

# СИНТЕЗ ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНОГО ФИЛЬТРА\*

В. Н. Малозёмов  
malv@math.spbu.ru

Г. Ш. Тамасян  
g.tamasyan@spbu.ru

10 декабря 2015 г.

1°. Обозначим через  $\mathcal{H}_n^n$  семейство дробно-рациональных функций вида

$$H(x, u) = \frac{x_0 u^n + x_1 u^{n-1} + \dots + x_n}{u^n + x_{n+1} u^{n-1} + \dots + x_{2n}}.$$

При фиксированном векторе коэффициентов  $x = (x_0, x_1, \dots, x_{2n})$  функция  $H(x, u)$  определена на расширенной прямой  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ , причём

$$H(x, \infty) = x_0. \quad (1)$$

Рассмотрим экстремальную задачу фильтрового типа:

$$\text{минимизировать величину } \varphi(x) = \sup_{|u| \geq \frac{1}{\tau}} H(x, u)$$

при ограничениях

$$|H(x, u) - 1| \leq \Delta, \quad u \in [-1, 1]; \quad (2)$$

$$H(x, u) \geq 0, \quad |u| \geq \frac{1}{\tau}. \quad (3)$$

Здесь  $\tau$  и  $\Delta$  — параметры. Они берутся из интервала  $(0, 1)$ .

В работе [1] установлено, что при любом натуральном  $n$  задача (1)–(3) имеет ровно два решения, каждое из которых характеризуется наличием полного  $(2n + 2)$ -точечного альтернанса. Оказывается, этой информацией достаточно, чтобы найти оба решения. Мы покажем, как это делается при  $n \in 1 : 4$ .

---

\*Семинар по конструктивному негладкому анализу и недифференцируемой оптимизации «CNSA & NDO»: <http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/>

2°. Сначала напомним, что означает наличие полного альтернанса у дроби  $H \in \mathcal{H}_n^n$ . Обозначим

$$\mu_n = \inf \varphi(x),$$

где инфимум берётся по всем  $x$ , таким, что дробь  $H(x, u)$  удовлетворяет ограничениям (2), (3). Полный альтернанс состоит из  $2n + 2$  точек

$$u_1 < u_2 < \dots < u_{2n+2}, \quad (4)$$

расположенных на расширенной прямой  $\overline{\mathbb{R}}$ . Каждая точка альтернанса  $u_k$  принадлежит одному из трёх множеств:

- $|u_k| \geq \frac{1}{\tau}$  и  $H(x, u_k) = \mu_n$ ;
- $u_k \in [-1, 1]$  и  $|H(x, u_k) - 1| = \Delta$ ;
- $|u_k| \geq \frac{1}{\tau}$  и  $H(x, u_k) = 0$ .

Точка альтернанса  $u_k$  называется (+)-точкой альтернанса, если

$$H(x, u_k) = \mu_n \quad \text{или} \quad H(x, u_k) - 1 = \Delta,$$

и (-)-точкой альтернанса, если

$$H(x, u_k) = 0 \quad \text{или} \quad H(x, u_k) - 1 = -\Delta.$$

В полном альтернансе (4) (+)-точки и (-)-точки альтернанса чередуются.

Мы будем строить дроби, обладающие полным альтернансом. На рис. 1 штрихами выделено множество, содержащее контролируруемую часть графиков таких дробей.

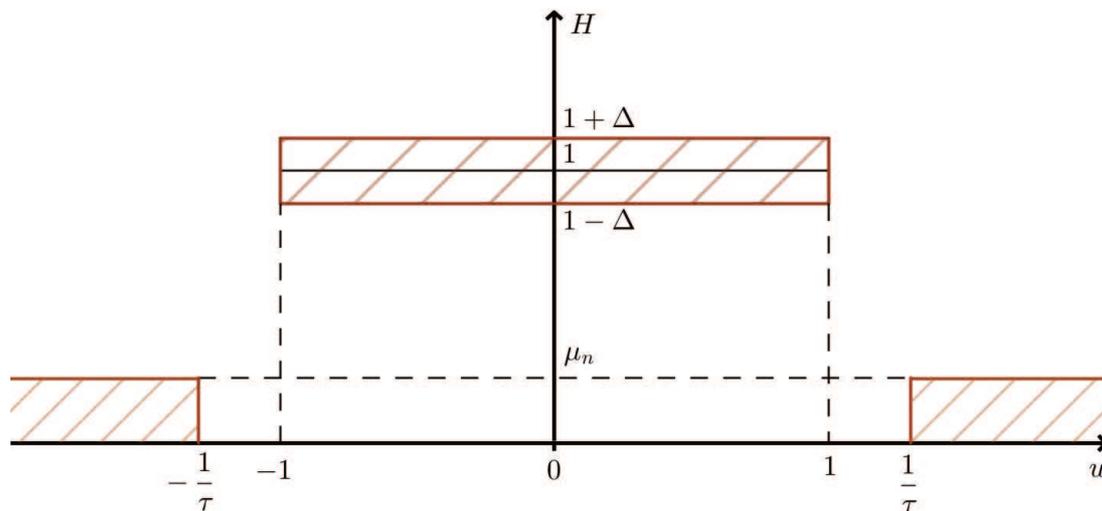


Рис. 1. Множество, содержащее контролируруемую часть графиков двух оптимальных дробей

