# ЭТЮД НА ТЕМУ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ ФИЛЬТРОВОЙ ЗАДАЧИ ($n = 3$)*

В. Н. Малозёмов — malv@math.spbu.ru

Г. Ш. Тамасян — g.tamasyan@spbu.ru

12 марта 2015 г.

**1°.** Для алгебраического полинома степени не выше $n$ будем использовать обозначение

$$P_n(x,t) = x_0 t^n + x_1 t^{n-1} + \ldots + x_n.$$

Рассмотрим фильтровую задачу:

$$\begin{gathered} \textit{максимизировать } P_n(x,b) \textit{ при ограничениях} \\ -M \leqslant P_n(x,t) \leqslant M \textit{ при } \ t \in [-1,1], \\ P_n(x,a) = A. \end{gathered} \tag{1}$$

Здесь $b < -1$, $a > 1$, $M > 0$ и $A$ — параметры. Вектор коэффициентов $x$ полинома $P_n(x,t)$, удовлетворяющего ограничениям задачи (1), назовём *планом*. Множество планов обозначим $\Omega$.

В докладе [1] изучались альтернансные свойства решения задачи (1) в зависимости от параметра $A$. Более детальному анализу этой задачи в частных случаях $n = 1$ и $n = 2$ посвящён доклад [2]. Теперь мы сосредоточимся на построении явного решения параметрической задачи (1) при $n = 3$.

**2°.** Нам потребуется полином Чебышёва третьей степени

$$T_3(t) = 4t^3 - 3t.$$

Положим $A_3 = MT_3(a)$.

Из результатов работы [1] следует, что множество планов $\Omega$ задачи (1) при $n = 3$ непусто тогда и только тогда, когда $A \in [-A_3, A_3]$. При $A = \pm A_3$ единственным решением является полином $\pm MT_3(t)$. Кроме того, справедливо следующее утверждение.

*Семинар по конструктивному негладкому анализу и недифференцируемой оптимизации «CNSA & NDO»: `http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/`

**ТЕОРЕМА 1.** *При всех $A \in (-A_3, A_3)$ решение задачи (1) существует и единственно. Для того чтобы план $x^*$ был оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы полином $P_3(x^*, t)$ обладал на отрезке $[-1, 1]$ трёхточечным альтернансом, точнее, чтобы нашлись точки $-1 \leqslant t_1 < t_2 < t_3 \leqslant 1$, в которых*

$$P_3(x^*, t_1) = M, \quad P_3(x^*, t_2) = -M, \quad P_3(x^*, t_3) = M. \tag{2}$$

Эта теорема позволяет найти явный вид экстремального полинома $P_3(x^*, t)$. Соответствующая процедура состоит из двух этапов. На первом этапе мы построим однопараметрическое семейство полиномов третьей степени, обладающих на отрезке $[-1, 1]$ трёхточечным альтернансом. На втором этапе выделим из этого семейства полином, удовлетворяющий условию $P_3(x, a) = A$. Такой полином и будет решением задачи (1).

**3°**. Рассмотрим семейство полиномов третьей степени вида

$$P_3(t) = x_0 t^3 - \tfrac{3}{2} x_0 (c + d) t^2 + 3 x_0 c d t + h, \quad c \neq d. \tag{3}$$

В этом случае

$$P_3'(t) = 3x_0(t - c)(t - d),$$
$$P_3''(c) = 3x_0(c - d), \quad P_3''(d) = 3x_0(d - c).$$

В дальнейшем будем считать, что $d$ — точка строго локального минимума, так что выполнено одно из двух условий

$$c < d \quad \text{и} \quad x_0 > 0 \qquad \text{или} \qquad c > d \quad \text{и} \quad x_0 < 0. \tag{4}$$

В семействе (3) выделим однопараметрическое семейство полиномов, обладающих на отрезке $[-1, 1]$ трёхточечным альтернансом вида (2). В качестве параметра возьмём $d$.

Отметим, что в точках альтернанса, принадлежащих интервалу $(-1, 1)$, производная полинома $P_3'(t)$ должна обращаться в нуль. Это значит, что внутренними точками альтернанса могут быть только $t = c$ и $t = d$. Для получения трёхточечного альтернанса следует привлекать концы отрезка $[-1, 1]$.

Рассмотрим четыре случая взаимного расположения точек $c$ и $d$ относительно отрезка $[-1, 1]$:

$$1)\ -1 \leqslant c < d < 1, \qquad 2)\ c < -1 < d < 1,$$
$$3)\ -1 < d < 1 < c, \qquad 4)\ -1 < d < c \leqslant 1.$$

Из геометрических соображений ясно, что **в первом случае** точками альтернанса будут $t_1 = c$, $t_2 = d$, $t_3 = 1$ (см. рис. 1).

