МАТРИЧНАЯ КОРРЕКЦИЯ ПАРЫ ДВОЙСТВЕННЫХ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ*

В. И. Ерохин А. С. Красников
erohin_v_i@mail.ru askrasnikov@gmail.com

2 апреля 2015 г.

Аннотация. В докладе изложены полученные авторами результаты, дополняющие классическую теорию двойственности для задач линейного программирования. Указанные результаты являются инструментарием построения оптимальной по минимуму евклидовой нормы матричной (многопараметрической) коррекции задач линейного программирования, направленной на получение задач линейного программирования с заданными свойствами (например, с заданными решениями) путем минимального по норме изменения коэффициентов исходной задачи.

Приведены постановки задач, теоремы, характеризующие условия существования и вид решений, а также иллюстративные численные примеры. Решения ряда задач приводятся впервые.

1°. Введение. Рассмотрим пару взаимодвойственных задач линейного программирования (ЛП)

$$L\,(A,b,c) : Ax = b,\ x \geqslant 0,\ c^\top x \longrightarrow \max,$$
$$L^*\,(A,b,c) : u^\top A \geqslant c^\top,\ u^\top b \longrightarrow \min,$$

где $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, b, $u \in \mathbb{R}^m$, c, $x \in \mathbb{R}^n$. Введем обозначения для допустимых множеств, оптимальных значений, а также множеств оптимальных решений указанных задач:

$$X\,(A,b) := \{x\,|Ax = b,\ x \geqslant 0\},$$
$$U\,(A,c) := \left\{u\,\middle|u^\top A \geqslant c^\top\right\},$$
$$\ell := \sup_{x\in X(A,b)} c^\top x,$$

*Семинар по конструктивному негладкому анализу и недифференцируемой оптимизации «CNSA & NDO»: `http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/`

$$\ell^* := \inf_{u \in U(A,c)} u^\top b,$$

$$X_{opt}(A,b,c) := \left\{ x \in X(A,b) \;\middle|\; c^\top x = \ell \right\},$$

$$U_{opt}(A,b,c) := \left\{ u \in U(A,c) \;\middle|\; u^\top b = \ell^* \right\}.$$

Наиболее важные факты классической теории двойственности для задач ЛП (см. например, [1–3]) могут быть сформулированы в виде следующей теоремы

ТЕОРЕМА 1. *Разрешимость или неразрешимость задач $L(A,b,c)$, $L^*(A,b,c)$ исчерпывающим образом характеризуется следующими четырьмя случаями.*

*1) $X(A,b) \neq \varnothing$, $U(A,c) \neq \varnothing$. В этом случае обе задачи $L(A,b,c)$, $L^*(A,b,c)$ разрешимы, называются **собственными** [3], и выполняются условия*

$$-\infty < \ell = \ell^* < +\infty,$$
$$\forall x \in X(A,b),\ \forall u \in U(A,c) \Rightarrow c^\top x \leqslant u^\top b.$$

*2) $X(A,b) \neq \varnothing$, $U(A,c) = \varnothing$. В этом случае $\ell = +\infty$, обе задачи неразрешимы, задача $L(A,b,c)$ называется **несобственной** 1-го рода, задача $L^*(A,b,c)$ — **несобственной** 2-го рода [3].*

*3) $X(A,b) = \varnothing$, $U(A,c) \neq \varnothing$. В этом случае $\ell^* = -\infty$, обе задачи неразрешимы, задача $L(A,b,c)$ называется **несобственной** 2-го рода, задача $L^*(A,b,c)$ — **несобственной** 1-го рода [3].*

*4) $X(A,b) = \varnothing$, $U(A,c) = \varnothing$. В этом случае обе задачи $L(A,b,c)$, $L^*(A,b,c)$ неразрешимы и называются **несобственными** 3-го рода [3].*

Предположим, что параметры A, b, c подвержены возмущениям, что делает решения задач $L(A,b,c)$, $L^*(A,b,c)$ неустойчивыми, далекими от гипотетических точных решений или приводит к несобственности указанных задач ЛП. В этом случае оправдано применение процедур регуляризации и коррекции параметров, формализованных, например, в виде следующих задач:

Минимальная матричная коррекция пары задач $L(A,b,c)$, $L^*(A,b,c)$, гарантирующая их собственность:

$$C(t_b,t_c):\ \|H\|^2 + t_b\|h_b\|^2 + t_c\|h_c\|^2 \longrightarrow \min_{\substack{X(A+H,\,b+t_b h_b) \neq \varnothing,\\ U(A+H,\,c+t_c h_c) \neq \varnothing}} \qquad (1)$$

Поиск регуляризованного (по А. Н. Тихонову) решения приближенной пары взаимодвойственных задач ЛП:

$$R\left(\mu,\delta_b,\delta_c\right):\ \|x\|^2+\|u\|^2 \longrightarrow \min_{\substack{x\in X_{opt}\left(A+H,\,b+h_b,\,c+h_c\right),\\ u\in U_{opt}\left(A+H,\,b+h_b,\,c+h_c\right),\\ \|H\|\leqslant\mu,\ \|h_b\|\leqslant\delta_b,\ \|h_c\|\leqslant\delta_c}} \tag{2}$$

В формулах (1)–(2) и далее в тексте символом $\|\cdot\|$ обозначена, в зависимости от контекста, евклидова векторная или матричная норма, в матричном случае называемая также *сферической*, *l_2-нормой*, нормой *Фробениуса*, *Шура* или *Гильберта–Шмидта* (см. например, [4–6]).

Параметры t_b и t_c в формуле (1) могут принимать только значения $\{0,1\}$, задавая четыре варианта постановки указанной задачи. Скалярные параметры $\mu>0$, $\delta_b\geqslant 0$ и $\delta_c\geqslant 0$, используемые в формуле (2), задают считающиеся априорно известными оценки норм погрешностей (возмущений) объектов A, b и c.

Задачи C, R и им подобные объединяет между собой общий алгебраический инструментарий — так называемые задачи матричной коррекции [7–30], о которых и пойдет речь в данном докладе.

2°. Матричная коррекция при решении приближенных систем линейных алгебраических уравнений и «основная лемма» А.Н. Тихонова. Материал, изложенный в данном параграфе, ранее уже рассматривался на семинаре «CNSA & NDO» [31].

Рассмотрим следующую задачу, исследованную А.Н. Тихоновым в 1980 г.:

Задача $T\left(\mu,\delta\right)$ [32]. Существует совместная система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$A_0x=b_0, \tag{3}$$

где $A_0\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $b_0\in\mathbb{R}^m$, $b_0\neq 0$, соотношения между размерами A_0 и ее рангом не оговариваются, $x_0\in\mathbb{R}^n$ — решение системы (3) с минимальной евклидовой нормой (нормальное решение). Систему (3) будем называть *точной*. Численные значения A_0, b_0 и x_0 неизвестны, а вместо них заданы *приближенные* матрица $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ и вектор $b\in\mathbb{R}^m$, $b\neq 0$ такие, что выполняются условия

$$\|A_0-A\|\leqslant\mu,\ \|b_0-b\|\leqslant\delta<\|b\|,$$

где $\mu\geqslant 0$ и $\delta\geqslant 0$ — известные параметры, одновременно не равные нулю. Полнота ранга матрицы A и совместность системы $Ax=b$ в общем случае не предполагаются.

Требуется найти матрицу $A_1\in\mathbb{R}^{m\times n}$ и векторы $b_1\in\mathbb{R}^m$, $x_1\in\mathbb{R}^n$ такие, что выполнены условия

$$\|A-A_1\|\leqslant\mu,\ \|b-b_1\|\leqslant\delta,\ A_1x_1=b_1,\ \ \|x_1\|\longrightarrow\min.$$

Задача $T(\mu, \delta)$, названная А.Н. Тихоновым впоследствии *регуляризованным методом наименьших квадратов* (РМНК) [33, 34] интересна по двум причинам. Во-первых, это — одна из первых известных (упоминающихся в литературе) задач матричной коррекции. Во-вторых, среди «инструментария» указанной задачи — важная к контексте данного доклада вспомогательная задача, названная А.Н. Тихоновым «основной леммой».

ЛЕММА 1 («основная лемма» [32])**.** *СЛАУ вида $Ax = b$ разрешима относительно неизвестной матрицы $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ при любых заданных $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, $b \in \mathbb{R}^m$. Решение $\hat{A}$ указанной системы с минимальной евклидовой нормой единственно и выражается формулой*

$$\hat{A} = \frac{bx^\top}{x^\top x},$$

причем

$$\left\|\hat{A}\right\| = \frac{\|b\|}{\|x\|}.$$

Лемма 1 позволяет свести задачу $T(\mu, \delta)$ к задаче условной минимизации в пространстве $\mathbb{R}^n$, решение которой есть искомый вектор x_1. Остальные искомые объекты — A_1 и b_1, интерпретируемые в контексте данного доклада как результат матричной коррекции матрицы $\left[\begin{array}{cc} A & b \end{array}\right]$, вычисляются по прямым формулам через A, b, x_1 и δ. Детальное изложение указанной задачи и её современных обобщений и модификаций представлено в докладе [31].

3°. Матричное решение сопряженной пары систем линейных алгебраических уравнений. В силу теоремы 1 важным «рабочим» объектом, необходимым для исследования пары взаимно двойственных задач ЛП, является пара сопряженных СЛАУ. Рассмотрим указанный объект и связанную с ним задачу матричной коррекции.

