ДВОЙСТВЕННОСТЬ В ЗАДАЧАХ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ ТИПА ДОПОЛНИТЕЛЬНОСТИ*

М. В. Долгополик

maxim.dolgopolik@gmail.com

30 апреля 2015 г.

Аннотация. В докладе обсуждается двойственность Вулфа в задачах математического программирования с ограничениями типа дополнительности. Приводятся необходимые условия экстремума для данного класса задач и доказываются теоремы о слабой и сильной двойственности.

1°. Двойственность в нелинейном программировании. Приведём некоторые базовые понятия и результаты теории двойственности задач нелинейного программирования, которые упростят понимание основных результатов данного доклада. Рассмотрим следующую задачу нелинейного программирования, которую мы будем называть *прямой задачей*:

$$\begin{gathered} f(x) \to \min \\ g_i(x) \leqslant 0, \quad i \in 1:m; \\ h_j(x) = 0, \quad j \in 1:l; \\ x \in X. \end{gathered}$$

Здесь f, g_i, $h_j\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ заданные функции, а $X \subset \mathbb{R}^n$ непустое замкнутое множество. Для любых $\lambda_i \geqslant 0$, $i \in 1:m$, и $\mu_j \in \mathbb{R}$, $j \in 1:l$ введём *функцию Лагранжа* прямой задачи

$$L(x, \lambda, \mu) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^{l} \mu_j h_j(x).$$

Напомним [1, 2], что стандартные условия оптимальности в прямой задаче (условия Куна-Таккера) часто записываются в терминах функции Лагранжа.

*Семинар по конструктивному негладкому анализу и недифференцируемой оптимизации «CNSA & NDO»: `http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/`

Свяжем с прямой задачей *двойственную задачу* вида

$$\Theta(\lambda, \mu) \to \sup_{\lambda, \mu}$$
$$\lambda_i \geqslant 0, \quad i \in 1 : m,$$

где функция Θ выражается через функцию Лагранжа прямой задачи следующим образом:

$$\Theta(\lambda, \mu) = \inf_{x \in X} L(x, \lambda, \mu).$$

Заметим, что функция Θ является вогнутой функцией. Более того, если эффективное множество функции Θ не пусто, то она является собственной вогнутой функцией. Таким образом, двойственная задача всегда является задачей вогнутого программирования, вне зависимости от характеристик прямой задачи. По поводу простой геометрической интерпретации двойственной задачи и её связи с функцией чувствительности прямой задачи см. [1].

Приведём простой пример построения двойственной задачи.

ПРИМЕР 1. Пусть прямая задача является задачей линейного программирования вида

$$c^T x \to \min$$
$$Ax = b,$$
$$x \geqslant 0.$$

Полагая $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geqslant 0\}$, имеем

$$\Theta(\mu) = \inf_{x \geqslant 0} L(x, \mu) = \inf_{x \geqslant 0} \big(c^T x + \mu^T (b - Ax)\big) = \inf_{x \geqslant 0} \big((c^T - \mu^T A)x + \mu^T b\big).$$

Поэтому

$$\Theta(\mu) = \begin{cases} \mu^T b, & \text{если } c^T - \mu^T A \geqslant 0; \\ -\infty, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Следовательно двойственная задача имеет вид

$$b^T \mu \to \max$$
$$A^T \mu \leqslant c.$$

и также является задачей линейного программирования.

Непосредственно проверяется, что прямая и двойственная задачи связаны следующим образом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 (Слабая двойственность). *Пусть x — план прямой задачи, (λ, μ) — план двойственной задачи. Тогда*

$$f(x) \geqslant \Theta(\lambda, \mu).$$

Кроме того, если последнее неравенство выполняется как равенство, то x — это оптимальный план прямой задачи, а (λ, μ) — это оптимальный план двойственной задачи.