3°. Теория даёт дополнительную информацию о расположении точек альтернанса. А именно,

- (a) при фиксированном  $x$  обе оптимальные дроби имеют одинаковые точки альтернанса;
- (b) точки альтернанса расположены на  $\overline{\mathbb{R}}$  симметрично относительно начала координат;
- (c) отрезок  $[-1, 1]$  содержит ровно  $n + 1$  точек альтернанса, включая концы отрезка;
- (d) остальные  $n + 1$  точек альтернанса по модулю не меньше  $\frac{1}{\tau}$ , причём граничные точки  $\frac{1}{\tau}$  и  $-\frac{1}{\tau}$  являются точками альтернанса.

Свойство (b) позволяет искать только неотрицательные точки альтернанса. Согласно свойствам (b) и (d) при чётном  $n$  точкой альтернанса будет  $u = \infty$ .

4°. Обратимся к случаю  $n = 1$ . График дроби из семейства  $\mathcal{H}_1^1$ , обладающей полным альтернансом, изображён на рис. 2.

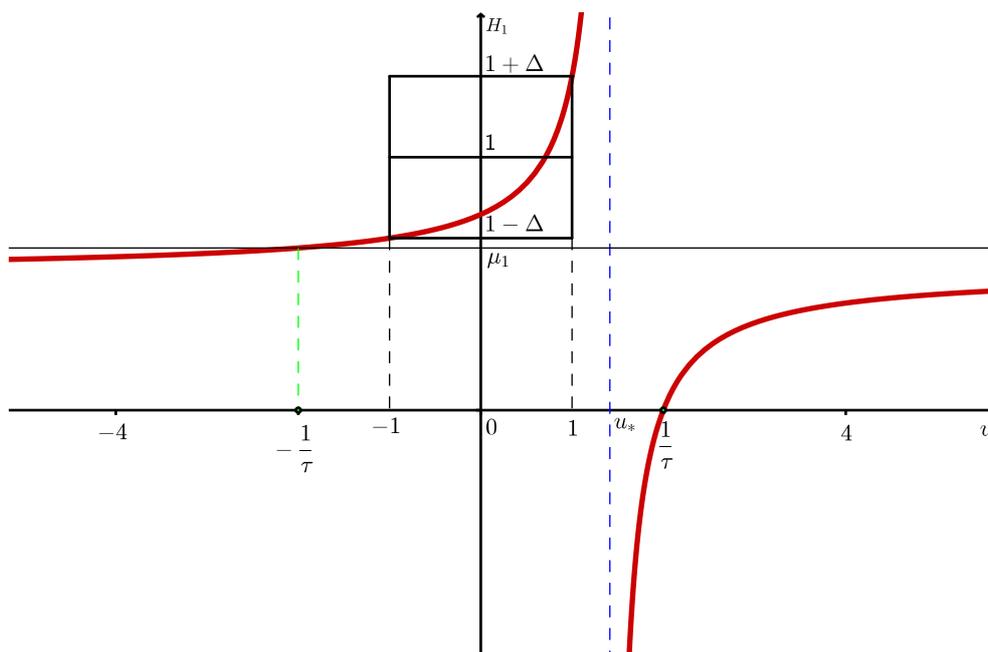


Рис. 2. График дроби из семейства  $\mathcal{H}_1^1$ , обладающей полным альтернансом

Точками альтернанса будут  $u_1 = -\frac{1}{\tau}$ ,  $u_2 = -1$ ,  $u_3 = 1$ ,  $u_4 = \frac{1}{\tau}$ .  
Альтернансные условия для дроби

$$H_1(u) := H(x, u) = \frac{x_0 u + x_1}{u + x_2}$$

выглядят так:

$$H_1(-\frac{1}{\tau}) = \mu_1, \quad H_1(-1) = 1 - \Delta, \quad H_1(1) = 1 + \Delta, \quad H_1(\frac{1}{\tau}) = 0.$$

Из последних трёх условий находим коэффициенты дроби

$$x_0 = \frac{\tau(1 - \Delta^2)}{\tau + \Delta}, \quad x_1 = -\frac{1 - \Delta^2}{\tau + \Delta}, \quad x_2 = -\frac{1 + \tau\Delta}{\tau + \Delta}.$$

Первое условие приводит к формуле для наименьшего уклонения от нуля

$$\mu_1 = H_1(-\frac{1}{\tau}) = \frac{2\tau(1 - \Delta^2)}{2\tau + \Delta(1 + \tau^2)}.$$

Дробь  $H_1(u)$  имеет полюс

$$u_* = \frac{1 + \tau\Delta}{\tau + \Delta}.$$

Нетрудно проверить, что  $1 < u_* < \frac{1}{\tau}$ .