Задача $Z_A(x, v, u, b)$ [16]:

Дано: известные векторы $x, v \in \mathbb{R}^n$, $u, b \in \mathbb{R}^m$, $x, u \neq 0$.

Найти: матрицу $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ с минимальной евклидовой нормой, являющуюся решением системы

$$Ax = b,\ u^\top A = v^\top. \tag{4}$$

Указанная задача может рассматриваться как обобщение «основной леммы» А.Н. Тихонова на случай пары сопряженных систем линейных алгебраических уравнений.

Решение задачи Z_A дает следующая

ТЕОРЕМА 2 ([16]). *Система* (4) *при выполнении условий* x, $u \neq 0$ *разрешима относительно матрицы* A *тогда и только тогда, когда выполняется условие*

$$u^\top b = v^\top x = \alpha. \tag{5}$$

При этом решение $\hat{A}$ *указанной системы, обладающее минимальной евклидовой нормой, единственно и определяется формулами*

$$\hat{A} = \frac{bx^\top}{x^\top x} + \frac{uv^\top}{u^\top u} - \alpha\frac{ux^\top}{x^\top x \cdot u^\top u}, \tag{6}$$

$$||\hat{A}||^2 = \frac{\|b\|^2}{\|x\|^2} + \frac{\|v\|^2}{\|u\|^2} - \frac{\alpha^2}{\|x\|^2 \cdot \|u\|^2}. \tag{7}$$

Доказательство.

1. Покажем, что если некоторое решение A системы (4) существует, то выполняется условие (5). Действительно, предположим, что некоторое решение A системы (4) существует. Умножив слева обе части первого уравнения (4) на $u^\top$ и обе части второго уравнения (4) справа на x, получим (5): $u^\top Ax = u^\top b = v^\top x = \alpha$.

2. Заметим, что силу условий $x, u \neq 0$ матрица $\hat{A}$, задаваемая формулой (6), существует, а при выполнении условия (5) действительно является решением системы (4), что проверяется простой подстановкой.

3. Покажем, что величина $||\hat{A}||^2$ определяется формулой (7). Пусть

$$\hat{A} = C + D,$$

где

$$C = \tfrac{bx^\top}{x^\top x},$$
$$D = \tfrac{uv^\top}{u^\top u} - \alpha\tfrac{ux^\top}{x^\top x \cdot u^\top u} = \tfrac{u}{u^\top u}\left(v^\top - \alpha\tfrac{x^\top}{x^\top x}\right).$$

Пусть $C_{i\bullet}$ — i-я строка матрицы C, $D_{i\bullet}$ — i-я строка матрицы D. Заметим, каждая строка $C_{i\bullet}$ ортогональна строке $D_{i\bullet}$, в силу чего $||\hat{A}||^2 = \|C\|^2 + \|D\|^2$. Кроме того, $\operatorname{rank} C = \operatorname{rank} D = 1$, откуда

$$C = \frac{\|b\|}{\|x\|},\ D = \frac{\left\|v - \alpha\frac{x}{\|x\|}\right\|}{\|u\|}.$$

Заметим, что

$$\left\|v - \alpha\tfrac{x}{\|x\|}\right\|^2 = \left(v - \alpha\tfrac{x}{\|x\|}\right)^\top\left(v - \alpha\tfrac{x}{\|x\|}\right) =$$
$$= \|v\|^2 - \tfrac{2\alpha\cdot v^\top x}{\|x\|^2} + \tfrac{\alpha^2}{\|x\|^2} = \|v\|^2 - \tfrac{\alpha^2}{\|x\|^2}.$$

Но тогда

$$\|D\|^2 = \frac{\|v\|^2}{\|u\|^2} - \frac{\alpha^2}{\|x\|^2 \cdot \|u\|^2},$$

откуда, с учетом предшествующих выкладок, и получаем формулу (7).

4. Покажем, что любое матричное решение системы (4) вида $\hat{A} + \Delta A$, где $\Delta A \neq 0$, обладает свойством $||\hat{A}+\Delta A|| > ||\hat{A}||$, или, что эквивалентно, $\hat{A}$ является единственным решением системы (4) с минимальной евклидовой нормой. Пусть $\Delta A_{i\bullet}$ — строка матрицы ΔA с номером i, $\Delta A_{\bullet j}$ — столбец матрицы ΔA с номером j, $D_{\bullet j}$ — столбец матрицы D с номером j. Поскольку $\hat{A} + \Delta A$ — решение системы (4), выполняются условия $\Delta A x = 0$, $u^\top \Delta A = 0$. Это влечет выполнение условий $\Delta A_{i\bullet} \cdot C_{i\bullet}^\top = 0,\ i = 1, 2, \ldots, m,\ D_{\bullet j}^\top \cdot \Delta A_{\bullet j} = 0,\ j = 1, 2, \ldots, n$. Следовательно, $||\hat{A} + \Delta A||^2 = \|C\|^2 + \|D\|^2 + \|\Delta A\|^2 = ||\hat{A}||^2 + \|\Delta A\|^2$, откуда и получаем $||\hat{A} + \Delta A|| > ||\hat{A}||$ для всех $\Delta A \neq 0$. $\square$

Приведенная выше схема рассуждений близка к использованной в работе [16] и не раскрывает выкладок, в результате которых была найдена (открыта) формула (6).

Для компенсации указанного недостатка выполним менее формальные построения, приводящие к формуле (6).

Рассмотрим вначале только систему $Ax = b$. В силу «основной леммы» А. Н. Тихонова, решение указанной системы с минимальной евклидовой нормой при $x \neq 0$ существует, единственно и задается формулой

$$\breve{A} = \frac{bx^\top}{x^\top x} = C.$$

Будем искать некоторое (не обязательно обладающее минимальной нормой) решение системы (4) в виде $\tilde{A} = C + Q$, где $Q \in \mathbb{R}^{m\times n}$ — некоторая неизвестная матрица. Подстановка $\tilde{A}$ в (4) с учетом условия (5) приводит к следующим соотношениям для матрицы Q:

$$Qx = 0, \tag{8}$$

$$u^\top Q = v^\top - \alpha \frac{x^\top}{x^\top x}. \tag{9}$$

Рассмотрим систему (9) отдельно. В силу «основной леммы» А.Н. Тихонова, решение указанной системы с минимальной евклидовой нормой при $u \neq 0$ существует, единственно и задается формулой

$$\hat{Q} = \frac{u}{u^\top u}\left(v^\top - \alpha\frac{x^\top}{x^\top x}\right) = D.$$

Учитывая (5), несложно убедиться, что матрица $\hat{Q}$ также является решением системы (8), откуда и следует, что

$$\tilde{A} = \left(\breve{A} + \hat{Q}\right) = (C + D) = \frac{bx^\top}{x^\top x} + \frac{uv^\top}{u^\top u} - \alpha \frac{ux^\top}{x^\top x \cdot u^\top u} = \hat{A}$$

— некоторое решение системы (4). Таким образом, формула (6) получена, и остается только обосновать, что она задает матрицу с минимальной евклидовой нормой.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Если система (4) разрешима относительно неизвестной матрицы A, то семейство указанных матриц описывается формулой*

$$A = \hat{A} + \Delta A, \tag{10}$$

где $\hat{A}$ — матрица с минимальной евклидовой нормой, задаваемая формулами (5), (6), $\Delta A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ — произвольная матрица такая, что

$$u^\top \Delta A = 0, \ \Delta A x = 0. \tag{11}$$

ПРИМЕР 1.

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \ u = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ b = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \ v = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\alpha = v^\top x = u^\top b = -3,$$

$$\hat{A} = \frac{bx^\top}{x^\top x} + \frac{uv^\top}{u^\top u} - \alpha \frac{ux^\top}{x^\top x \cdot u^\top u} = \begin{pmatrix} \frac{13}{30} & -\frac{11}{15} & \frac{1}{30} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{2}{15} & -\frac{8}{15} & -\frac{1}{15} \end{pmatrix},$$

$$\Delta A = \left(I - \frac{uu^\top}{u^\top u}\right) \cdot \left(I - \frac{xx^\top}{x^\top x}\right) = \begin{pmatrix} \frac{7}{30} & \frac{1}{15} & -\frac{11}{30} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{7}{15} & -\frac{2}{15} & \frac{11}{15} \end{pmatrix},$$

$$A = \hat{A} + \Delta A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Проводя вычисления, убеждаемся в выполнении условий

$$Ax = \hat{A}x = b, \ u^\top A = u^\top \hat{A} = v^\top,$$

$$\frac{\|b\|^2}{\|x\|^2} + \frac{\|v\|^2}{\|u\|^2} - \frac{\alpha^2}{\|x\|^2 \cdot \|u\|^2} = \frac{3}{6} + \frac{5}{5} - \frac{9}{6 \cdot 5} = \frac{6}{5} = \left\|\hat{A}\right\|^2,$$

$$\|\Delta A\|^2 = \frac{13}{10}, \ \|A + \Delta A\|^2 = \frac{5}{2} = \|A\|^2 + \|\Delta A\|^2.$$

З а м е ч а н и е. Выше (см. следствие 1) было показано, что решением пары сопряженных СЛАУ вида (4) в общем случае является *семейство* матриц, задаваемое формулами (10)–(11), одним из элементов которого является матрица с минимальной евклидовой нормой вида (6). Аналогичные результаты имеют место и для задач матричной коррекции, рассматриваемых в следующих параграфах. Однако, для обеспечения компактности изложения, матричные семейства в докладе больше не рассматриваются, а внимание сконцентрировано на важных *элементах* данных семейств – матрицах (расширенных матрицах) с минимальной евклидовой нормой.