Таким образом, значение двойственной задачи всегда не превосходит значения прямой задачи. В случае когда оптимальные значения этих задач совпадают, то есть когда

$$\inf_{x \in \Omega} f(x) = \sup\{\Theta(\lambda, \mu) \mid \mu \in \mathbb{R}^l, \lambda \geqslant 0\},$$

где Ω — множество планов прямой задачи, говорят, что между прямой и двойственной задачами *нулевой зазор двойственности.* В противном случае, говорят, что существует (ненулевой) *зазор двойственности.*

Если прямая задача является задачей выпуклого программирования, то справедлив следующий результат.

ТЕОРЕМА 1 (Сильная двойственность, [1, 3]). *Пусть функции f и g_i, $i \in 1\colon m$, выпуклы, функции h_j, $j \in 1\colon l$, аффинны, а множество X выпукло. Предположим также, что оптимальное значение прямой задачи конечно. Для того чтобы между прямой и двойственной задачами был нулевой зазор двойственности необходимо и достаточно, чтобы функция чувствительности прямой задачи*

$$S(y, z) = \inf\{f(x) \mid x \in X,\ g(x) \leqslant y,\ h(x) = z\}$$

была полунепрерывна снизу в нуле. В частности, если в прямой задаче выполнено условие Слейтера, то между прямой и двойственной задачами нулевой зазор двойственности.

Если прямая задача не является задачей выпуклого программирования, то, вообще говоря, между прямой и двойственной задачами существует зазор двойственности, который равен нулю только для отдельных специальных задач.

Замечание 1. Отметим, что двойственность в задачах нелинейного программирования можно развивать на основе нелинейных функций Лагранжа [4]. Использование нелинейных функций Лагранжа часто позволяет добиться нулевого зазора двойственности между прямой и двойственной задачами. Так, существует целый класс нелинейных функций Лагранжа для которых (при минимальных предположениях) нулевой зазор двойственности эквивалентен полунепрерывности снизу функции чувствительности прямой задачи [4, 5]. Заметим, что доказательство этого результата опирается на идеи абстрактного выпуклого анализа [6].

2°. Двойственность Вулфа. Помимо теории двойственности, обсуждавшейся в предыдущем разделе (данный тип двойственности иногда называют двойственностью Лагранжа), существуют и другие подходы к построению двойственной задачи к исходной задаче нелинейного программирования. Одним из таких подходов является двойственность Вулфа [7, 8]. Опишем этот подход к теории двойственности.

Предположим, что функции f, g_i, $i \in 1: m$, и h_j, $j \in 1: l$, дифференцируемы на $\mathbb{R}^n$. Согласно подходу предложенному в [7], прямой задаче ставится в соответствие следующая двойственная задача Вулфа:

$$\begin{gathered} L(x, \lambda, \mu) \to \max_{x,\lambda,\mu} \\ f'(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i'(x) + \sum_{j=1}^{l} \mu_j h_j'(x) = 0, \\ \lambda_i \geqslant 0, \quad i \in 1: m, \\ x \in X. \end{gathered}$$

Таким образом, двойственная задача Вулфа представляет собой задачу максимизации функции Лагранжа по всем переменным в которой в качестве ограничений выступают условия Куна-Таккера прямой задачи [2] (за исключением условия дополнительности). Отметим также, что в отличие от двойственной задачи Лагранжа, двойственная задача Вулфа в общем случае не обладает никакими свойствами выпуклости (вогнутости).

В качестве примера выпишем двойственную задачу Вулфа для задачи линейного программирования.

ПРИМЕР 2. Пусть прямая задача является задачей линейного программирования вида

$$\begin{gathered} c^T x \to \min \\ Ax = b, \\ x \geqslant 0. \end{gathered}$$

Положим $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geqslant 0\}$. Тогда двойственная задача Вулфа будет иметь вид

$$L(x,\mu) = c^T x + \mu^T(b - Ax) \to \max_{x,\mu}$$
$$L'_x(x,\mu) = c - A^T\mu = 0,$$
$$x \geqslant 0.$$

Данная задача, как нетрудно заметить, эквивалентна следующей задачей линейного программирования

$$b^T\mu \to \max$$
$$A^T\mu = c.$$

Таким образом, в данном случае двойственная задача Вулфа не совпадает с двойственной задачей Лагранжа.