Второе решение задачи (1)–(3) при  $n = 1$  определяется формулой (см. рис. 3)

$$\hat{H}_1(u) = H_1(-u).$$

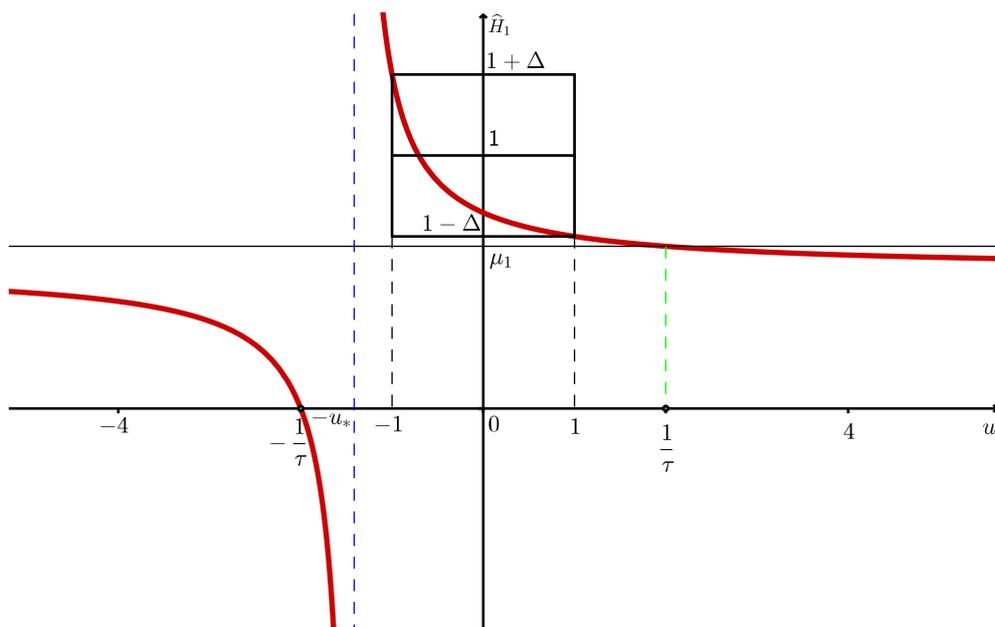


Рис. 3. График второй дроби из семейства  $\mathcal{H}_1^1$ , обладающей полным альтернансом

5°. Переходим к случаю  $n = 2$ . На рис. 4 представлен график дроби из семейства  $\mathcal{H}_2^2$ , обладающей полным альтернансом.

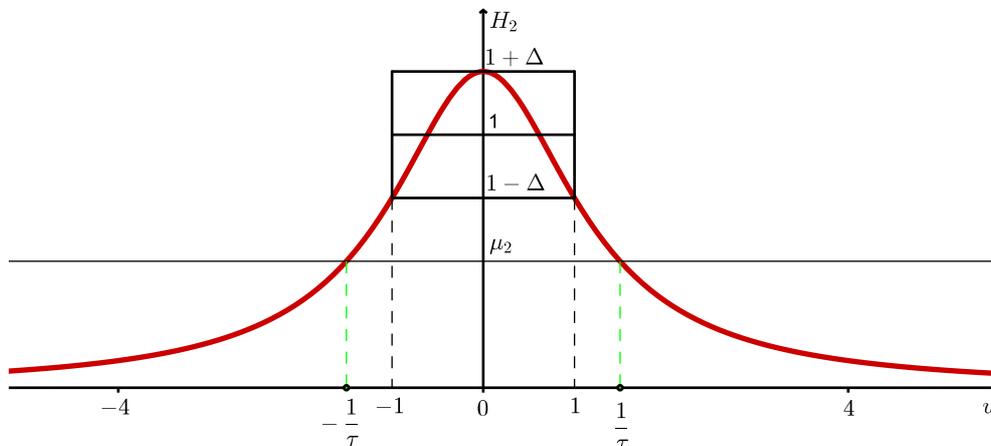


Рис. 4. График дроби из семейства  $\mathcal{H}_2^2$ , обладающей полным альтернансом

Точками альтернанса являются

$$u_1 = -\frac{1}{\tau}, \quad u_2 = -1, \quad u_3 = 0, \quad u_4 = 1, \quad u_5 = \frac{1}{\tau}, \quad u_6 = \infty.$$

Оптимальную дробь будем искать в виде

$$H_2(u) = \frac{x_2}{u^2 + x_4}.$$

Запишем альтернансные условия

$$H_2(0) = 1 + \Delta, \quad H_2(1) = 1 - \Delta. \quad (5)$$

Остальные альтернансные условия выполняются автоматически (включая  $H_2(\infty) = 0$ ). Решая систему (5), получаем

$$x_2 = \frac{1 - \Delta^2}{2\Delta}, \quad x_4 = \frac{1 - \Delta}{2\Delta}.$$

При этом

$$\mu_2 := H_2\left(\frac{1}{\tau}\right) = \frac{\tau^2(1 - \Delta^2)}{2\Delta + \tau^2(1 - \Delta)}. \quad (6)$$

Второе решение  $\widehat{H}_2(u)$  имеет те же точки альтернанса, но другую альтернансную картину (см. рис. 5).