4°. Минимальное по евклидовой норме матричное решение для пары взаимно двойственных задач линейного программирования с заданными оптимальными решениями. В этом параграфе мы рассмотрим «инструментальную» задачу, которая является *обратной* задачей ЛП. Публикации, посвященные обратным задачам ЛП, встречаются нечасто. В качестве примера можно упомянуть одну из недавних работ [35], в которой рассматривается проблема минимального по евклидовой норме изменения (коррекции) вектора целевой функции, обеспечивающая оптимальность некоторого заданного вектора, выбранного из множества допустимых векторов задачи ЛП.

Задача, о которой пойдет речь ниже, является обратной в том смысле, что к её исходным данным принадлежат заданные векторы решений прямой и двойственной задач ЛП, а в качестве искомой величины выступает неизвестная матрица коэффициентов.

Задача $M_A(x, v, u, b)$ [36]:

Дано: известные векторы $x, c \in \mathbb{R}^n$, $u, b \in \mathbb{R}^m$, $x, u \neq 0$, $x \geqslant 0$.

Найти: матрицу $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ с минимальной евклидовой нормой такую, что векторы x, u являются решениями задач линейного программирования $L(A, b, c)$ и $L^*(A, b, c)$, т. е. такую, что

$$x \in X_{opt}(A, b, c)\,, \tag{12}$$
$$u \in U_{opt}(A, b, c)\,. \tag{13}$$

Решение задачи M_A дает следующая

ТЕОРЕМА 3 ([36]). *Матрица A, обеспечивающая при заданных x, $u \neq 0$ выполнение условий* (12)–(13), *существует тогда и только тогда, когда выполняется условие*

$$c^\top x = u^\top b = \alpha. \tag{14}$$

Решение $\hat{A}$ системы (12)–(13), *минимальное по евклидовой норме* (*решение задачи M_A*), *единственно и определяется формулой*

$$\hat{A} = \frac{bx^\top}{x^\top x} + \frac{ug^\top}{u^\top u} - \alpha\frac{ux^\top}{x^\top x \cdot u^\top u}, \tag{15}$$

где

$$g = (g_j) \in \mathbb{R}^n, \; g_j = \begin{cases} 0, & \textit{если } c_j \leqslant 0 \textit{ и } x_j = 0, \\ c_j, & \textit{в противном случае.} \end{cases} \tag{16}$$

При этом

$$\left\|\hat{A}\right\|^2 = \frac{\|b\|^2}{\|x\|^2} + \frac{\|g\|^2}{\|u\|^2} - \frac{\alpha^2}{\|x\|^2 \cdot \|u\|^2}. \tag{17}$$

Доказательство. В силу теоремы 1 для того, чтобы задачи $L\,(A, b, c)$, $L^*\,(A, b, c)$ были разрешимы, а ненулевые векторы x, u были их оптимальными решениями, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (12)–(13) и соотношение двойственности (14). Выполнение условий (12)–(13) означает совместность системы

$$\begin{cases} Ax = b, \\ u^\top A \geqslant c^\top. \end{cases} \tag{18}$$

Перепишем систему (18) в виде эквивалентной пары сопряженных систем линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} Ax = b, \\ u^\top A = c^\top + z^\top = g^\top, \end{cases} \tag{19}$$

где $z \in \mathbb{R}^n$, $z \geqslant 0$ — некоторый вектор. Из условия (14) следует, что

$$z^\top x = 0. \tag{20}$$

В силу теоремы 2 система (19) разрешима при заданных ненулевых векторах x, u относительно неизвестной матрицы A тогда и только тогда, когда выполнено условие $g^\top x = u^\top b$, которое, с учетом (20) оказывается эквивалентно условию (14). Таким образом, условия существования решения системы (19) выполнены. Решение указанной системы с минимальной евклидовой нормой в силу теоремы 2 определяется формулами (15) и (17).

Как следует из формулы (17), величина $\left\|\hat{A}\right\|^2$ аддитивна по $\|g\|^2$. В соответствии с (19) и (20) для минимизации $\left\|\hat{A}\right\|^2$ по g следует рассмотреть задачу квадратичного программирования

$$\|g\|^2 = \|c + z\|^2 \longrightarrow \min_{z \geqslant 0,\; z^\top x = 0}. \tag{21}$$

Решение $\hat{z} = (\hat{z}_j) \in \mathbb{R}^n$ задачи (21) достаточно очевидно:

$$z_j = \begin{cases} -c_j, & \text{если } c_j < 0 \text{ и } x_j = 0, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{22}$$

В свою очередь, из (22) непосредственно получаем (16), что завершает доказательство теоремы.

□

ПРИМЕР 2.

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},\ c = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix},\ g = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\alpha = c^\top x = u^\top b = -2,$$

$$\hat{A} = \frac{bx^\top}{x^\top x} + \frac{uv^\top}{u^\top u} - \alpha \frac{ux^\top}{x^\top x \cdot u^\top u} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Проводя вычисления, убеждаемся в выполнении условий

$$\hat{A}x = b,$$

$$u^\top \hat{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \geqslant \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \end{bmatrix} = c^\top,$$

$$\frac{\|b\|^2}{\|x\|^2} + \frac{\|v\|^2}{\|u\|^2} - \frac{\alpha^2}{\|x\|^2 \cdot \|u\|^2} = \frac{3}{2} + \frac{10}{2} - \frac{4}{2 \cdot 2} = \frac{11}{2} = \left\|\hat{A}\right\|^2.$$

5°. Минимальная по евклидовой норме матричная коррекция пары взаимно двойственных задач линейного программирования с заданными оптимальными решениями. В данном параграфе рассматривается *набор* задач минимальной матричной коррекции пары взаимно двойственных задач ЛП $L(A, b, c)$, $L^*(A, b, c)$, гарантирующей принадлежность заданных векторов $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ множествам оптимальных решений скорректированных задач ЛП:

$$\begin{array}{ll} C_0(x, u, t_b, t_c): & \\ \|H\|^2 + t_b\|h_b\|^2 + t_c\|h_c\|^2 \longrightarrow & \min\limits_{\substack{x \in X_{opt}(A+H,\, b+t_b h_b,\, c+t_c h_c), \\ u \in U_{opt}(A+H,\, b+t_b h_b,\, c+t_c h_c)}} \end{array}$$

В зависимости от значений параметров $t_b, t_c \in \{0, 1\}$ существуют четыре возможных варианта задачи из указанного набора, которые мы рассмотрим по отдельности.

Задача $C_0(x, u, 0, 0)$:

Дано: известные векторы $x, c \in \mathbb{R}^n$, $u, b \in \mathbb{R}^m$, $x, u \neq 0$, $x \geqslant 0$, некоторая известная матрица $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

Найти: матрицу $H \in \mathbb{R}^{m\times n}$ с минимальной евклидовой нормой такую, что векторы x, u являются решениями задач линейного программирования $L(A+H, b, c)$ и $L^*(A+H, b, c)$, т.е. такую, что

$$x \in X_{opt}(A+H, b, c), \tag{23}$$

$$u \in U_{opt}(A+H, b, c). \tag{24}$$

Указанная задача впервые была рассмотрена в работе [16], где в качестве инструмента исследования была использована задача Z_A и теорема 2. Позже, в работе [36], с использованием задачи M_A и теоремы 3 выкладки удалось существенно упростить и систематизировать.

ТЕОРЕМА 4 ([16, 36])**.** *Матрица H, обеспечивающая при заданных x, $u \neq 0$ выполнение условий* (23)–(24)*, существует тогда и только тогда, когда выполняется условие*

$$c^\top x = u^\top b = \gamma. \tag{25}$$

Решение $\hat{H}$ системы (23)–(24)*, минимальное по евклидовой норме* (*решение задачи* $C_0\,(x, u, 0, 0)$)*, единственно и определяется формулой*

$$\hat{H} = \frac{(b - Ax)\,x^\top}{x^\top x} + \frac{ug^\top}{u^\top u} - \alpha\frac{ux^\top}{x^\top x \cdot u^\top u}, \tag{26}$$

где

$$\alpha = \gamma - u^\top Ax, \tag{27}$$

$$g = (g_j) \in \mathbb{R}^n,\ g_j = \begin{cases} 0, \ \textit{если}\ \left(c - A^\top u\right)_j \leqslant 0 \ \textit{и}\ x_j = 0, \\ \left(c - A^\top u\right)_j \ \textit{в противном случае.} \end{cases} \tag{28}$$

При этом

$$\left\|\hat{H}\right\|^2 = \frac{\|b - Ax\|^2}{\|x\|^2} + \frac{\|g\|^2}{\|u\|^2} - \frac{\alpha^2}{\|x\|^2 \cdot \|u\|^2}. \tag{29}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим задачу $M_H(x, u, \tilde{b}, \tilde{c})$, являющуюся модификацией задачи $M_A(x, u, b, c)$:

Дано: известные векторы $x, c \in \mathbb{R}^n$, $u, b \in \mathbb{R}^m$, $x, u \neq 0$, удовлетворяющие условию (25), некоторая матрица $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и построенные с использованием указанных объектов векторы

$$\tilde{b} = b - Ax, \tag{30}$$

$$\tilde{c} = c - A^\top u. \tag{31}$$

Найти: матрицу $H \in \mathbb{R}^{m\times n}$ с минимальной евклидовой нормой такую, что векторы x, u являются решениями задач линейного программирования $L\left(H, \tilde{b}, \tilde{c}\right)$ и $L^*\left(H, \tilde{b}, \tilde{c}\right)$, т.е. такую, что

$$x \in X_{opt}\left(H, \tilde{b}, \tilde{c}\right), \tag{32}$$

$$u \in U_{opt}\left(H, \tilde{b}, \tilde{c}\right). \tag{33}$$

Задачи $C_0\left(x,u,0,0\right)$ и $M_A(x,u,b,c)$ эквивалентны, поскольку в силу (30)–(31) множество $X_{opt}\left(A+H,b,c\right)$ совпадает с множеством $X_{opt}\left(H,\tilde{b},\tilde{c}\right)$, а множество $U_{opt}\left(A+H,b,c\right)$ совпадает с множеством $U_{opt}\left(H,\tilde{b},\tilde{c}\right)$.