В случае двойственности Вулфа, даже теорема о слабой двойственности справедлива только в предположении, что прямая задача является задачей выпуклого программирования.

ТЕОРЕМА 2 (Слабая двойственность)**.** *Пусть функции f и g_i, $i \in 1\colon m$, выпуклы, функции h_j, $j \in 1\colon l$, аффинны, а множество X выпукло. Пусть также x — план прямой задачи, а (y,λ,μ) — план двойственной задачи. Тогда*

$$f(x) \geqslant L(y,\lambda,\mu).$$

Доказательство. Так как функция f выпукла, то

$$f(x) \geqslant f(y) + \langle f'(y), x - y\rangle,$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$. Учитывая что (y,λ,μ) — это план двойственной задачи, получим

$$f(x) \geqslant f(y) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \langle g'_i(y), x - y\rangle - \sum_{j=1}^{l} \mu_j \langle h'_j(y), x - y\rangle.$$

Теперь воспользовавшись выпуклостью функций g_i и аффинностью функций h_j, имеем

$$f(x) \geqslant f(y) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (g_i(y) - g_i(x)) + \sum_{j=1}^{l} \mu_j (h_j(y) - h_j(x)).$$

Отсюда, в силу того что x — это план прямой задачи и $\lambda_i \geqslant 0$, вытекает

$$f(x) \geqslant f(y) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(y) + \sum_{j=1}^{l} \mu_j h_j(y) = L(y,\lambda,\mu),$$

что и требовалось. $\square$

ТЕОРЕМА 3 (Сильная двойственность)**.** *Пусть функции f и g_i, $i \in 1\colon m$, выпуклы, функции h_j, $j \in 1\colon l$, аффинны, а множество X выпукло. Предположим также что в прямой задаче выполнено условие Слейтера и $x^* \in \mathbb{R}^n$ является оптимальным планом этой задачи. Тогда существуют $\lambda_i^* \geqslant 0$, $i \in 1\colon m$, и $\mu_j^* \in \mathbb{R}$, $j \in 1\colon l$, такие, что вектор (x^*, λ^*, μ^*) является оптимальным планом двойственной задачи Вулфа и*

$$f(x^*) = L(x^*, \lambda^*, \mu^*).$$

Доказательство. Поскольку x^* — это оптимальный план прямой задачи, то по теореме Куна-Таккера существуют $\lambda_i^* \geqslant 0$, $i \in 1\colon m$, и $\mu_j^* \in \mathbb{R}$, $j \in 1\colon l$, такие, что

$$f'(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i'(x^*) + \sum_{j=1}^{l} \mu_j^* h_j'(x^*) = 0,$$
$$\lambda_i^* g_i(x^*) = 0 \quad \forall i \in 1\colon m.$$

Таким образом, вектор (x^*, λ^*, μ^*) является планом двойственной задачи Вулфа и

$$L(x^*, \lambda^*, \mu^*) = f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i(x^*) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j^* h_j(x^*) = f(x^*).$$

Воспользовавшись предыдущей теоремой, получим, что для любого плана (x, λ, μ) двойственной задачи будет

$$f(x^*) \geqslant L(x, \lambda, \mu),$$

откуда следует, что (x^*, λ^*, μ^*) — это решение двойственной задачи. □

3°. Задачи нелинейного программирование с ограничениями типа дополнительности. Перейдём к основной теме данного доклада — задачам математического программирования с ограничениями типа дополнительности, т.е. задачам вида

$$f(x) \to \min \tag{1}$$
$$g_i(x) \leqslant 0, \quad i \in 1\colon m, \tag{2}$$
$$h_j(x) = 0, \quad j \in 1\colon l, \tag{3}$$
$$G_k(x) \geqslant 0, \quad H_k(x) \geqslant 0, \quad G_k(x)H_k(x) = 0, \quad k \in 1\colon r. \tag{4}$$