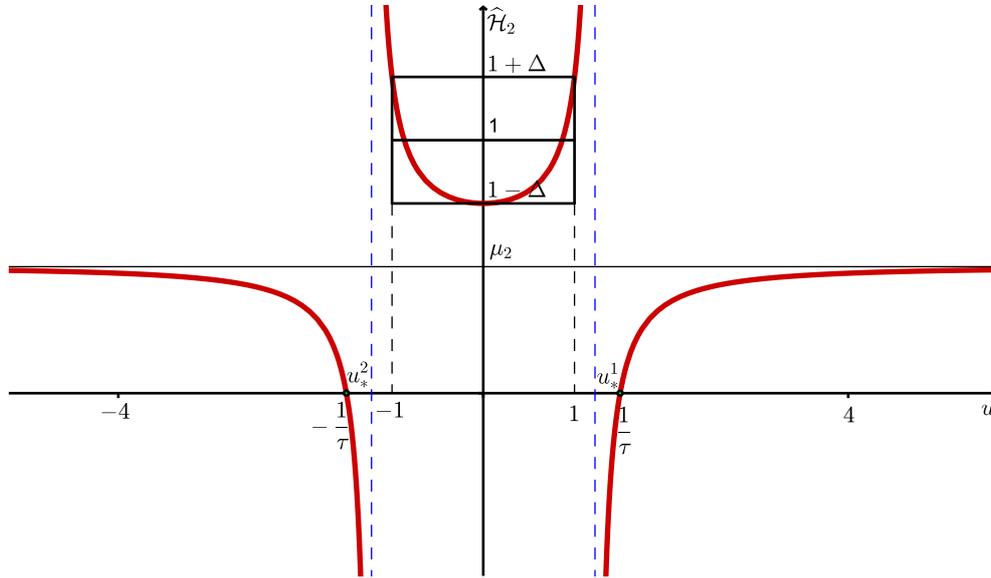


Рис. 5. График второй дроби из семейства  $\mathcal{H}_2^2$ , обладающей полным альтернансом

Дробь  $\widehat{H}_2(u)$  будем искать в виде

$$\widehat{H}_2(u) = \frac{x_0 u^2 + x_2}{u^2 + x_4}.$$

Запишем альтернансные условия

$$\widehat{H}_2(0) = 1 - \Delta, \quad \widehat{H}_2(1) = 1 + \Delta, \quad \widehat{H}_2\left(\frac{1}{\tau}\right) = 0. \quad (7)$$

Остальные альтернансные условия выполняются автоматически (включая  $\widehat{H}_2(\infty) = \mu_2$ ).

Решая систему (7), получаем

$$x_0 = \frac{\tau^2(1 - \Delta^2)}{2\Delta + \tau^2(1 - \Delta)}, \quad x_2 = -\frac{1 - \Delta^2}{2\Delta + \tau^2(1 - \Delta)}, \quad x_4 = -\frac{1 + \Delta}{2\Delta + \tau^2(1 - \Delta)}.$$

При этом для  $\mu_2 = \widehat{H}_2(\infty)$  справедлива формула (6).

Дробь  $\widehat{H}_2(u)$  имеет два полюса  $u_*^1$  и  $u_*^2$ , определяемых условием

$$(u_*^k)^2 = \frac{1 + \Delta}{2\Delta + \tau^2(1 - \Delta)}, \quad k = 1, 2.$$

Нетрудно проверить, что  $1 < (u_*^k)^2 < \frac{1}{\tau^2}$  при  $k = 1, 2$ .

6°. Возьмём  $n = 3$ . График дроби из семейства  $\mathcal{H}_3^3$ , обладающей полным альтернансом, изображён на рис. 6.

