

МЕТОД ЗАРЯЖЕННЫХ ШАРИКОВ*

М. Э. Аббасов

abbasov.majid@gmail.com

21 мая 2015 г.

Аннотация. Механические аналогии в ряде случаев дают возможность строить эффективные алгоритмы для решения задач математического программирования. Хорошо известен метод тяжелого шарика, позволяющий решать задачи безусловной оптимизации. Бесспорным преимуществом таких методов является наглядность, идейная прозрачность, а также уверенность в их сходимости, проистекающая из законов механики. В настоящей работе рассматривается задача поиска минимального расстояния между точкой и гладким выпуклым замкнутым множеством, а также задача поиска минимального расстояния между двумя такими множествами. Для их решения предлагается новый алгоритм [1], базирующийся на механических принципах. Нужно отметить, что рассматриваемые в статье задачи имеют многочисленные практические приложения и возникают, в частности, во многих разделах математики. Например, в негладком анализе вектор, на котором достигается минимальное расстояние от начала координат до субдифференциала или экзостера, определяет направление наискорейшего спуска [2–4]. Поэтому не удивительно, что решение данной проблемы привлекает внимание многих исследователей [5–10].

1°. Вспомогательные сведения и постановка задачи. Идея перехода от исходной оптимизационной задачи к некоторой механической системе, стремящейся с течением времени к равновесному положению, совпадающему с решением исходной задачи, позволяет строить новые эффективные итерационные алгоритмы. Для этого вначале составляют дифференциальные уравнения движения, а затем переходят к разностной схеме их решения. Такой подход не нов и подробно рассмотрен в [11], где класс получаемых таким образом методов называется методами установления. Очевидно, речь идет об установлении равновесия в нестационарной механической системе, которой заменяется исходная стационарная задача. Одним из наиболее известных представителей

*Семинар по конструктивному негладкому анализу и недифференцируемой оптимизации «CNSA & NDO»: <http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/>

этого класса является метод тяжелого шарика. В нем для решения задачи поиска минимума функции $f(x)$ предлагается в присутствии сил тяжести и сопротивления поместить на поверхность $y = f(x)$ тяжелый шарик, который может двигаться только по данной поверхности (см. рис. 1). Ясно, что шарик в конечном итоге займет положение, соответствующее (локальному) минимуму потенциала $f(x)$, то есть остановится в решении исходной задачи.



Рис. 1. Метод тяжелого шарика.

Уравнение движения

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu \frac{dx}{dt} + \frac{\nabla f(x)}{1 + \|\nabla f(x)\|^2} = 0,$$

в окрестности равновесия (то есть точки x_* , в которой $\nabla f(x_*) = 0$) мало отличается от уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu \frac{dx}{dt} + \nabla f(x) = 0.$$

Откуда, переходя к разностной схеме, приходим к алгоритму с двумя параметрами α, β

$$x_{n+1} = x_n + \alpha(x_n - x_{n-1}) + \beta \nabla f(x_n),$$

сходящемуся с линейной скоростью. За счет выбора параметров можно добиться получения наилучшего (в смысле количества итераций) линейного процесса.

Схема большинства известных методов установления описывается уравнениями вида

$$A_0 \left(x, \frac{dx}{dt} \right) \frac{dx}{dt} + A_1 \left(x, \frac{dx}{dt}, \nabla f(x) \right) = 0$$

или

$$B_0 \left(x, \frac{dx}{dt} \right) \frac{d^2x}{dt^2} + B_1 \left(x, \frac{dx}{dt}, \nabla f(x) \right) = 0,$$

где

$$A_0(x_*, 0) \neq 0, \quad A_1(x_*, 0, 0) = 0,$$

$$B_0(x_*, 0) \neq 0, \quad B_1(x_*, 0, 0) = 0$$

и выполнены условия диссипативности, обеспечивающие сходимость к точке экстремума x_* . Отметим, что в [11] подробно рассмотрен процесс установления, обеспечивающий линейную скорость сходимости, и показано, что за счет выбора параметров метода можно добиться оптимальности процесса.