В силу теоремы 3 матрица H, которая для заданных ненулевых x,u обеспечивает выполнение условий (32)–(33), существует тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\tilde{c}^\top x = u^\top \tilde{b} = \alpha. \tag{34}$$

С учетом (25), (30) и (31) имеем:

$$\tilde{c}^\top x = u^\top \tilde{b} = \alpha \Leftrightarrow c^\top x - u^\top Ax = u^\top b - u^\top Ax = \alpha \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \gamma = c^\top x = u^\top b, \\ \alpha = \gamma - u^\top Ax. \end{array} \right.$$

Следовательно, в силу теоремы 3, совокупность условий (25), (30) и (31) для заданных ненулевых x,u может рассматриваться в качестве необходимых и достаточных условий существования матрицы H, гарантирующей для заданных $x,u\neq 0$ выполнение условий (32)–(33).

Предположим, что условия (25), (30) и (31) для заданных ненулевых x,u выполнены. В этом случае, в силу теоремы 3, решение системы (32)–(33) — матрица H — существует, соответствующая матрица $\hat{H}$ с минимальной евклидовой нормой (решение задачи $M_H(x,u,\tilde{b},\tilde{c})$) является единственной и определяется формулами

$$\hat{H} = \frac{\tilde{b}x^\top}{x^\top x} + \frac{u\tilde{g}^\top}{u^\top u} - \alpha\frac{ux^\top}{x^\top x \cdot u^\top u}, \tag{35}$$

$$\tilde{g} = (\tilde{g}_j) \in \mathbb{R}^n,\ \tilde{g}_j = \left\{ \begin{array}{l} 0,\ \text{если } \tilde{c}_j \leqslant 0 \text{ и } x_j = 0, \\ \tilde{c}_j \text{ в противном случае,} \end{array} \right. \tag{36}$$

где параметр α определяется формулой (34). При этом

$$\left\|\hat{H}\right\|^2 = \frac{\left\|\tilde{b}\right\|^2}{\|x\|^2} + \frac{\|\tilde{g}\|^2}{\|u\|^2} - \frac{\alpha^2}{\|x\|^2\cdot\|u\|^2}. \tag{37}$$

Несложно убедиться, что подстановка равенств (30)–(31) в формулы (34), (35)–(37) с учетом (25) превращает последние в формулы (27), (26), (28)–(29). Таким образом, все утверждения теоремы 4 справедливы, а сама теорема действительно описывает необходимые и достаточные условия решения задачи $C_0\left(x,u,0,0\right)$ и его вид. □

ПРИМЕР 3.

$$x=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\ u=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\ b=\begin{bmatrix}-1\\1\\-1\end{bmatrix},\ c=\begin{bmatrix}1\\-3\\-1\end{bmatrix},\ A=\begin{pmatrix}1&-2&0\\2&0&-1\\1&-1&1\end{pmatrix},$$

$$\gamma=c^\top x=u^\top b=-2,\ \alpha=\gamma-u^\top Ax=-1,$$

$$b-Ax=\begin{bmatrix}0\\-1\\-1\end{bmatrix},\ c-A^\top u=\begin{bmatrix}-1\\0\\-2\end{bmatrix},\ g=\begin{bmatrix}-1\\0\\0\end{bmatrix},$$

$$\hat H=\frac{(b-Ax)\,x^\top}{x^\top x}+\frac{ug^\top}{u^\top u}-\alpha\frac{ux^\top}{x^\top x\cdot u^\top u}=\begin{pmatrix}-\frac14&\frac14&0\\-\frac12&-\frac12&0\\-\frac34&-\frac14&0\end{pmatrix}.$$

Проводя вычисления, убеждаемся в выполнении условий

$$\left(A+\hat H\right)x=b,$$

$$u^\top\left(A+\hat H\right)=\begin{bmatrix}1&-3&1\end{bmatrix}\geqslant\begin{bmatrix}1&-3&-1\end{bmatrix}=c^\top,$$

$$\frac{\|b-Ax\|^2}{\|x\|^2}+\frac{\|g\|^2}{\|u\|^2}-\frac{\alpha^2}{\|x\|^2\cdot\|u\|^2}=\frac22+\frac12-\frac{1}{2\cdot2}=\frac54=\left\|\hat H\right\|^2.$$

Задача $C_0\,(x,u,1,0)$ [36]:

Дано: известные векторы $x,\ c\in\mathbb{R}^n,\ u,\ b\in\mathbb{R}^m,\ u\neq0,\ x\geqslant0$, некоторая известная матрица $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$.

Найти: матрицу $\begin{bmatrix}H&-h_b\end{bmatrix}$, где $H\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $h_b\in\mathbb{R}^m$ с минимальной евклидовой нормой такую, что векторы x,u являются решениями задач линейного программирования $L\,(A+H,b+h_b,c)$ и $L^*\,(A+H,b+h_b,c)$, т.е. такую, что

$$x\in X_{opt}\,(A+H,b+h_b,c)\,, \tag{38}$$

$$u\in U_{opt}\,(A+H,b+h_b,c)\,. \tag{39}$$

ТЕОРЕМА 5 ([36])**.** *Матрица* $\begin{bmatrix}H&-h_b\end{bmatrix}$*, обеспечивающая выполнение условий* (38)–(39)*, существует при любых* $A,\ b,\ c,\ x,\ u\neq0$*. Решение* $\begin{bmatrix}\hat H&-\hat h_b\end{bmatrix}$ *системы* (38)–(39)*, минимальное по евклидовой норме* (*решение задачи* $C_0\,(x,u,1,0)$)*, единственно и определяется формулой*

$$\begin{bmatrix}\hat H&-\hat h_b\end{bmatrix}=\frac{(b-Ax)\begin{bmatrix}x^\top&1\end{bmatrix}}{x^\top x+1}+\frac{u\begin{bmatrix}g^\top&\sigma\end{bmatrix}}{u^\top u}-\alpha\frac{u\begin{bmatrix}x^\top&1\end{bmatrix}}{(x^\top x+1)\cdot u^\top u}, \tag{40}$$

где

$$\alpha=u^\top b-u^\top Ax, \tag{41}$$

$$\sigma=u^\top b-c^\top x, \tag{42}$$

а вектор g *определяется формулой* (28)*.*

При этом

$$\left\| \left[\begin{array}{cc} \hat{H} & -\hat{h}_b \end{array} \right] \right\|^2 = \frac{\|b - Ax\|^2}{\|x\|^2 + 1} + \frac{\|g\|^2 + \sigma^2}{\|u\|^2} - \frac{\alpha^2}{\left(\|x\|^2 + 1\right) \cdot \|u\|^2}. \tag{43}$$

Доказательство. Рассмотрим задачу $M_{\left[\begin{array}{cc} H & -h_b \end{array} \right]}(\tilde{x}, u, \tilde{b}, \tilde{c})$, являющейся модификацией задачи $M_A(x, u, b, c)$:

Дано: известные векторы $x, c \in \mathbb{R}^n$, $u, b \in \mathbb{R}^m$, $x \geqslant 0$, $u \neq 0$, некоторая матрица $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ и построенные с использованием указанных объектов векторы $\tilde{x}$, $\tilde{b}$ и $\tilde{c}$, где

$$\tilde{x} = \left[\begin{array}{c} x \\ 1 \end{array} \right] \in \mathbb{R}^{n+1}, \tag{44}$$

вектор $\tilde{b}$ определяется формулой (30),

$$\tilde{c} = \left[\begin{array}{c} c - A^\top u \\ \sigma \end{array} \right] \in \mathbb{R}^{n+1}, \tag{45}$$

$\sigma \in \mathbb{R}$ — некоторый параметр.