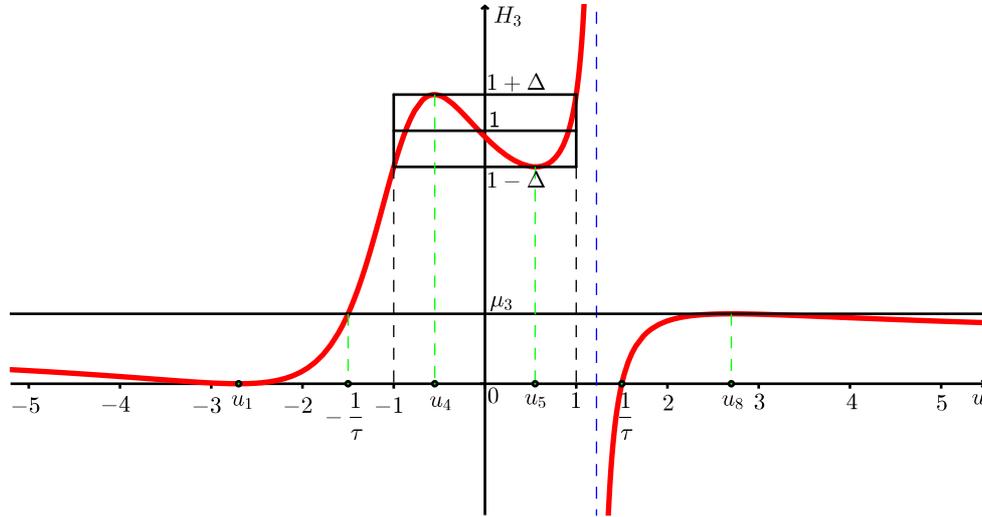


Рис. 6. График дроби из семейства  $\mathcal{H}_3^3$ , обладающей полным альтернансом

Среди восьми точек альтернанса  $u_1 < u_2 < \dots < u_8$  четыре известны — это

$$u_2 = -\frac{1}{\tau}, \quad u_3 = -1, \quad u_6 = 1, \quad u_7 = \frac{1}{\tau}.$$

Четыре точки альтернанса  $u_1, u_4, u_5, u_8$  неизвестны. По теории

$$u_1 = -u_8, \quad u_4 = -u_5,$$

причём  $u_8 > \frac{1}{\tau}$  и  $u_5 \in (0, 1)$ .

Альтернансные условия для дроби

$$H_3(u) = H(x, u) = \frac{x_0 u^3 + x_1 u^2 + x_2 u + x_3}{u^3 + x_4 u^2 + x_5 u + x_6}$$

выглядят так:

$$\begin{aligned} H_3(u_1) &= 0, & H_3(u_8) &= \mu_3, & H_3(-\frac{1}{\tau}) &= \mu_3, & H_3(\frac{1}{\tau}) &= 0, \\ H_3(-1) &= 1 - \Delta, & H_3(1) &= 1 + \Delta, & H_3(u_4) &= 1 + \Delta, & H_3(u_5) &= 1 - \Delta, \\ H'_3(u_k) &= 0, & k &\in \{1, 4, 5, 8\}. \end{aligned} \quad (8)$$

Имеем систему нелинейных уравнений 12-го порядка относительно 12 неизвестных: коэффициентов дроби  $x_0, x_1, \dots, x_6$ , точек альтернанса  $u_1, u_4, u_5, u_8$  и величины наименьшего отклонения от нуля  $\mu_3$ .

Преобразуем эту систему. Для этого обозначим

$$H_3(u) = \frac{P_3(u)}{Q_3(u)}.$$

У полинома  $Q_3(u)$  старший коэффициент равен единице. Напомним, что

$$H'_u(u) = \frac{P'_3(u)Q_3(u) - P_3(u)Q'_3(u)}{Q_3^2(u)} = \frac{P'_3(u) - H_3(u)Q'_3(u)}{Q_3(u)}.$$

Переставив уравнения в (8), придём к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} P'_3(u_1) = 0, & P_3(u_1) = 0, & P_3(\frac{1}{\tau}) = 0, \\ P'_3(u_4) = (1 + \Delta)Q'_3(u_4), & P'_3(u_5) = (1 - \Delta)Q'_3(u_5), \\ P_3(-1) = (1 - \Delta)Q_3(-1), & P_3(1) = (1 + \Delta)Q_3(1), \end{cases} \quad (9)$$

$$P_3(-\frac{1}{\tau}) = \mu_3 Q_3(-\frac{1}{\tau}), \quad (10)$$

$$\begin{cases} P_3(u_4) = (1 + \Delta)Q_3(u_4), & P_3(u_5) = (1 - \Delta)Q_3(u_5), \\ P_3(u_8) = \mu_3 Q_3(u_8), & P'_3(u_8) = \mu_3 Q'_3(u_8). \end{cases} \quad (11)$$

Нелинейную систему (9)–(11) будем решать численным методом. Для этого нужно иметь хорошее начальное приближение. Построение хорошего начального приближения всегда представляет основную трудность. В данном случае поступим так:

- (а) возьмём приближённые значения для точек альтернанса  $u_5$  и  $u_8$ ; положим  $u_1 = -u_8$ ,  $u_4 = -u_5$ ;
- (б) найдём решение линейной системы уравнений (9), неизвестными в которой являются коэффициенты дроби  $x_0, x_1, \dots, x_6$ ;
- (в) вычислим  $\mu_3$  по формуле (10),  $\mu_3 = H_3(-\frac{1}{\tau})$ .

Построив начальное приближение, решение системы (9)–(11) получим с помощью процедуры `fsolve` из математического пакета MatLab.