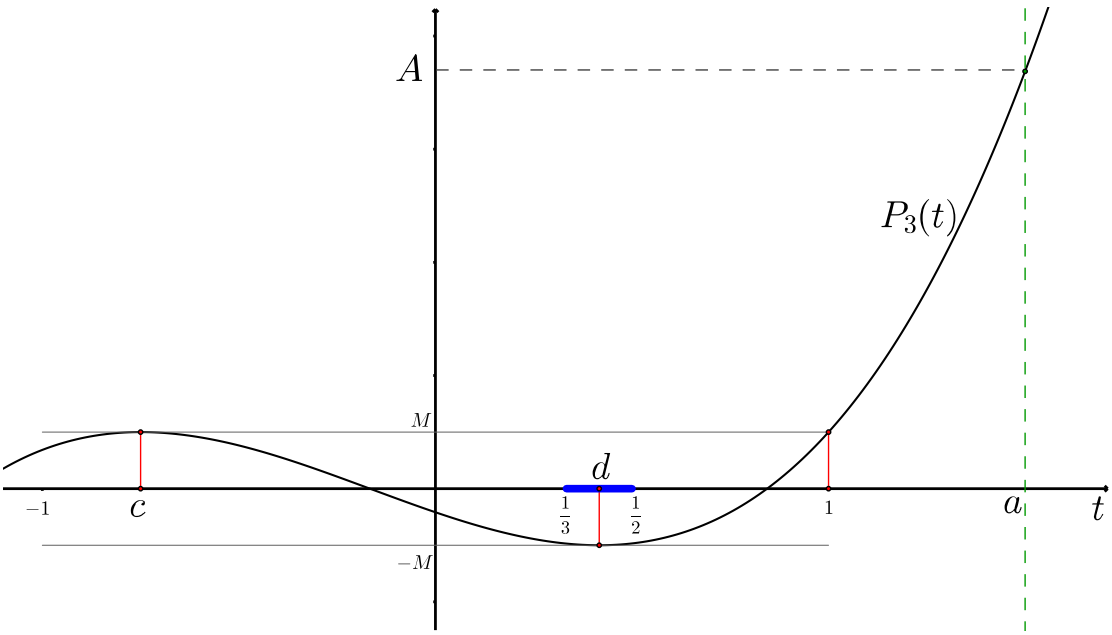


Рис. 1. Расположение точек альтернанса при $-1 \leqslant c < d < 1$.

Альтернансные условия принимают вид

$$P_3(c) = M, \quad P_3(d) = -M, \quad P_3(1) = M,$$
$$P_3(-1) \geqslant -M.$$

В подробной записи:

$$-\tfrac{1}{2}x_0c^3 + \tfrac{3}{2}x_0c^2d + h = M, \tag{5}$$
$$-\tfrac{1}{2}x_0d^3 + \tfrac{3}{2}x_0cd^2 + h = -M, \tag{6}$$
$$x_0 - \tfrac{3}{2}x_0(c+d) + 3x_0cd + h = M, \tag{7}$$
$$-x_0 - \tfrac{3}{2}x_0(c+d) - 3x_0cd + h \geqslant -M. \tag{8}$$

Вычитая (5) из (7), получаем

$$\tfrac{1}{2}x_0(c-1)^2(c-3d+2) = 0.$$

В силу (4)

$$c = 3d - 2. \tag{9}$$

Так как $c \geqslant -1$, то $d \geqslant \frac{1}{3}$.

Подставим (9) в (5) и (6). Придём к системе двух линейных уравнений относительно $x_0$ и $h$:

$$\begin{aligned}(9d^2-12d+4)x_0+h &= M,\\ (4d^3-3d^2)x_0+h &= -M.\end{aligned}$$

Данная система имеет единственное решение

$$x_0=\frac{M}{2(1-d)^3},\qquad h=\frac{M}{2(1-d)^3}(1-2d)(d^2+2d-2). \tag{10}$$

Теперь распишем неравенство (8):

$$-\frac{Md}{(1-d)^3}(d^2+6d-3)\geqslant -M$$

или

$$\frac{M(2d-1)(d+1)^2}{(1-d)^3}\leqslant 0.$$

Отсюда следует, что $d\leqslant\frac{1}{2}$.

Подставим (9) и (10) в (3). После несложных преобразований получим

$$P_3(x(d),t)=\frac{M}{2(1-d)^3}(t-2d+1)\left(t^2+2(1-2d)t+d^2+2d-2\right). \tag{11}$$

Такой вид имеют полиномы с тремя точками альтернанса в первом случае при условии, что $d\in[\frac{1}{3},\frac{1}{2}]$. В частности,

$$\begin{aligned}P_3(x(\tfrac{1}{2}),t)&=MT_3(t),\\ P_3(x(\tfrac{1}{3}),t)&=\tfrac{M}{16}(3t+1)(9t^2+6t-11).\end{aligned} \tag{12}$$