Найти: матрицу $\left[\begin{array}{cc} H & -h_b \end{array} \right] \in \mathbb{R}^{m \times (n+1}$ с минимальной евклидовой нормой такую, что векторы $\tilde{x}, u$ являются решениями задач линейного программирования $L\left(\left[\begin{array}{cc} H & -h_b \end{array} \right], \tilde{b}, \tilde{c} \right)$ и $L^*\left(\left[\begin{array}{cc} H & -h_b \end{array} \right], \tilde{b}, \tilde{c} \right)$, т. е. такую, что

$$\tilde{x} \in X_{opt}\left(\left[\begin{array}{cc} H & -h_b \end{array} \right], \tilde{b}, \tilde{c} \right), \tag{46}$$

$$u \in U_{opt}\left(\left[\begin{array}{cc} H & -h_b \end{array} \right], \tilde{b}, \tilde{c} \right). \tag{47}$$

Задачи $C_0(x, u, 1, 0)$ и $M_{\left[\begin{array}{cc} H & -h_b \end{array} \right]}(\tilde{x}, u, \tilde{b}, \tilde{c})$ эквивалентны, поскольку в силу (30), (44) и (45) между множествами $X_{opt}(A + H, b + h_b, c)$ и $X_{opt}\left(\left[\begin{array}{cc} H & -h_b \end{array} \right], \tilde{b}, \tilde{c} \right)$ существует взаимно однозначное соответствие

$$x \in X_{opt}(A + H, b + h_b, c) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x \\ 1 \end{array} \right] \in X_{opt}\left(\left[\begin{array}{cc} H & -h_b \end{array} \right], \tilde{b}, \tilde{c} \right),$$

а множество $U_{opt}(A + H, b + h_b, c)$ совпадает с множеством $U_{opt}\left(\left[\begin{array}{cc} H & -h_b \end{array} \right], \tilde{b}, \tilde{c} \right)$.

Заметим, что в силу (44) $\tilde{x} \neq 0$ при любом x, в том числе при $x = 0$.

В силу теоремы 3, матрица $\left[\begin{array}{cc} H & -h_b \end{array} \right]$, которая для заданных $\tilde{x}$ и $u \neq 0$ обеспечивает выполнение условий (46)-(47), существует тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\tilde{c}^\top \tilde{x} = \tilde{b}^\top u = \alpha, \tag{48}$$

которое с учетом (44)–(45) принимает вид

$$c^\top x - u^\top Ax + \sigma = u^\top b - u^\top Ax = \alpha. \tag{49}$$

Несложно заметить, что выбор значения параметра σ в соответствии с формулой (42) и параметра α в соответствии с формулой (41) обращает условие (49) в тождество *при любых* A, x, u, b, c. Следовательно, в силу теоремы 3, матрица $\begin{bmatrix} H & -h_b \end{bmatrix}$, гарантирующая выполнение условий (46)–(47), существует при любом x и любом $u \neq 0$. При этом, в силу теоремы 3, соответствующая матрица $\begin{bmatrix} \hat{H} & -\hat{h}_b \end{bmatrix}$ с минимальной евклидовой нормой, является единственной и задается формулами

$$\begin{bmatrix} \hat{H} & -\hat{h}_b \end{bmatrix} = \frac{\tilde{b}\tilde{x}^\top}{\tilde{x}^\top\tilde{x}} + \frac{u\tilde{g}^\top}{u^\top u} - \alpha\frac{u\tilde{x}^\top}{\tilde{x}^\top\tilde{x}\cdot u^\top u}, \tag{50}$$

$$\tilde{g} = (\tilde{g}_j) = \begin{bmatrix} g \\ \sigma \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}, \tag{51}$$

где параметр α определяется формулой (48), а вектор g — формулой (28). При этом

$$\left\|\begin{bmatrix} \hat{H} & -\hat{h}_b \end{bmatrix}\right\|^2 = \frac{\left\|\tilde{b}\right\|^2}{\|\tilde{x}\|^2} + \frac{\|\tilde{g}\|^2}{\|u\|^2} - \frac{\alpha^2}{\|\tilde{x}\|^2\cdot\|u\|^2}. \tag{52}$$

Несложно убедиться, что подстановка равенств (30), (42), (44), (45) в формулы (48), (50), (51), (52) превращает последние в формулы (41), (40) (28) и (43). Таким образом, все утверждения теоремы 5 справедливы, а сама теорема действительно описывает необходимые и достаточные условия решения задачи $C_0(x, u, 1, 0)$ и его вид. □

ПРИМЕР 4.

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},\ c = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\alpha = u^\top b - u^\top Ax = -1,\ \sigma = u^\top b - c^\top x = -2,$$

$$b - Ax = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix},\ c - A^\top u = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix},\ g = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\hat{H} = \frac{(b - Ax)\,x^\top}{x^\top x + 1} + \frac{ug^\top}{u^\top u} - \alpha\frac{ux^\top}{(x^\top x + 1)\cdot u^\top u} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{h}_b = -\left(\frac{b - Ax}{x^\top x + 1} + \sigma\frac{u}{u^\top u} - \alpha\frac{u}{(x^\top x + 1)\cdot u^\top u}\right) = \begin{bmatrix} \frac{5}{6} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{7}{6} \end{bmatrix}.$$

Проводя вычисления, убеждаемся в выполнении условий

$$\left(A+\hat{H}\right)x=b+\hat{h}_b,$$
$$u^\top\left(A+\hat{H}\right)=\left[\begin{array}{ccc}2 & -2 & 1\end{array}\right]\geqslant\left[\begin{array}{ccc}2 & -2 & -1\end{array}\right]=c^\top,$$
$$c^\top x=u^\top\left(b+\hat{h}_b\right)=0,$$
$$\frac{\|b-Ax\|^2}{\|x\|^2+1}+\frac{\|g\|^2+\sigma^2}{\|u\|^2}-\frac{\alpha^2}{\left(\|x\|^2+1\right)\cdot\|u\|^2}=\frac{2}{3}+\frac{1+4}{2}-\frac{1}{3\cdot 2}=$$
$$=3=\left\|\hat{H}\right\|^2+\left\|\hat{h}_b\right\|^2=\left\|\left[\begin{array}{cc}\hat{H} & -\hat{h}_b\end{array}\right]\right\|^2.$$

Задача $C_0\left(x,u,0,1\right)$.

Указанная задача рассматривается впервые.

Дано: известные векторы $x,c\in\mathbb{R}^n$, $u,b\in\mathbb{R}^m$, $x\geqslant 0$, $x\neq 0$, некоторая известная матрица $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$.

Найти: матрицу $\left[\begin{array}{c}H\\ -h_c^\top\end{array}\right]$, где $H\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $h_c\in\mathbb{R}^n$ с минимальной евклидовой нормой такую, что векторы x,u являются решениями задач линейного программирования $L\left(A+H,b,c+h_c\right)$ и $L^*\left(A+H,b,c+h_c\right)$, т.е. такую, что

$$x\in X_{opt}\left(A+H,b,c+h_c\right), \tag{53}$$
$$u\in U_{opt}\left(A+H,b,c+h_c\right). \tag{54}$$

ТЕОРЕМА 6. *Матрица* $\left[\begin{array}{c}H\\ -h_c^\top\end{array}\right]$, *обеспечивающая выполнение условий* (53)–(54), *существует при любых* A, b, c, u, $x\neq 0$. *Решение системы* (53)–(54), *минимальное по евклидовой норме* (*решение задачи* $C_0\left(x,u,0,1\right)$), *единственно и определяется формулой*

$$\left[\begin{array}{c}\hat{H}\\ -\hat{h}_c^\top\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}b-Ax\\ \tau\end{array}\right]\frac{x^\top}{x^\top x}+\left[\begin{array}{c}u\\ 1\end{array}\right]\frac{g^\top}{u^\top u+1}-\alpha\left[\begin{array}{c}u\\ 1\end{array}\right]\frac{x^\top}{x^\top x\cdot\left(u^\top u+1\right)}, \tag{55}$$

где

$$\alpha=c^\top x-u^\top Ax, \tag{56}$$
$$\tau=c^\top x-u^\top b, \tag{57}$$

вектор g *определяется формулой* (28).

При этом

$$\left\|\left[\begin{array}{c}\hat{H}\\ -\hat{h}_c^\top\end{array}\right]\right\|^2=\frac{\|b-Ax\|^2+\tau^2}{\|x\|^2}+\frac{\|g\|^2}{\|u\|^2+1}-\frac{\alpha^2}{\|x\|^2\cdot\left(\|u\|^2+1\right)}. \tag{58}$$

Доказательство. Рассмотрим задачу $M_{\left[\begin{array}{c} H \\ -h_c^\top \end{array}\right]}(x, \tilde{u}, \tilde{b}, \tilde{c})$, являющуюся модификацией задачи $M_A(x, u, b, c)$:

Дано: известные векторы $x, c \in \mathbb{R}^n$, $u, b \in \mathbb{R}^m$, $x \geqslant 0$, $x \neq 0$, некоторая матрица $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ и построенные с использованием указанных объектов векторы $\tilde{u}$, $\tilde{b}$ и $\tilde{c}$, где

$$\tilde{u} = \left[\begin{array}{c} u \\ 1 \end{array}\right] \in \mathbb{R}^{m+1}, \tag{59}$$

$$\tilde{b} = \left[\begin{array}{c} b - Ax \\ \tau \end{array}\right], \tag{60}$$

вектор $\tilde{c}$ определяется формулой (31), $\tau \in \mathbb{R}$ — некоторый параметр.