Для наглядности распишем систему линейных уравнений (9) в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} 3u_1^2 & 2u_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_1^3 & u_1^2 & u_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\tau^3} & \frac{1}{\tau^2} & \frac{1}{\tau} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3u_4^2 & 2u_4 & 1 & 0 & -2(1 + \Delta)u_4 & -(1 + \Delta) & 0 \\ 3u_5^2 & 2u_5 & 1 & 0 & -2(1 - \Delta)u_5 & -(1 - \Delta) & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -(1 - \Delta) & (1 - \Delta) & -(1 - \Delta) \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -(1 + \Delta) & -(1 + \Delta) & -(1 + \Delta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3u_4^2(1 + \Delta) \\ 3u_5^2(1 - \Delta) \\ -(1 - \Delta) \\ 1 + \Delta \end{pmatrix}.$$

**ПРИМЕР 1.** Пусть  $\tau = \frac{2}{3}$ ,  $\Delta = 0.14$ . Возьмём

$$u_5 = \frac{1}{2}, \quad u_8 = \frac{7}{2}, \quad u_1 = -u_8, \quad u_4 = -u_5.$$

Решая систему (9), получаем

$$\begin{aligned} x_0 = 0.1911, \quad x_1 = 1.0511, \quad x_2 = 0.3344, \quad x_3 = -3.5117, \\ x_4 = 1.1404, \quad x_5 = -0.1126, \quad x_6 = -3.7251. \end{aligned}$$

По формуле (10),  $\mu_3 = 0.5253$ .

Построено начальное приближение. Теперь можно подключить процедуру `fsolve`. Результаты вычислений:

$$\begin{aligned} x_0 = 0.1638, \quad x_1 = 0.6400, \quad x_2 = -0.1313, \quad x_3 = -1.7957, \\ x_4 = 0.6553, \quad x_5 = -0.8018, \quad x_6 = -1.8388, \\ \mu_3 = 0.2806, \\ u_5 = 0.5549, \quad u_8 = 2.7034. \end{aligned}$$

При фиксированном  $\tau$  параметр  $\Delta$  мы выбрали так, чтобы выполнялось приближённое равенство  $\mu_3 \approx 2\Delta$ .

Вторая дробь из семейства  $\mathcal{H}_3^3$ , обладающая полным альтернансом, имеет вид (см. рис. 7)

$$\widehat{H}_3(u) = H_3(-u).$$

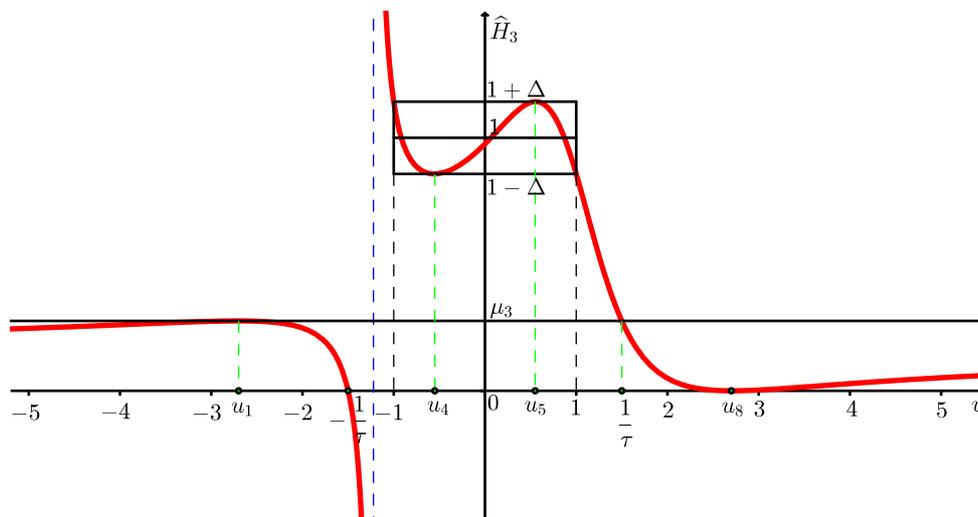


Рис. 7. График второй дроби из семейства  $\mathcal{H}_3^3$ , обладающей полным альтернансом

7°. Наконец, рассмотрим случай  $n = 4$ . На рис. 8 представлен график дроби  $H_4(u)$  из семейства  $\mathcal{H}_4^4$ , обладающей полным 10-точечным альтернансом.

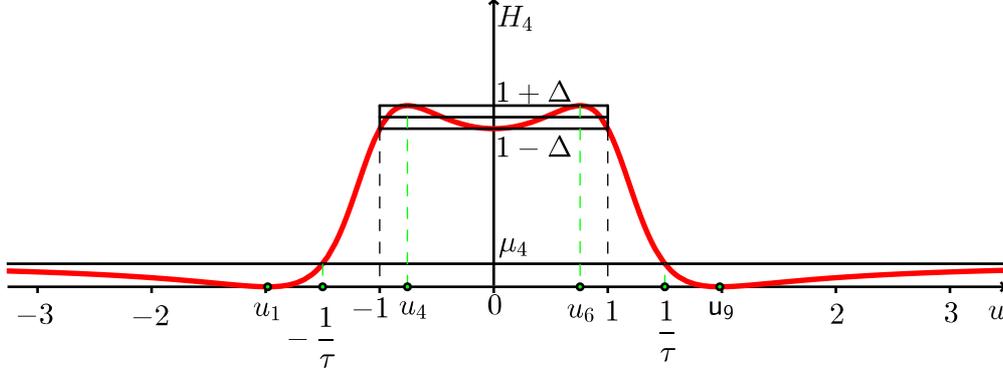


Рис. 8. График дроби из семейства  $\mathcal{H}_4^4$ , обладающей полным альтернансом