Изложение будет вестись для n -мерного евклидова пространства. Пусть \tilde{x} произвольная точка из \mathbb{R}^n . Введем множество $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq 0\}$, где $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ выпуклая, непрерывно дифференцируемая функция, и рассмотрим экстремальную задачу

$$\begin{cases} \|x - \tilde{x}\| \longrightarrow \inf \\ x \in X \end{cases} \quad (1)$$

Очевидно, что X — замкнутое, выпуклое множество. Выбирая произвольное $x \in X$, можем гарантировать, что минимум достигается на множестве $X \cap B_{\|x\|}(\tilde{x})$, где $B_{\|x\|}(\tilde{x})$ замкнутый шар радиуса $\|x\|$ с центром в точке \tilde{x} . Это множество замкнуто и выпукло как пересечение двух замкнутых выпуклых множеств. Кроме того, оно и ограничено, как пересечение двух множеств, одно из которых ограничено. Поэтому исходная задача имеет решение, т. е. существует $x_* \in X$, на котором искомый инфимум достигается. Кроме того, без уменьшения общности можно считать $\tilde{x} = 0_n$. С учетом сказанного задачу (1) можно переписать в виде

$$\begin{cases} \|x\| \longrightarrow \min \\ x \in X \end{cases} \quad (2)$$

Ее мы и будем рассматривать в дальнейшем.

2°. Идейная основа алгоритма и его реализация. Для решения задачи мысленно поместим в начало координат отрицательный заряд q и зафиксируем его. Выберем в множестве X произвольную точку \hat{x} , поместим в неё положительно заряженный шарик массой m и зарядом q . Силой тяжести будем пренебрегать. Шарик начнет двигаться в направлении начала координат по прямой, соединяющей шарики, до тех пор пока не столкнется с границей множества X . Координату точки столкновения можно найти, решив систему

$$\begin{cases} f(x) = 0 \\ x = \lambda \hat{x}, \lambda \in (-\infty, \infty), \end{cases} \quad (3)$$

и выбрав из двух решений то, которое находится ближе к началу координат. В результате получим $x_0 \in X$ (см. рис. 2).

Далее в отсутствии силы трения шарик движется по внутренней стороне поверхности, ограничивающей X , достигая положения равновесия, которое в данном случае совпадает с решением задачи (2), и начинает колебаться около этого положения. Действительно, именно в этой точке сила нормальной

реакции поверхности уравнивается силой Кулона. В любой же другой точке касательная составляющая силы Кулона отлична от нуля и направлена к положению равновесия. Для того чтобы колебания стали затухающими и процесс сошелся к искомому решению, можно ввести силу сопротивления, пропорциональную скорости и направленную противоположно ей. Выписав дифференциальные уравнения движения и перейдя к разностной схеме их решения, получим итерационный алгоритм решения задачи (2).

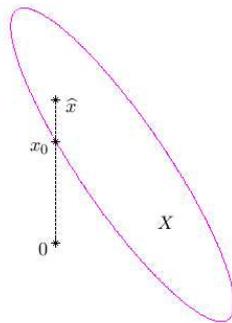


Рис. 2. Нахождение начальной точки x_0 .

2.1. Уравнения движения. Обозначим координаты шарика $x(t)$, где t время. Известно, что кулоновская сила равна

$$F(t) = -\frac{c_1 q^2}{\|x\|^3} x,$$

где c_1 — электрическая постоянная. Сила нормальной реакции перпендикулярна поверхности в точке x , направлена внутрь множества и по величине равна нормальной составляющей кулоновской силы,

$$N(t) = -\frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|^2} \langle F(t), \nabla f(x) \rangle.$$

Силу сопротивления определим формулой

$$R(t) = -c_2 \dot{x},$$

где c_2 — коэффициент сопротивления.