Найти: матрицу $\left[\begin{array}{c} H \\ -h_c^\top \end{array}\right] \in \mathbb{R}^{(m+1)\times n}$ с минимальной евклидовой нормой такую, что векторы $x, \tilde{u}$ являются решениями задач линейного программирования $L\left(\left[\begin{array}{c} H \\ -h_c^\top \end{array}\right], \tilde{b}, \tilde{c}\right)$ и $L^*\left(\left[\begin{array}{c} H \\ -h_c^\top \end{array}\right], \tilde{b}, \tilde{c}\right)$, т. е. такую, что

$$x \in X_{opt}\left(\left[\begin{array}{c} H \\ -h_c^\top \end{array}\right], \tilde{b}, \tilde{c}\right), \tag{61}$$

$$\tilde{u} \in U_{opt}\left(\left[\begin{array}{c} H \\ -h_c^\top \end{array}\right], \tilde{b}, \tilde{c}\right). \tag{62}$$

Задачи $C_0\,(x, u, 0, 1)$, и $M_{\left[\begin{array}{c} H \\ -h_c^\top \end{array}\right]}(x, \tilde{u}, \tilde{b}, \tilde{c})$ эквивалентны, поскольку в силу (31), (59) и (60) множество $X_{opt}\,(A + H, b, c + h_b)$ совпадает с множеством $X_{opt}\left(\left[\begin{array}{c} H \\ -h_c^\top \end{array}\right], \tilde{b}, \tilde{c}\right)$, а между множествами $U_{opt}\,(A + H, b, c + h_c)$ и $U_{opt}\left(\left(\left[\begin{array}{c} H \\ -h_c^\top \end{array}\right], \tilde{b}, \tilde{c}\right), \tilde{b}, \tilde{c}\right)$ существует взаимно однозначное соответствие:

$$u \in U_{opt}\,(A + H, b + h_b, c) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} u \\ 1 \end{array}\right] \in U_{opt}\left(\left(\left[\begin{array}{c} H \\ -h_c^\top \end{array}\right], \tilde{b}, \tilde{c}\right), \tilde{b}, \tilde{c}\right).$$

Заметим, что в силу (59) $\tilde{u} \neq 0$ при любом u, в том числе при $u = 0$.

В силу теоремы 3, матрица $\left[\begin{array}{c} \hat{H} \\ -\hat{h}_c^\top \end{array}\right]$, которая для заданных $x \neq 0$ и $\tilde{u}$ обеспечивает выполнение условий (61)–(62), существует тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\tilde{c}^\top x = \tilde{b}^\top \tilde{u} = \alpha, \tag{63}$$

которое с учетом (59)–(60) принимает вид

$$c^\top x - u^\top Ax = u^\top b - u^\top Ax + \tau = \alpha. \tag{64}$$

Несложно заметить, что выбор значения параметра τ в соответствии с формулой (57) и параметра α в соответствии с формулой (56) обращает условие (64) в тождество *при любых* A, x, u, b, c. Следовательно, в силу теоремы 3, матрица $\begin{bmatrix} H \\ -h_c^\top \end{bmatrix}$, гарантирующая выполнение условий (61)–(62), существует при любом u и любом $x \neq 0$. При этом, в силу теоремы 3, соответствующая матрица $\begin{bmatrix} \hat{H} \\ -\hat{h}_c^\top \end{bmatrix}$ с минимальной евклидовой нормой, является единственной и задается формулами

$$\begin{bmatrix} \hat{H} \\ -\hat{h}_c^\top \end{bmatrix} = \frac{\tilde{b}x^\top}{x^\top x} + \frac{\tilde{u}\tilde{g}^\top}{\tilde{u}^\top\tilde{u}} - \alpha\frac{\tilde{u}x^\top}{x^\top x \cdot \tilde{u}^\top\tilde{u}}, \tag{65}$$

где параметр α определяется формулой (63), а вектор $\tilde{g}$ определяется формулой (36). При этом

$$\left\|\begin{bmatrix} \hat{H} \\ -\hat{h}_c^\top \end{bmatrix}\right\|^2 = \frac{\left\|\tilde{b}\right\|^2}{\|x\|^2} + \frac{\|\tilde{g}\|^2}{\|\tilde{u}\|^2} - \frac{\alpha^2}{\|x\|^2 \cdot \|\tilde{u}\|^2}. \tag{66}$$

Несложно убедиться, что подстановка равенств (31), (57), (59), (60) в формулы (63), (65),(36) и (66) превращает последние в формулы (56), (55), (28) и (58). Таким образом, все утверждения теоремы 6 справедливы, а сама теорема действительно описывает необходимые и достаточные условия разрешимости задачи $C_0\,(x, u, 0, 1)$ и вид ее решения. $\square$

ПРИМЕР 5.

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},\ c = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\alpha = c^\top x - u^\top Ax = 1,\ \tau = c^\top x - u^\top b = 2,$$

$$b - Ax = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix},\ c - A^\top u = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix},\ g = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\hat{H} = \frac{(b - Ax)\,x^\top}{x^\top x} + \frac{ug^\top}{u^\top u + 1} - \alpha\frac{ux^\top}{x^\top x \cdot (u^\top u + 1)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{h}_c = -\left(\tau\frac{x^\top}{x^\top x} + \frac{g^\top}{u^\top u + 1} - \alpha\frac{x^\top}{x^\top x \cdot (u^\top u + 1)}\right)^\top = \begin{bmatrix} -\frac{5}{6} \\ -\frac{7}{6} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Проводя вычисления, убеждаемся в выполнении условий

$$\left(A+\hat{H}\right)x=b,$$

$$u^\top\left(A+\hat{H}\right)=\left[\begin{array}{ccc}\frac{7}{6} & -\frac{19}{6} & 1\end{array}\right]\geqslant\left[\begin{array}{ccc}\frac{7}{6} & -\frac{19}{6} & -1\end{array}\right]=c^\top+\hat{h}_c^\top,$$

$$\left(c+\hat{h}_c\right)^\top x=u^\top b=-2,$$

$$\frac{\|b-Ax\|^2+\tau^2}{\|x\|^2}+\frac{\|g\|^2}{\|u\|^2+1}-\frac{\alpha^2}{\|x\|^2\cdot\left(\|u\|^2+1\right)}=\frac{2+4}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2\cdot 3}=$$

$$=\frac{19}{6}=\left\|\hat{H}\right\|^2+\left\|\hat{h}_c\right\|^2=\left\|\left[\begin{array}{c}\hat{H}\\ -\hat{h}_c^\top\end{array}\right]\right\|^2.$$

Задача $C_0\,(x,u,1,1)$.

Указанная задача рассматривается впервые.

Дано: известные векторы $x,c\in\mathbb{R}^n$, $u,b\in\mathbb{R}^m$, $x\geqslant 0$, некоторая известная матрица $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$.

Найти: матрицу $\left[\begin{array}{cc}H & -h_b\\ -h_c^\top & 0\end{array}\right]$, $H\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $h_b\in\mathbb{R}^m$, $h_c\in\mathbb{R}^n$ с минимальной евклидовой нормой такую, что векторы x,u являются решениями задач линейного программирования $L\,(A+H,b+h_b,c+h_c)$ и $L^*\,(A+H,b+h_b,c+h_c)$, т. е. такую, что

$$x\in X_{opt}\,(A+H,b+h_b,c+h_c)\,, \tag{67}$$

$$u\in U_{opt}\,(A+H,b+h_b,c+h_c)\,. \tag{68}$$

ТЕОРЕМА 7. *Матрица* $\left[\begin{array}{cc}H & -h_b\\ -h_c^\top & 0\end{array}\right]$, *обеспечивающая выполнение условий* (67)–(68), *существует при любых* A, b, c, x, u. *Решение системы* (67)–(68), *минимальное по евклидовой норме* (*решение задачи* $C_0\,(x,u,1,1)$), *единственно и определяется формулами*

$$\left[\begin{array}{cc}\hat{H} & -\hat{h}_b\\ -\hat{h}_c^\top & 0\end{array}\right]=\frac{\left[\begin{array}{c}b-Ax\\ \upsilon\end{array}\right]\left[\begin{array}{cc}x^\top & 1\end{array}\right]}{x^\top x+1}+\frac{\left[\begin{array}{c}u\\ 1\end{array}\right]\left[\begin{array}{cc}g^\top & \omega\end{array}\right]}{u^\top u+1}-\alpha\frac{\left[\begin{array}{c}u\\ 1\end{array}\right]\left[\begin{array}{cc}x^\top & 1\end{array}\right]}{\left(x^\top x+1\right)\left(u^\top u+1\right)}, \tag{69}$$

где вектор g *определяется формулой* (28),

$$\alpha=\frac{x^\top x+1}{x^\top x+u^\top u+1}\left(c^\top-u^\top A\right)x+\frac{u^\top u+1}{x^\top x+u^\top u+1}u^\top\left(b-Ax\right), \tag{70}$$

$$\gamma = \frac{c^\top x \cdot u^\top u + u^\top b \cdot x^\top x + u^\top Ax}{x^\top x + u^\top u + 1}, \tag{71}$$

$$\upsilon = c^\top x - \gamma, \tag{72}$$

$$\omega = u^\top b - \gamma, \tag{73}$$

$$\left\| \begin{bmatrix} \hat{H} & -\hat{h}_b \\ -\hat{h}_c^\top & 0 \end{bmatrix} \right\|^2 = \frac{\|b - Ax\|^2 + \upsilon^2}{\|x\|^2 + 1} + \frac{\|g\|^2 + \omega^2}{\|u\|^2 + 1} - \\ - \frac{\alpha^2}{\left(\|x\|^2 + 1\right) \cdot \left(\|u\|^2 + 1\right)}. \tag{74}$$

Доказательство. Рассмотрим задачу задачу $M_{\begin{bmatrix} H & -h_b \\ -h_c^\top & 0 \end{bmatrix}}(\tilde{x}, \tilde{u}, \tilde{b}, \tilde{c})$, являющуюся модификацией задачи $M_A(x, u, b, c)$:

Дано: известные векторы $x, c \in \mathbb{R}^n$, $u, b \in \mathbb{R}^m$, $x \geqslant 0$, и построенные с использованием указанных объектов векторы $\tilde{x}$, $\tilde{u}$, $\tilde{b}$ и $\tilde{c}$, где вектор $\tilde{x}$ задается формулой (44), вектор $\tilde{u}$ задается формулой (59),

$$\tilde{b} = \begin{bmatrix} b - Ax \\ \upsilon \end{bmatrix}, \tag{75}$$

$$\tilde{c} = \begin{bmatrix} c - A^\top u \\ \omega \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}, \tag{76}$$

υ, $\omega \in \mathbb{R}$ — некоторые параметры.