Здесь и далее функции f, g_i, h_j, G_k, H_k определены и непрерывно дифференцируемы на $\mathbb{R}^n$. Данный класс задач является частным случаем задач математического программирования с ограничениями типа равновесия [9] (англ.

mathematical programs with equilibrium constraints или сокращённо MPEC). Однако, в литературе задачи вида (1)–(4) принято не выделять в отдельных подкласс и называть задачами математического программирования с ограничениями типа равновесия. Примеры задач типа (1)–(4), естественным образом возникающих при моделировании различных физических и технологических процессов, имеются в [10–12].

Задачи математического программирования с ограничениями типа дополнительности очевидным образом являются частным случаем задач математического программирования, в которых ограничения типа равенств и неравенств имеют специальный вид. Поэтому кажется естественным непосредственно применить общую теорию задач математического программирования к исследованию более узкого класса задач. Однако, попытка такого применения обречена на провал, поскольку в задачах вида (1)–(4) никогда не выполняются даже условия Куна-Таккера. Причина этого явления кроется в том факте, что в задаче (1)–(4) никогда не выполнены стандартные условия регулярности.

ПРИМЕР 3. Пусть, для простоты, в задаче (1)–(4) отсутствуют ограничения вида

$$g_i(x) \leqslant 0, \quad h_j(x) = 0$$

и $r = 1$, то есть задача (1)–(4) имеет вид

$$\begin{gathered} f(x) \to \min \\ G(x) \geqslant 0, \quad H(x) \geqslant 0, \\ G(x)H(x) = 0. \end{gathered}$$

Покажем, что в этой задаче не выполнено стандартное условие регулярности [2], то есть что градиенты активных ограничений всегда линейно зависимы. Действительно, если $G(x) = H(x) = 0$, то

$$(G(x)H(x))' = G(x)H'(x) + H(x)G'(x) = 0$$

и условие регулярности не выполнено. Если же $G(x) > 0$, а $H(x) = 0$ (симметричный случай рассматривается аналогично), то

$$(G(x)H(x))' = G(x)H'(x) + H(x)G'(x) = G(x)H'(x)$$

и градиент ограничения $G(x)H(x) = 0$ линейно зависим с градиентом активного ограничения $H(x) \geqslant 0$.

Как следствие невыполнения стандартных условий регулярности, возникает необходимость в новых условиях регулярности и условиях экстремума (отличных от условий Куна-Таккера), которые бы учитывали специфику ограничений в задаче (1)–(4). Здесь мы приведём самые простые условия регулярности и оптимальности для задач математического программирования с ограничениями типа дополнительности, которые были получены в [13]. Данные условия понадобятся нам при построения двойственной задачи Вулфа для задачи (1)–(4) (напомним, что двойственная задача Вулфа содержит условия оптимальности прямой задачи в качестве ограничений).

Введём индексные множества

$$\begin{aligned} I(x) &= \{i \in 1\colon m \mid g_i(x) = 0\}, \\ \alpha(x) &= \{k \in 1\colon r \mid G_k(x) = 0,\ H_k(x) > 0\}, \\ \beta(x) &= \{k \in 1\colon r \mid G_k(x) = 0,\ H_k(x) = 0\}, \\ \gamma(x) &= \{k \in 1\colon r \mid G_k(x) > 0,\ H_k(x) = 0\}. \end{aligned}$$

Для того чтобы определить условия регулярности в задаче (1)–(4) зафиксируем план x^* этой задачи, и рассмотрим *усиленную задачу нелинейного программирования* (англ. tightened nonlinear program) ассоциированную с задачей (1)–(4) в точке x^*:

$$\begin{aligned} f(x) &\to \min \\ g_i(x) &\leqslant 0, \quad i \in 1\colon m, \\ h_j(x) &= 0, \quad j \in 1\colon l, \\ G_k(x) &= 0 \quad \forall k \in \alpha(x^*) \cup \beta(x^*), \\ G_k(x) &\geqslant 0 \quad \forall k \in \gamma(x^*), \\ H_k(x) &\geqslant 0 \quad \forall k \in \alpha(x^*), \\ H_k(x) &= 0 \quad \forall k \in \beta(x^*) \cup \gamma(x^*). \end{aligned}$$