Дробь  $H_4(u)$  будем искать в виде

$$H_4(u) = \frac{P_4(u)}{Q_4(u)} = \frac{\mu_4 u^4 + x_2 u^2 + x_4}{u^4 + x_6 u^2 + \frac{x_4}{1-\Delta}}.$$

Как отмечалось, при чётном  $n$  бесконечность является точкой альтернанса. Мы учли это, положив  $x_0 = \mu_4$ . Точкой альтернанса будет  $u = 0$  (см. рис. 8), поэтому  $x_8 = \frac{x_4}{1-\Delta}$ . Известны ещё 4 точки альтернанса

$$u_2 = -\frac{1}{\tau}, \quad u_3 = -1, \quad u_7 = 1, \quad u_8 = \frac{1}{\tau}.$$

Запишем альтернансные условия:

$$\begin{aligned} H_4(1) &= 1 - \Delta, & H_4\left(\frac{1}{\tau}\right) &= \mu_4, & H_4(u_6) &= 1 + \Delta, \\ H_4(u_9) &= 0, & H_4'(u_6) &= 0, & H_4'(u_9) &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Это нелинейная система уравнений 6-го порядка относительно 6 неизвестных: коэффициентов дроби  $x_2, x_4, x_6$ , точек альтернанса  $u_6 \in (0, 1)$ ,  $u_9 > \frac{1}{\tau}$  и величины наименьшего отклонения от нуля  $\mu_4 \in (0, 1 - \Delta)$ .

Переставив уравнения в (12), придём к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} P_4'(u_9) = 0, & P_4(u_9) = 0, \\ P_4'(u_6) = (1 + \Delta)Q_4'(u_6), & P_4(1) = (1 - \Delta)Q_4(1), \end{cases} \quad (13)$$

$$P_4(u_6) = (1 + \Delta)Q_4(u_6), \quad P_4\left(\frac{1}{\tau}\right) = \mu_4 Q_4\left(\frac{1}{\tau}\right). \quad (14)$$

В матричной форме подсистема (13) выглядит так:

$$\begin{pmatrix} 2u_9^2 & 1 & 0 & 0 \\ u_9^4 & u_9^2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -(1-\Delta) \\ 2u_6^2 & 1 & 0 & -(1+\Delta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_4 \\ x_2 \\ x_4 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1-\Delta \\ 2(1+\Delta)u_6^2 \end{pmatrix}.$$

При фиксированных  $u_6$  и  $u_9$  эта система линейна относительно  $\mu_4, x_2, x_4, x_6$ . Её решение можно указать в явной форме:

$$\begin{aligned} x_2 &= -2u_9^2 \mu_4, & x_4 &= u_9^4 \mu_4, & x_6 &= \frac{1-2u_9^2}{1-\Delta} \mu_4 - 1, \\ \mu_4 &= \frac{(1-\Delta^2)(2u_6^2-1)}{4\Delta u_9^2 + 2(1-\Delta)u_6^2 - (1+\Delta)}. \end{aligned} \quad (15)$$

Дальнейшие действия очевидны. Возьмём приближенные значения для точек альтернанса  $u_6$  и  $u_9$ . По формулам (15) найдём начальное приближение для решения нелинейной системы (13), (14). С помощью процедуры `fsolve` решим эту систему.

**ПРИМЕР 2.** Пусть  $n = 4$ ,  $\tau = \frac{2}{3}$ ,  $\Delta = 0.068$ . Возьмём

$$u_6 = 0.8, \quad u_9 = 1.5.$$

По формулам (15) получаем

$$\begin{aligned} x_2 &= -1.7018, & x_4 &= 1.9145, & x_6 &= -2.4202, \\ \mu_4 &= 0.3782. \end{aligned}$$

Построено начальное приближение. Для решения системы (13), (14) подключим процедуру `fsolve`. Результаты вычислений:

$$\begin{aligned} x_2 &= -1.0678, & x_4 &= 2.0967, & x_6 &= -2.000, \\ \mu_4 &= 0.1360, \\ u_6 &= 0.7569, & u_9 &= 1.9817. \end{aligned}$$

При фиксированном  $\tau$  параметр  $\Delta$  мы выбрали так, чтобы выполнялось приближённое равенство  $\mu_4 \approx 2\Delta$ .

8°. График второй дроби  $\hat{H}_4(u)$  из семейства  $\mathcal{H}_4^4$ , обладающей полным альтернансом, изображён на рис. 9.