По второму закону Ньютона

$$m\ddot{x}(t) = F(t) + N(t) + R(t). \quad (4)$$

2.2. Переход к разностной схеме. Перейдём от (4) к системе первого порядка с помощью введения n -мерного вектора фиктивных переменных $z(t)$:

$$\begin{cases} \dot{x} = z \\ \dot{z} = \psi(x, z) \end{cases} \quad (5)$$

где

$$\psi(x, z) = -\frac{p_1}{\|x\|^3}x + \frac{p_1 \langle x, \nabla f(x) \rangle}{\|x\|^3 \|\nabla f(x)\|^2} \nabla f(x) - p_2 z$$

и p_1, p_2 — параметры, зависящие от m, q, c_1, c_2 . Полученную систему (5) будем решать методом ломанных Эйлера. Выбираем $x(0) = x_0, z(0) = 0_n$ и некоторое малое положительное δ — длину шага. Пусть у нас есть x_{k-1}, z_{k-1} , тогда

$$\begin{cases} x_k = x_{k-1} + \delta z_{k-1} \\ z_k = z_{k-1} + \delta \psi(x_{k-1}, z_{k-1}) \end{cases} \quad (6)$$

Отметим, что схема Эйлера решения системы (5) эквивалентна применению градиентного спуска для функции, чей градиент совпадает с правой частью этой системы. Поэтому решение интересующей нас задачи (2) есть минимум такой функции. Но если градиент указанной функции удовлетворяет условию Липшица, то существует постоянный шаг, при котором градиентный спуск сходится. Правая часть (5), очевидно, удовлетворяет условию Липшица, поэтому можно утверждать, что найдется такой малый шаг δ , при котором алгоритм (6) будет сходящимся. В дальнейшем при расчетах будем использовать часто применяющееся на практике значение $\delta = 0.001$.

Проблема тут заключается в том, что на каждой итерации мы вместо движения по истинной траектории совершаем малый шаг вдоль касательной к этой траектории (см. рис. 3). С учетом выпуклости множества X это приводит к тому, что с ростом k точка x_k будет все дальше отдаляться от истинной траектории, пролегающей по границе множества X .

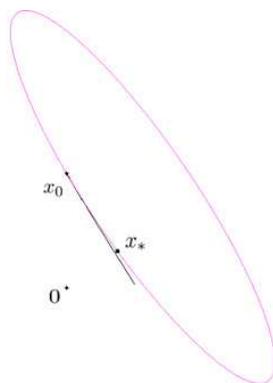


Рис. 3. Траектория решения по схеме (6) выводит за границы множества с ростом k . Здесь x_* — положение равновесия.

Для преодоления этой проблемы введем специальную процедуру коррекции, заключающейся в проектировании (возвращении) точки x_k на границу множества X . Пусть из x_{k-1} , совершив итерацию по (6), попадаем в точку \tilde{x}_{k-1} . Так как \tilde{x}_{k-1} при малом δ находится в малой окрестности границы множества X , можем считать, что прямая, проходящая через \tilde{x}_{k-1} параллельно $\nabla f(\tilde{x}_{k-1})$ пересекает поверхность множества X под прямым углом. Поэтому точку этого пересечения будем считать проекцией \tilde{x}_{k-1} на границу X и именно ее брать в качестве x_k . Таким образом

$$x_k = \tilde{x}_{k-1} + \frac{\nabla f(\tilde{x}_{k-1})}{\|\nabla f(\tilde{x}_{k-1})\|} \xi,$$

где ξ некий скалярный параметр, определяемый из условия

$$f\left(\tilde{x}_{k-1} + \frac{\nabla f(\tilde{x}_{k-1})}{\|\nabla f(\tilde{x}_{k-1})\|} \xi\right) = 0.$$

Разлагая эту функцию в окрестности $\xi = 0$ и учитывая близость \tilde{x}_{k-1} к границе X , отбрасываем все слагаемые выше первого порядка. Получаем уравнение

$$f(\tilde{x}_{k-1}) + \left\langle \nabla f(\tilde{x}_{k-1}), \frac{\nabla f(\tilde{x}_{k-1})}{\|\nabla f(\tilde{x}_{k-1})\|} \right\rangle \xi = 0.$$