Найти: матрицу $\begin{bmatrix} H & -h_b \\ -h_c^\top & 0 \end{bmatrix}$ с минимальной евклидовой нормой такую, что векторы $\tilde{x}$ и $\tilde{u}$ являются являются решениями задач линейного программирования $L\left(\begin{bmatrix} H & -h_b \\ -h_c^\top & 0 \end{bmatrix}, \tilde{b}, \tilde{c}\right)$ и $L^*\left(\begin{bmatrix} H & -h_b \\ -h_c^\top & 0 \end{bmatrix}, \tilde{b}, \tilde{c}\right)$, т. е. такую, что

$$\tilde{x} \in X_{opt}\left(\begin{bmatrix} H & -h_b \\ -h_c^\top & 0 \end{bmatrix}, \tilde{b}, \tilde{c}\right), \tag{77}$$

$$\tilde{u} \in U_{opt}\left(\begin{bmatrix} H & -h_b \\ -h_c^\top & 0 \end{bmatrix}, \tilde{b}, \tilde{c}\right). \tag{78}$$

Задачи $C_0(x, u, 1, 1)$, и $M_{\begin{bmatrix} H & -h_b \\ -h_c^\top & 0 \end{bmatrix}}(\tilde{x}, \tilde{u}, \tilde{b}, \tilde{c})$ эквивалентны, поскольку в силу (44), (59), (75) и (76) справедливы взаимно однозначные соответствия

$$x \in X_{opt}(A + H, b + h_b, c + h_c) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} \in X_{opt}\left(\begin{bmatrix} H & -h_b \\ -h_c^\top & 0 \end{bmatrix}, \tilde{b}, \tilde{c}\right),$$

$$u \in U_{opt}(A + H, b + h_b, c + h_c) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} u \\ 1 \end{bmatrix} \in U_{opt}\left(\begin{bmatrix} H & -h_b \\ -h_c^\top & 0 \end{bmatrix}, \tilde{b}, \tilde{c}\right).$$

Заметим, что в силу что в силу (44) $\tilde{x} \neq 0$ при любом x, в том числе при $x = 0$, а в силу (59) $\tilde{u} \neq 0$ при любом u, в том числе при $u = 0$.

В силу указанного замечания и теоремы 3, матрица $W \in \mathbb{R}^{(m+1)\times(n+1}$, обеспечивающая для любых заданных векторов x и u выполнение условий

$$\tilde{x} \in X_{opt}\left(W, \tilde{b}, \tilde{c}\right), \tag{79}$$

$$\tilde{u} \in U_{opt}\left(W, \tilde{b}, \tilde{c}\right). \tag{80}$$

существует тогда и только тогда, когда выполняется соотношение

$$\tilde{c}^\top \tilde{x} = \tilde{b}^\top \tilde{u} = \alpha, \tag{81}$$

которое с учетом (44), (59), (75) и (76) принимает вид системы двух условий

$$c^\top x - u^\top A x + \omega = \alpha \Leftrightarrow \omega - \alpha = u^\top A x - c^\top x, \tag{82}$$

$$u^\top b - u^\top A x + \upsilon = \alpha \Leftrightarrow \upsilon - \alpha = u^\top A x - u^\top b. \tag{83}$$

Указанная система содержит два неопределенных параметра υ и ω, подходящим выбором значений которых можно добиться выполнение условия (81) при любых A, x, u, b и c. Таким образом, в силу теоремы 3, матрица W, обеспечивающая выполнение условий (79)–(80), существует при любых A, x, u, b и c.

Также, в силу теоремы 3, при любых A, x, u, b и c существует и является единственной соответствующая матрица $\hat{W}$ с минимальной евклидовой нормой, которая имеет вид

$$\hat{W} = \begin{bmatrix} S & p \\ q^\top & \theta \end{bmatrix} = \frac{\tilde{b}\tilde{x}^\top}{\tilde{x}^\top \tilde{x}} + \frac{\tilde{u}\tilde{g}^\top}{\tilde{u}^\top \tilde{u}} - \alpha \frac{\tilde{u}\tilde{x}^\top}{\tilde{x}^\top \tilde{x} \cdot \tilde{u}^\top \tilde{u}}, \tag{84}$$

где $S \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $p \in \mathbb{R}^m$, $q \in \mathbb{R}^n$, $\theta \in R$, векторы $\tilde{x}$, $\tilde{u}$ и $\tilde{b}$ определены через A, x, u, b и c по формулам (44), (59) и (75) соответственно, а вектор $\tilde{g} \in \mathbb{R}^{n+1}$ в соответствии с (28) и (76) определен как

$$\tilde{g} = \begin{bmatrix} g \\ \upsilon \end{bmatrix}, \tag{85}$$

где, в свою очередь, вектор $g \in \mathbb{R}^n$ определен через A, x, u и c по формуле (28).

Используя блочные представления (44), (59), (75) и (85) векторов $\tilde{x}$, $\tilde{u}$, $\tilde{b}$ и $\tilde{g}$, и блочное представление (84) матрицы $\hat{W}$, можно в терминах A, x, u, b и c получить представление для параметра θ, а главное, условие $\theta = 0$, необходимое для преобразования матрицы $\hat{W}$ в матрицу $\begin{bmatrix} H & -h_b \\ -h_c^\top & 0 \end{bmatrix}$, гарантирующую выполнение условий (77)–(78) и являющуюся решением задачи $M_{\begin{bmatrix} H & -h_b \\ -h_c^\top & 0 \end{bmatrix}}(\tilde{x}, \tilde{u}, \tilde{b}, \tilde{c})$:

$$\theta = \frac{\upsilon}{x^\top x + 1} + \frac{\omega}{u^\top u + 1} - \frac{\alpha}{(x^\top x + 1) \cdot (u^\top u + 1)} = 0. \tag{86}$$

Как несложно убедиться, система условий (82), (83), (86) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений относительно переменных υ, ω, α, которую можно записать в следующем векторно-матричном виде:

$$Q \cdot \begin{bmatrix} \upsilon \\ \omega \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u^\top A x - u^\top b \\ u^\top A x - c^\top x \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{87}$$

где

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ \frac{1}{x^\top x+1} & \frac{1}{u^\top u+1} & \frac{-1}{(x^\top x+1)(u^\top u+1)} \end{bmatrix}.$$

Решение системы (87) существует и единственно при любых x, u, таких что $\|x\| < +\infty$, $\|u\| < +\infty$. В этом можно убедиться, проанализировав диапазон значений определителя матрицы Q:

$$0 < \det(Q) = \frac{x^\top x + u^\top u + 1}{x^\top x + u^\top u + x^\top x \cdot u^\top u + 1} \leqslant 1.$$

Решая систему (87), получаем значения параметров α, υ, ω, соответствующие формулам (70)–(73).

В силу приведенных выше выкладок существование и единственность решения системы (87) означает существование и единственность матрицы $\begin{bmatrix} \hat{H} & -\hat{h}_b \\ -\hat{h}_c^\top & 0 \end{bmatrix}$, являющейся решением задачи $M_{\begin{bmatrix} H & -h_b \\ -h_c^\top & 0 \end{bmatrix}}(\tilde{x}, \tilde{u}, \tilde{b}, \tilde{c})$, и справедливость характеризующих указанную матрицу формул (69), (74). А поскольку задачи $C_0(x, u, 0, 1)$, и $M_{\begin{bmatrix} H \\ -h_c^\top \end{bmatrix}}(x, \tilde{u}, \tilde{b}, \tilde{c})$ эквивалентны, то утверждения теоремы 7 справедливы, а сама теорема описывает условия разрешимости задачи $C_0(x, u, 1, 1)$ и вид ее решения. $\square$

ПРИМЕР 6.

$$x=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\ u=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\ b=\begin{bmatrix}-1\\1\\-1\end{bmatrix},\ c=\begin{bmatrix}1\\-2\\-1\end{bmatrix},\ A=\begin{pmatrix}1&-2&0\\2&0&-1\\1&-1&1\end{pmatrix},$$

$$\gamma=\frac{c^\top x\cdot u^\top u+u^\top b\cdot x^\top x+u^\top Ax}{x^\top x+u^\top u+1}=-\frac{7}{5},$$

$$\upsilon=c^\top x-\gamma=\frac{2}{5},$$

$$\omega=u^\top b-\gamma=-\frac{3}{5},$$

$$\alpha=\frac{x^\top x+1}{x^\top x+u^\top u+1}\left(c^\top-u^\top A\right)x+\frac{u^\top u+1}{x^\top x+u^\top u+1}u^\top\left(b-Ax\right)=-\frac{3}{5},$$

$$b-Ax=\begin{bmatrix}0\\-1\\-1\end{bmatrix},\ c-A^\top u=\begin{bmatrix}-1\\1\\-2\end{bmatrix},\ g=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}\hat{H}&-\hat{h}_b\\-\hat{h}_c^\top&0\end{bmatrix}=\frac{\begin{bmatrix}b-Ax\\\upsilon\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x^\top&1\end{bmatrix}}{x^\top x+1}+\frac{\begin{bmatrix}u\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}g^\top&\omega\end{bmatrix}}{u^\top u+1}-$$

$$-\alpha\frac{\begin{bmatrix}u\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x^\top&1\end{bmatrix}}{\left(x^\top x+1\right)\left(u^\top u+1\right)}=\begin{pmatrix}-\frac{4}{15}&\frac{2}{5}&0&-\frac{2}{15}\\-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&0&-\frac{1}{3}\\-\frac{3}{5}&\frac{1}{15}&0&-\frac{7}{15}\\-\frac{2}{15}&\frac{8}{15}&0&0\end{pmatrix}.$$