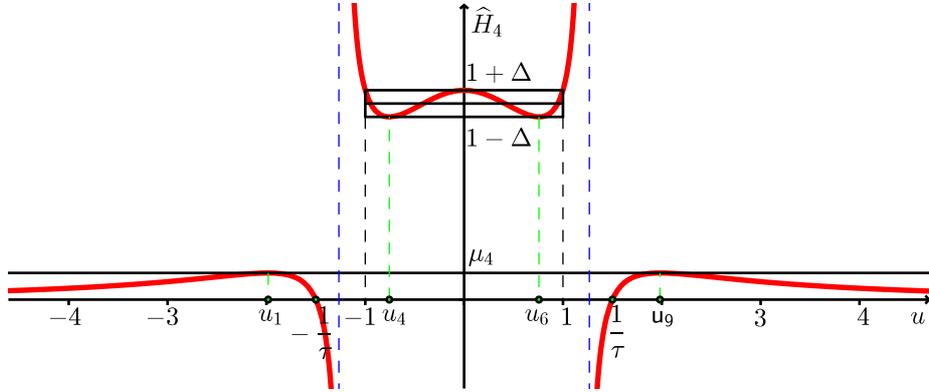


Рис. 9. График второй дроби из семейства  $\mathcal{H}_4^4$ , обладающей полным альтернансом

Точки альтернанса остаются те же, включая  $u_5 = 0$  и  $u_{10} = \infty$ .

Дробь  $\hat{H}_4(u)$  будем искать в виде

$$\hat{H}_4(u) = \frac{\hat{P}_4(u)}{\hat{Q}_4(u)} = \frac{x_2 u^2 + x_4}{u^4 + x_6 u^2 + \frac{x_4}{1+\Delta}}.$$

Запишем альтернансные условия:

$$\begin{aligned} \hat{H}_4(1) &= 1 + \Delta, & \hat{H}_4\left(\frac{1}{\tau}\right) &= 0, & \hat{H}_4(u_6) &= 1 - \Delta, \\ \hat{H}_4(u_9) &= \mu_4, & \hat{H}'_4(u_6) &= 0, & \hat{H}'_4(u_9) &= 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Переставив уравнения в (16), придём к следующей системе уравнений:

$$\hat{P}_4(1) = (1 + \Delta)\hat{Q}_4(1), \quad \hat{P}_4\left(\frac{1}{\tau}\right) = 0, \quad \hat{P}'_4(u_6) = (1 - \Delta)\hat{Q}'_4(u_6), \quad (17)$$

$$\hat{P}'_4(u_9) = \mu_4 \hat{Q}'_4(u_9), \quad (18)$$

$$\hat{P}_4(u_6) = (1 - \Delta)\hat{Q}_4(u_6), \quad \hat{P}_4(u_9) = \mu_4 \hat{Q}_4(u_9). \quad (19)$$

Распишем подсистему (17) подробно

$$\frac{x_2}{1 + \Delta} - x_6 = 1, \quad \frac{x_2}{\tau^2} + x_4 = 0, \quad \frac{x_2}{1 - \Delta} - x_6 = 2u_6^2.$$

Отсюда следует, что

$$x_2 = \frac{(1 - \Delta^2)(2u_6^2 - 1)}{2\Delta}, \quad x_4 = -\frac{x_2}{\tau^2}, \quad x_6 = \frac{x_2}{1 + \Delta} - 1. \quad (20)$$

Согласно (18)

$$\mu_4 = \frac{(1 - \Delta^2)(2u_6^2 - 1)}{4\Delta u_9^2 + 2(1 - \Delta)u_6^2 - (1 + \Delta)}. \quad (21)$$

Выражение для  $\mu_4$  совпадает с тем, что появилось ранее в (15).

Теперь можно записать алгоритм для построения дроби  $\widehat{H}_4(u)$ . Возьмём приближённые значения для точек альтернанса  $u_6$  и  $u_9$ . По формулам (20) и (21) найдём начальное приближение для решения нелинейной системы уравнений (17)–(19). С помощью процедуры `fsolve` решим эту систему.

**ПРИМЕР 3.** Пусть  $n = 4$ ,  $\tau = \frac{2}{3}$ ,  $\Delta = 0.068$ . Возьмём

$$u_6 = 0.8, \quad u_9 = 1.5.$$

По формулам (20), (21) получим

$$x_2 = 2.0493, \quad x_4 = -4.6109, \quad x_6 = 0.9188, \\ \mu_4 = 0.3782.$$

Построено начальное приближение. Для решения системы (17)–(19) подключаем процедуру `fsolve`. Результаты вычислений:

$$x_2 = 1.0678, \quad x_4 = -2.0967, \quad x_6 = -0.0002, \\ \mu_4 = 0.1360, \\ u_6 = 0.7569, \quad u_9 = 1.9817.$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Гхашим М., Малозёмов В. Н. *Эквивалентность в задачах наилучшей дробно-рациональной аппроксимации* // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. 1992. Вып. 2. С. 3–8.