Значит,

$$x_k = \tilde{x}_{k-1} - \frac{\nabla f(\tilde{x}_{k-1})}{\|\nabla f(\tilde{x}_{k-1})\|^2} f(\tilde{x}_{k-1}).$$

Окончательно алгоритм (6) переписется в виде двухэтапной процедуры

$$\begin{cases} \tilde{x}_{k-1} = x_{k-1} + \delta z_{k-1} \\ x_k = \tilde{x}_{k-1} - \frac{\nabla f(\tilde{x}_{k-1})}{\|\nabla f(\tilde{x}_{k-1})\|^2} f(\tilde{x}_{k-1}) \\ z_k = z_{k-1} + \delta \psi(x_{k-1}, z_{k-1}) \end{cases} \quad (7)$$

Отметим, что необходимость процедуры коррекции возникла только из-за замены непрерывного процесса дискретным аналогом. Полученная схема (7) есть ни что иное как корректная процедура численного решения системы (5). На рис. 4 приведена иллюстрация работы алгоритма (7).

2.3. Критерий останова и скорость сходимости. В положении равновесия сила нормальной реакции уравновешивается силой Кулона, что означает коллинеарность векторов x_k и $\nabla f(x_k)$. Поэтому в качестве критерия останова можно взять условие

$$\sqrt{\sum_{i=2}^n \left(\frac{x_k^i}{x_k^1} - \frac{f'_{x^i}(x_k)}{f'_{x^1}(x_k)} \right)^2} < \varepsilon, \quad (8)$$

где $\varepsilon > 0$ — произвольное малое число.

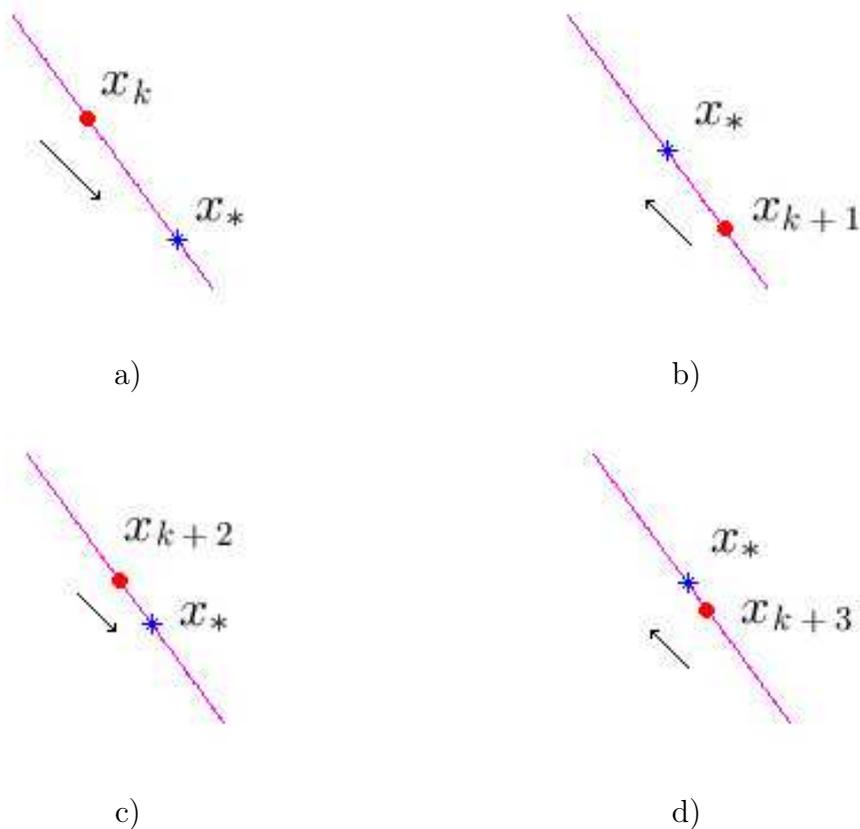


Рис. 4. Иллюстрация работы алгоритма (7): а) точка движется к положению равновесия x_* , б) точка "проскакивает" x_* , останавливается и меняет направление движения, в) точка опять "проскакивает" x_* , но останавливается ближе к x_* , д) точка останавливается еще ближе к x_* .