Данная задача очевидно зависит от выбранного плана x^* исходной задачи (1)–(4). Заметим также что множество планов усиленной задачи содержится в множестве планов задачи (1)–(4). Таким образом, если x^* — это точка локального минимума в задаче (1)–(4), то x^* это также и точка локального минимума в усиленной задаче.

Дадим определение регулярности ограничений в задаче (1)–(4) схожее со стандартным определением регулярности ограничений [2].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем говорить, что ограничения в задаче (1)–(4) *регулярны* в точке x^*, если ограничения в усиленной задаче регулярны в этой точке или, что эквивалентно, если градиенты

$$\begin{aligned} g_i'(x^*), &\quad i \in I(x), \\ h_j'(x^*), &\quad j \in 1\colon l, \\ G_k'(x^*), &\quad k \in \alpha(x^*) \cup \beta(x^*), \\ H_k'(x^*), &\quad k \in \beta(x^*) \cup \gamma(x^*) \end{aligned}$$

линейно независимы.

Очевидно, что при выполнении условия регулярности, условия Куна-Таккера в усиленной задаче будут необходимыми условиями экстремума и в исходной задаче (1)–(4). Однако, в задаче (1)–(4) можно получить и более сильные условия экстремума.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Будем говорить, что точка x^* *сильно стационарна*, если найдутся числа λ_i^g, λ_j^h, λ_k^G и λ_k^H такие, что

$$0 = f'(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^g g_i'(x^*) + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j^h h_j'(x^*) - \sum_{k=1}^{r} \left[\lambda_k^G G_k'(x^*) + \lambda_k^H H_k'(x^*)\right],$$
$$\lambda_i^g \geqslant 0, \quad \lambda_i^g g_i(x^*) = 0 \quad \forall\, i \in 1\colon m,$$
$$\lambda_k^G \geqslant 0 \quad \forall\, k \in \beta(x^*), \quad \lambda_k^G = 0 \quad \forall\, k \in \gamma(x^*),$$
$$\lambda_k^H \geqslant 0 \quad \forall\, k \in \beta(x^*), \quad \lambda_k^H = 0 \quad \forall\, k \in \alpha(x^*).$$

Заметим, что из условий Куна-Таккера для усиленной задачи следует выполнение всех условий сильной стационарности за исключением условий

$$\lambda_k^G \geqslant 0, \quad \lambda_k^H \geqslant 0 \quad \forall k \in \beta(x^*).$$

Таким образом сильная стационарность не следует напрямую из условий Куна-Таккера.

ТЕОРЕМА 4 ([13]). *Пусть $x^* \in \mathbb{R}^n$ является точкой локального минимума в задаче* (1)–(4), *и в точке x^* ограничения этой задачи регулярны. Тогда x^* является сильно стационарной точкой.*

Доказательство. Выберем произвольное разбиение (β_1, β_2) множества $\beta(x^*)$, т.е. выберем непересекающиеся множества β_1 и β_2 (одно из них может быть пустым) такие, что $\beta(x^*) = \beta_1 \cup \beta_2$. Рассмотрим задачу математического программирования $P(\beta_1, \beta_2)$ вида

$$\begin{aligned} f(x) &\to \min \\ g_i(x) &\leqslant 0, \quad i \in 1\colon m, \\ h_j(x) &= 0, \quad j \in 1\colon l, \\ G_k(x) &= 0, \quad k \in \alpha(x^*) \cup \beta_1, \\ G_k(x) &\geqslant 0, \quad k \in \beta_2 \cup \gamma(x^*), \\ H_k(x) &\geqslant 0, \quad k \in \alpha(x^*) \cup \beta_1, \\ H_k(x) &= 0, \quad k \in \beta_2 \cup \gamma(x^*). \end{aligned}$$

