасян Г. Ш. *Реализация аналитического кодифференцирования в пакете MATLAB* // Вычислительные методы и программирование. 2007. Т. 4. С. 1–5.

10. Ангелов Т. А. *О вычислении кодифференциалов* // Вычислительные методы и программирование. 2013, Т. 14. С. 113–122.

11. Pogorzelski H. A. *Reviewed work(s): Remarks on Nicod's Axiom and on "Generalizing Deduction" by Jan Lukasiewicz; Jerzy Slupecki; Panstwowe Wydawnictwo Naukowe* // The Journal of Symbolic Logic. Sep. 1965. Vol. 30. No. 3. pp. 376–377.