Отметим, что коллинеарность векторов x_k и $\nabla f(x_k)$ можно получить и из необходимых условия экстремума для решаемой нами задачи условной оптимизации. Действительно, функция Лагранжа в данном случае может быть записана в виде

$$L(x, \lambda) = \|x\|^2 + \lambda f(x),$$

где λ — некоторый скаляр. Отсюда, решение должно удовлетворять условию

$$2x + \lambda \nabla f(x) = 0,$$

что опять же означает коллинеарность x_k и $\nabla f(x_k)$.

Из механики самого процесса очевидно, что решение системы (5) асимптотически устойчиво. Кроме того, для двумерного случая можно построить первое приближение системы в отклонениях

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \\ \dot{\xi}_3 \\ \dot{\xi}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ p_1 a_1 & p_1 b_1 & -p_2 & 0 \\ p_1 a_2 & p_1 b_2 & 0 & -p_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{pmatrix},$$

где a_i, b_i — некоторые значения зависящие от x_* , $f(x_*)$ и $\nabla f(x_*)$. Корни характеристического уравнения для этой системы могут быть найдены с помощью формул Феррари:

$$\begin{aligned} &-\frac{p_2}{2} - \frac{\sqrt{2p_1(A-B) + p_2^2}}{2}, & -\frac{p_2}{2} + \frac{\sqrt{2p_1(A-B) + p_2^2}}{2}, \\ &-\frac{p_2}{2} - \frac{\sqrt{2p_1(A+B) + p_2^2}}{2}, & -\frac{p_2}{2} + \frac{\sqrt{2p_1(A+B) + p_2^2}}{2}, \end{aligned}$$

где

$$A = a_1 + b_2, \quad B = \sqrt{a_1^2 - 2a_1b_2 + b_2^2 + 4a_2b_1}.$$

Отсюда следует, что по крайней мере в окрестности решения система экспоненциально устойчива, а значит алгоритм (7) сходится с линейной скоростью.

За счет выбора параметров p_1, p_2 можно существенно влиять на скорость сходимости полученного линейного процесса.

2.4. Численные эксперименты. В табл. 1 приведены результаты численного эксперимента для задачи поиска минимального расстояния от нуля до эллипсоида

$$f(x) = \langle Ax, x \rangle + \langle b, x \rangle + c,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5/2 \\ 5/2 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -30 \\ -21 \end{pmatrix}, \quad c = 47.$$

Необходимо отметить, что при $p_1 \gg p_2$ происходит очень медленное затухание колебаний, а при $p_1 \ll p_2$ сопротивление очень велико. И то и другое ведет к медленной сходимости процесса (см. табл. 1). Оптимальные значения p_1, p_2 , очевидно, находятся между этими двумя предельными случаями.

Таблица 1. Результаты применения алгоритма (7) при $\varepsilon = 10^{-8}$, $\delta = 10^{-3}$.

p_1	p_2	$criteria^a$	N^b	$\ x - x_*\ ^c$	t^d
100	0.05	9.3×10^{-9}	238411	0.87×10^{-6}	1.245
100	0.1	6.9×10^{-9}	71601	8.53×10^{-6}	0.379
100	0.5	3.5×10^{-9}	36100	0.15×10^{-6}	0.195
100	1	4.2×10^{-9}	19183	17.5×10^{-9}	0.104
100	5	3.1×10^{-9}	5009	80.8×10^{-9}	0.027
100	10	10×10^{-9}	8216	20.2×10^{-9}	0.044
100	20	10×10^{-9}	19588	20.1×10^{-9}	0.105
100	30	10×10^{-9}	30041	20.1×10^{-9}	0.163
100	50	10×10^{-9}	50608	20×10^{-9}	0.273
100	100	10×10^{-9}	101665	20×10^{-9}	0.555
100	200	10×10^{-9}	203556	20×10^{-9}	1.105
100	2000	10×10^{-9}	2036340	20×10^{-9}	10.528