Ясно, что множество планов задачи $P(\beta_1, \beta_2)$ содержится в множестве планов задачи (1)–(4). Поэтому x^* является точкой локального минимума в задаче $P(\beta_1, \beta_2)$, причём, как нетрудно проверить, ограничения в этой задаче регулярны в точке x^*. Следовательно, по теореме Куна-Таккера [2] найдутся множители μ_i^g, μ_j^h, μ_k^G и μ_k^H такие, что

$$0 = f'(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i^g g_i'(x^*) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j^h h_j'(x^*) - \sum_{k=1}^{r} \left[\mu_k^G G_k'(x^*) + \mu_k^H H_k'(x^*)\right], \tag{5}$$

$$\mu_i^g \geqslant 0, \quad \mu_i^g g_i(x^*) = 0 \quad \forall\, i \in 1\colon m, \tag{6}$$

$$\mu_k^G \geqslant 0 \quad \forall\, k \in \beta_2, \quad \mu_k^G = 0 \quad \forall\, k \in \gamma(x^*), \tag{7}$$

$$\mu_k^H \geqslant 0 \quad \forall\, k \in \beta_1, \quad \mu_k^H = 0 \quad \forall\, k \in \alpha(x^*). \tag{8}$$

Аналогичным образом применяя теорему Куна-Таккера к задаче $P(\beta_2, \beta_1)$ (индексные множества β_1 и β_2 переставлены местами), получим, что найдутся числа ν_i^g, ν_j^h, ν_k^G и ν_k^H такие, что

$$0 = f'(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \nu_i^g g_i'(x^*) + \sum_{j=1}^{p} \nu_j^h h_j'(x^*) - \sum_{k=1}^{r} \left[\nu_k^G G_k'(x^*) + \nu_k^H H_k'(x^*)\right], \tag{9}$$

$$\nu_i^g \geqslant 0, \quad \nu_i^g g_i(x^*) = 0 \quad \forall\, i \in 1\colon m, \tag{10}$$

$$\nu_k^G \geqslant 0 \quad \forall\, k \in \beta_1, \quad \nu_k^G = 0 \quad \forall\, k \in \gamma(x^*), \tag{11}$$

$$\nu_k^H \geqslant 0 \quad \forall\, k \in \beta_2, \quad \nu_k^H = 0 \quad \forall\, k \in \alpha(x^*). \tag{12}$$

Приравнивая (5) и (9), получим

$$0 = \sum_{i \in I(x^*)} (\mu_i^g - \nu_i^g) g_i'(x^*) + \sum_{j=1}^{p} (\mu_j^h - \nu_j^h) h_j'(x^*) -$$
$$- \sum_{k \in \alpha(x^*) \cup \beta(x^*)} (\mu_k^G - \nu_k^G) G_k'(x^*) - \sum_{k \in \beta(x^*) \cup \gamma(x^*)} (\mu_k^H - \nu_k^H) H_k'(x^*),$$

откуда, в силу регулярности ограничений в точке x^*, вытекает что множители μ_i и ν_i совпадают. В частности, имеем

$$\mu_k^G = \nu_k^G \geqslant 0, \quad \mu_k^H = \nu_k^H \geqslant 0 \quad \forall k \in \beta(x^*).$$

Следовательно, условия (5)–(8) (как и условия (9)–(12)) являются условиями сильной стационарности точки x^*, что и требовалось. □

4°. Двойственность Вулфа в задачах нелинейного программирование с ограничениями типа дополнительности. Выпишем ещё раз задачу математического программирования с ограничениями типа дополнительности (1)–(4):

$$
\begin{gathered}
f(x) \to \min \\
g_i(x) \leqslant 0, \quad i \in 1\colon m \\
h_j(x) = 0, \quad j \in 1\colon l, \\
G_k(x) \geqslant 0, \quad H_k(x) \geqslant 0, \quad G_k(x)H_k(x) = 0, \quad k \in 1\colon r.
\end{gathered}
$$