Проводя вычисления, убеждаемся в выполнении условий

$$\left(A+\hat{H}\right)x=b+\hat{h}_b,$$

$$u^\top\left(A+\hat{H}\right)=\begin{bmatrix}\frac{17}{15}&-\frac{38}{15}&1\end{bmatrix}\geqslant\begin{bmatrix}\frac{17}{15}&-\frac{38}{15}&-1\end{bmatrix}=c^\top+\hat{h}_c^\top,$$

$$\left(c+\hat{h}_c\right)^\top x=u^\top\left(b+\hat{h}_b\right)=-\frac{7}{5},$$

$$\left\|\begin{bmatrix}\hat{H}&-\hat{h}_b\\-\hat{h}_c^\top&0\end{bmatrix}\right\|^2=\frac{\|b-Ax\|^2+\upsilon^2}{\|x\|^2+1}+\frac{\|g\|^2+\omega^2}{\|u\|^2+1}-\frac{\alpha^2}{\left(\|x\|^2+1\right)\cdot\left(\|u\|^2+1\right)}=$$

$$=\frac{2+\frac{4}{25}}{3}+\frac{2+\frac{9}{25}}{3}-\frac{\frac{9}{25}}{3\cdot3}=\frac{22}{15}=$$

$$=\left\|\hat{H}\right\|^2+\left\|\hat{h}_b\right\|^2+\left\|\hat{h}_c\right\|^2=\left\|\begin{bmatrix}\hat{H}&-\hat{h}_b\\-\hat{h}_c^\top&0\end{bmatrix}\right\|^2.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Вайда С. *Теория игр и линейное программирование (в кн. Линейные неравенства и смежные вопросы под ред. Г. У. Куна и А. У. Таккера) — сб. переводов под ред. Л. В. Канторовича и В. В. Новожиловой.* — М.: И.–Л., 1959. — 469 с.

2. Ашманов С. А., Тимохов А. В. *Теория оптимизации в задачах и упражнениях.* — М.: Наука, 1991. — 448 с.

3. Еремин И. И., Мазуров В. Д., Астафьев Н. Н. *Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования.* – М.: Наука, 1983. – 336 с.

4. Гантмахер Ф..Р. *Теория матриц.* – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. — 560 с.

5. Воеводин В. В., Кузнецов А. Ю. *Матрицы и вычисления.* — М.: Наука, 1984. — 320 с.

6. Хорн Р., Джонсон Ч. *Матричный анализ.* – М.: Мир, 1989. — 655 с.

7. Ватолин А. А. *Аппроксимация несобственных задач линейного программирования по критерию евклидовой нормы* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1984. Т. 24. №12. С. 1907–1908.

8. Горелик В. А. *Матричная коррекция задачи линейного программирования с несовместной системой ограничений* // Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 2001. Т. 41. №11. С. 1697–1705.

9. Ерохин В. И. *Оптимальная матричная коррекция и регуляризация несовместных линейных моделей* // Дискретн. анализ и исслед. опер., 2002. Сер. 2. Т. 9. № 2. С. 41–77.

10. Горелик В. А., Ерохин В. И. *Оптимальная матричная коррекция несовместных систем линейных алгебраических уравнений по минимуму евклидовой нормы.* М.: ВЦ РАН, 2004. — 193 с.

11. Ерохин В. И. *Матричная коррекция несобственных задач линейного программирования по минимуму евклидовой нормы с произвольными весами и фиксированными элементами* // Тр. XIII Байкальской межд. шк.-сем. «Методы оптимизации и их приложения». — Иркутск: Изд-во ИСЭМ СО РАН, 2005. Т. 1. С. 105–110.

12. Горелик В. А., Ерохин В. И., Печенкин Р. В. *Оптимальная матричная коррекция несовместных систем линейных алгебраических уравнений с блочными матрицами коэффициентов* // Дискретн. анализ и исслед. опер., 2005. Сер. 2. Т. 12. № 2. С. 3–22.

13. Горелик В. А., Ерохин В. И., Печенкин Р. В. *Минимаксная матричная коррекция несовместимых систем линейных алгебраических уравнений с блочными матрицами коэффициентов* // Изв. РАН. ТИСУ, 2006. № 5. С. 52–62.

14. Горелик В. А., Ерохин В. И., Печенкин Р. В. *Численные методы коррекции несобственных задач линейного программирования и структурных систем уравнений.* М.: ВЦ РАН, 2006. — 153 с.

15. Горелик В. А., Золтоева И. А., Печенкин Р. В. *Методы коррекции несовместных линейных систем с разреженными матрицами* // Дискретн. анализ и исслед. опер., 2007, Т. 14. № 2. С. 62–75.

16. Ерохин В. И. *Матричная коррекция двойственной пары несобственных задач линейного программирования* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2007. Т. 47. № 4. С. 587–601.

17. Ерохин В. И., Красников А. С. *Матричная коррекция двойственной пары несобственных задач линейного программирования с блочной структурой* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2008. Т. 48. № 1. С. 80–89.

18. Муравьева О. В. *Возмущение и коррекция систем линейных неравенств* // УБС, 2010. Вып. 28. С. 40–57.

19. Муравьева О. В. *Робастность и коррекция линейных моделей* // Автомат. и телемех., 2011. № 3. С. 98–112.

20. Ле Ньят Зюи. *Метод декомпозиции в задачах коррекции несовместных систем линейных неравенств с матрицами блочной структуры* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2011. Т. 51. № 10. С. 1796–1805.

21. Ле Ньят Зюи. *Коррекция несовместных систем линейных неравенств с матрицами блочной структуры по минимаксному критерию* // Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика, 2011. № 4. С. 18–25.

22. Ерохин В. И., Красников А. С., Хвостов М. Н. *Минимальные по евклидовой норме матричные коррекции задач линейного программирования* // Автомат. и телемех., 2012. № 2. С. 11–24.

23. Баркалова О. С. *Коррекция несобственных задач линейного программирования в канонической форме по минимаксному критерию* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2012. Т. 52. № 12. С. 2178–2189.

24. Горелик В. А., Муравьева О. В. *Методы коррекции несобственных задач и их применение к проблемам оптимизации и классификации.* М.: ВЦ РАН, 2012. — 148 с.

25. Ерохин В. И., Красников А. С., Хвостов М. Н. *О достаточных условиях разрешимости задач линейного программирования при матричной коррекции их ограничений* // Тр. ИММ УрО РАН, 2013. Т. 19. № 2. С. 144–156.

26. Муравьева О. В. *Исследование параметрической устойчивости решений систем линейных неравенств и построение разделяющей гиперплоскости* // Дискретн. анализ и исслед. опер. 2014. Т. 21. № 3. С. 53–63.

27. Ерохин В. И., Красников А. С., Хвостов М. Н. *Квазиньютоновские алгоритмы матричной коррекции несобственных задач линейного программирования с произвольным множеством корректируемых коэффициентов* // Изв. СПбГТИ(ТУ), 2014. № 23(43). С. 87–92.

28. Ерохин В. И. *О некоторых достаточных условиях разрешимости и неразрешимости задач матричной коррекции несобственных задач линейного программирования* // Тр. ИММ УрО РАН, 2015. Т. 21. № 3. С. 110–116.

29. Муравьева О. В. *Радиусы совместности и несовместности систем линейных уравнений и неравенств* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2015. Т. 55. №3. С. 372–384.

30. Хвостов М. Н. *О достаточных условиях разрешимости несобственных задач ЛП 1-го рода после матричной коррекции их допустимой области по минимуму взвешенной евклидовой нормы с учетом структурных ограничений* // Вестн. ВГУ. Сер.: Физика. Математика, 2015. № 2. С. 150–167.

31. Ерохин В. И., Волков В. В. *Обобщения регуляризованного метода наименьших квадратов А.Н. Тихонова* // Семинар «CNSA & NDO». Избранные доклады. 16 октября 2014 г. (`http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/pdf/2014/Erochin_Volkov.pdf`)

32. Тихонов А. Н. *О приближенных системах линейных алгебраических уравнений* // Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 1980. Т. 20. № 6. С. 1373–1383.

33. Тихонов А. Н. *О методах автоматизации обработки наблюдений* // Вестн. АН СССР, 1983. № 1. С. 14–25.

34. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. *Методы решения некорректных задач.* М.: Наука, 1986. — 288 с.

35. Амирханова Г. А., Голиков А. И., Евтушенко Ю. Г. *Об одной обратной задаче линейного программирования* // Тр. ИММ УрО РАН, Т. 21. № 3. С. 13–19.

36. Красников А. С. *Матричная коррекция противоречивых данных в линейных оптимизационных моделях: Дисс. ... канд. физ.-мат. наук: 05.13.17.* — Борисоглебск, 2010.