^a Значение выражение (8),

^b Количество итерации,

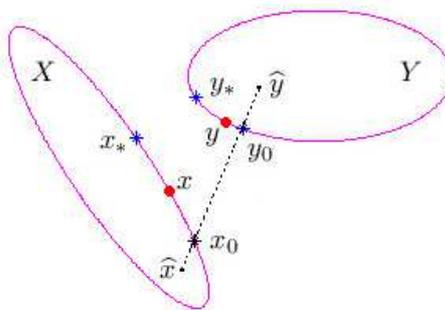
^c Расстояние от истинного решения,

^d Время работы алгоритма в секундах

3°. Нахождение минимального расстояния между двумя множествами. Пусть $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_1(x) \leq 0\}$, $Y = \{y \in \mathbb{R}^n \mid f_2(y) \leq 0\}$, где $f_1, f_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — выпуклые, непрерывно дифференцируемые функции. Экстремальная задача

$$\begin{cases} \|x - y\| \rightarrow \inf \\ x \in X \\ y \in Y \end{cases}$$

может быть решена с применением того же подхода. Можно поместить в указанные множества разнозаряженные шарики. Сначала они будут двигаться по прямой, их соединяющей, до столкновения с границами множеств в точках $x_0 \in X$ и $y_0 \in Y$ (см. рис. 5).

Рис. 5. Нахождение начальных точек x_0 и y_0 .

Кулоновские силы, действующие на первую и вторую точку, будут равны соответственно

$$F_1(t) = \frac{c_1 q^2}{\|x - y\|^3} (y - x) \text{ и } F_2(t) = \frac{c_1 q^2}{\|x - y\|^3} (x - y).$$

Для сил нормальной реакции имеем

$$N_1(t) = -\frac{\|F_1(t)\| \cdot \nabla f_1(x)}{\|x - y\| \cdot \|\nabla f_1(x)\|^2} \langle y - x, \nabla f_1(x) \rangle,$$

$$N_2(t) = -\frac{\|F_2(t)\| \cdot \nabla f_2(y)}{\|x - y\| \cdot \|\nabla f_2(y)\|^2} \langle x - y, \nabla f_2(y) \rangle.$$

Силы сопротивления определим формулами

$$R_1(t) = -c_2 \dot{x}, \quad R_2(t) = -c_2 \dot{y}.$$

Здесь по-прежнему c_1 — электрическая постоянная, c_2 — коэффициент сопротивления, q — заряд шариков. Окончательно, принимая массу шариков равной m , получаем дифференциальные уравнения движения:

$$\begin{cases} m\ddot{x}(t) = F_1(t) + N_1(t) + R_1(t) \\ m\ddot{y}(t) = F_2(t) + N_2(t) + R_2(t) \end{cases}$$

Понижая порядок системы за счет введения фиктивных переменных z_1, z_2 , переходим к системе

$$\begin{cases} \dot{x} = z_1 \\ \dot{y} = z_2 \\ \dot{z}_1 = \psi_1(x, y, z_1, z_2) \\ \dot{z}_2 = \psi_2(x, y, z_1, z_2) \end{cases} \quad (9)$$

где

$$\psi_1(x, y, z_1, z_2) = \frac{p_1}{\|x - y\|^3} \left[y - x + \frac{\langle x - y, \nabla f_1(x) \rangle}{\|\nabla f_1(x)\|^2} \nabla f_1(x) \right] - p_2 z_1,$$

$$\psi_2(x, y, z_1, z_2) = \frac{p_1}{\|x - y\|^3} \left[x - y + \frac{\langle y - x, \nabla f_2(y) \rangle}{\|\nabla f_2(y)\|^2} \nabla f_2(y) \right] - p_2 z_2.$$

Полученную систему (9) будем опять же решать методом ломанных Эйлера, введя дополнительные корректирующие процедуры, аналогично тому, как это делалось выше.