Введём, в соответствии с условием сильной стационарности, функцию Лагранжа вида

$$
L(x, \lambda^g, \lambda^h, \lambda^G, \lambda^H) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^g g_i(x) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^h h_j(x) - \\
- \sum_{k=1}^{m} \big[\lambda_k^G G_k(x) + \lambda_k^H H_k(x)\big].
$$

По любому плану x задачи (1)–(4) определим двойственную задачу Вулфа $PW(x)$:

$$
\begin{gathered}
L(x, \lambda^g, \lambda^h, \lambda^G, \lambda^H) \to \max, \\
0 = f'(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^g g_i'(x) + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j^h h_j'(x) - \sum_{k=1}^{r} \big[\lambda_k^G G_k'(x) + \lambda_k^H H_k'(x)\big], \\
\lambda_i^g \geqslant 0, \quad \lambda_i^g g_i(x) = 0 \quad \forall\, i \in 1\colon m, \\
\lambda_k^G \geqslant 0 \quad \forall\, k \in \beta(x), \quad \lambda_k^G = 0 \quad \forall\, k \in \gamma(x), \\
\lambda_k^H \geqslant 0 \quad \forall\, k \in \beta(x), \quad \lambda_k^H = 0 \quad \forall\, k \in \alpha(x).
\end{gathered}
$$

Покажем, что в данном случае справедливы теоремы о слабой и сильной двойственности аналогичные теоремам 2 и 3.

ТЕОРЕМА 5 (Слабая двойственность)**.** *Пусть функции f и g_i, $i \in 1\colon m$, выпуклы, а функции h_j, $j \in 1\colon l$, G_k и H_k, $k \in 1\colon r$, аффинны. Тогда для любого плана x задачи (1)–(4) и для любого плана $(y, \lambda^g, \lambda^h, \lambda^G, \lambda^H)$ двойственной задачи $PW(x)$ будет*

$$
f(x) \geqslant L(y, \lambda^g, \lambda^h, \lambda^G, \lambda^H).
$$

Доказательство. Так как функция f выпукла, то

$$
f(x) \geqslant f(y) + \langle f'(y), x - y\rangle.
$$

Воспользовавшись определением двойственной задачи и условиями выпуклости и аффинности, получим, что

$$
\begin{aligned}
f(x) \geqslant f(y) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^g \langle g_i'(y), x-y\rangle - \sum_{j=1}^{l} \lambda_j^h \langle h_j'(y), x-y\rangle + \\
+ \sum_{k=1}^{m} \lambda_k^G \langle G_k'(y), x-y\rangle + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k^H \langle H_k'(y), x-y\rangle = \\
= f(y) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^g \langle g_i'(y), x-y\rangle + \sum_{j=1}^{l} \lambda_j^h (h_j(y) - h_j(x)) - \\
- \sum_{k=1}^{m} \lambda_k^G (G_k(y) - G_k(x)) - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k^H (H_k(y) - H_k(x)) \geqslant \\
\geqslant f(y) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^g (g_i(y) - g_i(x)) + \sum_{j=1}^{l} \lambda_j^h (h_j(y) - h_j(x)) - \\
- \sum_{k=1}^{m} \lambda_k^G (G_k(y) - G_k(x)) - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k^H (H_k(y) - H_k(x)).
\end{aligned}
$$

Так как x — план задачи (1)–(4), то

$$
g_i(x) \leqslant 0 \quad \forall\, i \in 1\colon m, \quad h_j(x) = 0 \quad \forall\, j \in 1\colon l.
$$

С другой стороны, поскольку $(y, \lambda^g, \lambda^h, \lambda^G, \lambda^H)$ — это план двойственной задачи $PW(x)$, то

$$
\lambda_i^g \geqslant 0 \quad \forall\, i \in 1\colon m, \quad \lambda_k^G G_k(x) = \lambda_k^H H_k(x) = 0 \quad \forall\, k \in 1\colon r.
$$