Выбираем $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, $z_1(0) = 0_n$, $z_2(0) = 0_n$ и некоторое малое положительное δ — длину шага. Пусть у нас есть x_{k-1} , y_{k-1} , $z_{1,k-1}$, $z_{2,k-1}$, тогда

$$\begin{cases} \tilde{x}_{k-1} = x_{k-1} + \delta z_{1,k-1} \\ \tilde{y}_{k-1} = y_{k-1} + \delta z_{2,k-1} \\ x_k = \tilde{x}_{k-1} - \frac{\nabla f_1(\tilde{x}_{k-1})}{\|\nabla f_1(\tilde{x}_{k-1})\|^2} f_1(\tilde{x}_{k-1}) \\ y_k = \tilde{y}_{k-1} - \frac{\nabla f_2(\tilde{y}_{k-1})}{\|\nabla f_2(\tilde{y}_{k-1})\|^2} f_2(\tilde{y}_{k-1}) \\ z_{1,k} = z_{1,k-1} + \delta \psi_1(x_{k-1}, y_{k-1}, z_{1,k-1}, z_{2,k-1}) \\ z_{2,k} = z_{2,k-1} + \delta \psi_2(x_{k-1}, y_{k-1}, z_{1,k-1}, z_{2,k-1}) \end{cases}$$

В положении равновесия силы нормальных реакций уравниваются соответствующими силами Кулона, что означает коллинеарность векторов $x_k - y_k$, $\nabla f_1(x_k)$ и $\nabla f_2(y_k)$. Поэтому в качестве критерия остановки можно взять условие

$$\sqrt{\sum_{i=2}^n \left(\frac{x_k^i - y_k^i}{f'_{1,x^i}(x_k)} - \frac{x_k^1 - y_k^1}{f'_{1,x^1}(x_k)} \right)^2} + \sqrt{\sum_{i=2}^n \left(\frac{x_k^i - y_k^i}{f'_{2,y^i}(y_k)} - \frac{x_k^1 - y_k^1}{f'_{2,y^1}(y_k)} \right)^2} < \varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$ — произвольное малое число.

4°. Благодарности. Автор выражает признательность д.ф.-м.н., профессору В.Н. Малозёмову за поддержку настоящей работы, ряд важных замечаний и полезные обсуждения.

Работа выполнена при поддержке Санкт-Петербургского Государственного Университета в рамках гранта № 9.38.205.2014.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. E. Abbasov. *Charged balls method for finding minimum distance between two smooth closed convex sets* // [to appear in] *Optimization*, 2015.
2. V. F. Demyanov, A. M. Rubinov. *Constructive Nonsmooth Analysis. Approximation & Optimization*, 1995. 7. Peter Lang, Frankfurt am Main, iv+416 pp.
3. V. F. Demyanov, V. N. Malozemov. *Introduction to minimax*. New York: Dover, 1990. 307 p.
4. M. E. Abbasov, V. F. Demyanov. *Proper and adjoint exhausters in nonsmooth analysis: optimality conditions* // *J. Glob. Optim.*, 2013. Vol. 56, Issue 2, P. 569–585.

5. А. И. Косолап. *Квадратичные оптимизационные задачи компьютерной геометрии* // Искусственный интеллект, 2010. №1. С. 70–75.
6. A. Lin, S. P. Han. *On the distance between two ellipsoids* // SIAM Journal on Optimization, 2002. Vol. 13. P. 298–308.
7. S.-M. Hu, J. Wallner. *A second order algorithm for orthogonal projection onto curves and surfaces* // Computer Aided Geometric Design, 2005. Vol. 22. P. 251–260.
8. Д. М. Лебедев, Л. Н. Полякова. *Задача проектирования нулевой точки на квадрату* // Вестник СПбГУ. Сер. 10, 2013. Вып. 1. С. 11–17.
9. А. Ю. Утешев. *Вычисление расстояний между геометрическими объектами* // (<http://pmu.ru/vf4/algebra2/optimiz/distance>)
10. А. Ю. Утешев, М. В. Яшина. *Нахождение расстояния от эллипсоида до плоскости и квадрати в \mathbb{R}^n* // Доклады АН, 2008. Т. 419, № 4. С. 471–474.
11. Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. *Численные методы*. М.: Наука, 1987, 600 с.