Следовательно

$$
\begin{aligned}
f(x) \geqslant f(y) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^g g_i(y) + \sum_{j=1}^{l} \lambda_j^h h_j(y) - \sum_{k=1}^{m} \left(\lambda_k^G G_k(y) + \lambda_k^H H_k(y)\right) = \\
= L(y, \lambda^g, \lambda^h, \lambda^G, \lambda^H),
\end{aligned}
$$

что и требовалось. □

ТЕОРЕМА 6 (Сильная двойственность). *Пусть функции f и g_i, $i \in 1\colon m$, выпуклы, а функции h_j, $j \in 1\colon l$, G_k и H_k, $k \in 1\colon r$, аффинны. Предположим также, что точка $\widehat{x}$ является оптимальным планом задачи* (1)–(4), *и в точке $\widehat{x}$ ограничения регулярны. Тогда существуют $\widehat{\lambda}^g$, $\widehat{\lambda}^h$, $\widehat{\lambda}^G$ и $\widehat{\lambda}^H$ такие, что вектор $(\widehat{x}, \widehat{\lambda}^g, \widehat{\lambda}^h, \widehat{\lambda}^G, \widehat{\lambda}^H)$ является оптимальным планом двойственной задачи $PW(\widehat{x})$ и*

$$f(\widehat{x}) = L(\widehat{x}, \widehat{\lambda}^g, \widehat{\lambda}^h, \widehat{\lambda}^G, \widehat{\lambda}^H).$$

Доказательство данной теоремы почти дословно повторяет доказательство теоремы 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bazaraa M.S., Sharali H.D., Shetty C.M. *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms.* New Jersey, John Wiley & Sons, Inc., 2006.

2. Малозёмов В.Н. *Теорема Куна–Таккера в дифференциальной форме* [Электронный ресурс] // Семинар «DHA & CAGD» [Офиц. сайт]. Избранные доклады. 27.02.2010. URL: `http://dha.spb.ru/reps10.shtml#1016` (дата обращения: 26.04.2015).

3. Экланд И., Темам Р. *Выпуклый анализ и вариационные проблемы.* М.: Мир, 1979. 399 с.

4. Rubinov A., Yang X. *Lagrange-Type Functions in Constrained Non-Convex Optimization.* Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 2003.

5. Rubinov A.M., Huang X.X., Yang X.Q. *The Zero Duality Gap Property and Lower Semicontinuity of the Perturbation Function* // Mathematics of Operations Research, 2002, vol. 27, no. 4, pp. 775–791.

6. Rubinov A. *Abstract Convexity and Global Optimization.* Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 2000.

7. Wolfe P. *A Duality Theorem for Nonlinear Programming* // Quarterly of Applied Mathematics, 1961, vol. 19, pp. 239–244.

8. Mangasarian O.L. *Nonlinear Programming.* Philadelphia, PA, SIAM Publications, 1994.

9. Luo Z.-Q., Pang J.-S., Ralph D. *Mathematical Programs with Equilibrium Constraints.* Cambridge, Cambridge University Press, 1996.

10. Raghunathan A.U., Biegler L.T. *Mathematical Programs with Equilibrium Constrains (MPECs) in Process Engineering* // Computers & Chemical Engineering, 2003, vol. 27, pp. 1381–1392.

11. Britz W., Ferris M. Kuhn A. *Modelling Water Allocating Institutions Based on Multiple Optimization Problems with Equilibrium Constraints* // Environmental Modelling & Software, 2013, vol. 46, pp. 196–207.

12. Figueiredo I.N., Júdice J.J., Rosa S.S. *A Class of Mathematical Programs with Equilibrium Constraints: a Smooth Algorithm and Applications to Contact Problems* // Optimization and Engineering, 2005, vol. 6, pp. 203–239.

13. Flegel M.L., Kanzow C. *A Fritz John Approach to First Order Optimality Conditions for Mathematical Programs with Equilibrium Constraints* // Optimization, 2003, vol. 52, pp. 277–286.