**4°.** Обозначим $A(d)=P_3(x(d),a)$ и пусть $\hat{A}_3=A(\frac{1}{3})$.

**ЛЕММА 1.** *Функция $A(d)$ строго возрастает на $[\frac{1}{3},\frac{1}{2}]$ от значения $\hat{A}_3$ до $A_3$.*

Доказательство. Подставив $t=a$ в (11), придём к формуле для $A(d)$. Вычислим производную $A'(d)$ и разложим её на множители. Получим

$$A'(d)=\frac{3M(a-1)(a-d)(a+2-3d)}{2(1-d)^4}. \tag{13}$$

Так как $a>1$ и $d\in[\frac{1}{3},\frac{1}{2}]$, то $A'(d)>0$. Отсюда очевидным образом следует заключение леммы. □

**5°. Во втором случае** точками альтернанса будут $t_1 = -1$, $t_2 = d$, $t_3 = 1$ (см. рис. 2).

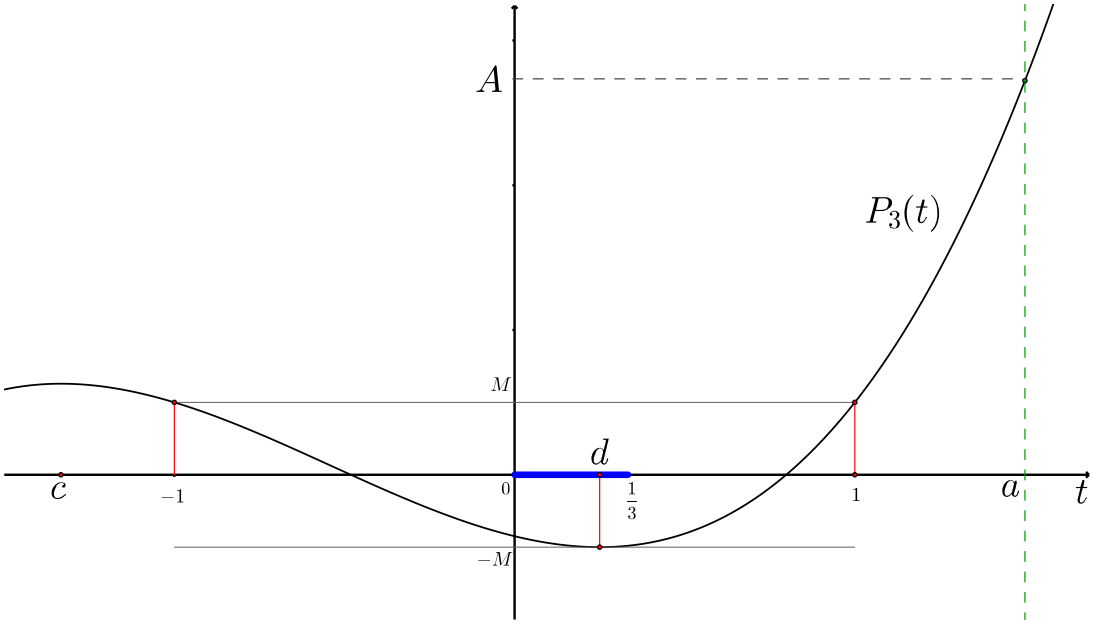


Рис. 2. Расположение точек альтернанса при $c < -1 < d < 1$.

Запишем альтернансные условия (2) для полинома $P_3(t)$ вида (3):

$$-x_0 - \tfrac{3}{2}x_0(c+d) - 3x_0cd + h = M, \tag{14}$$

$$-\tfrac{1}{2}x_0d^3 + \tfrac{3}{2}x_0cd^2 + h = -M, \tag{15}$$

$$x_0 - \tfrac{3}{2}x_0(c+d) + 3x_0cd + h = M. \tag{16}$$

Вычтем (14) из (16). Получим $2x_0(3cd+1) = 0$. В силу (4)

$$c = -\frac{1}{3d}. \tag{17}$$

Так как $c \in (-\infty, -1)$, то $d \in (0, \frac{1}{3})$.

Подставив (17) в (14) и (15), придём к системе линейных уравнений относительно $x_0$ и $h$:

$$\begin{aligned} \tfrac{1-3d^2}{2d}x_0 + h &= M, \\ -\tfrac{d(d^2+1)}{2}x_0 + h &= -M. \end{aligned}$$

Данная система имеет единственное решение

$$x_0 = \frac{4Md}{(d^2-1)^2}, \qquad h = \frac{M(d^4+4d^2-1)}{(d^2-1)^2}. \tag{18}$$

Подставим (17) и (18) в (3). После несложных преобразований получим

$$P_3(x(d),t) = \frac{M}{(d^2-1)^2}\left(4dt^3 + 2(1-3d^2)t^2 - 4dt + d^4 + 4d^2 - 1\right). \qquad (19)$$

Такой вид имеет полином с тремя точками альтернанса во втором случае при условии, что $d \in (0, \frac{1}{3})$.

**6°.** Как и раньше, положим $A(d) = P_3(x(d), a)$.

**ЛЕММА 2.** *Функция $A(d)$ строго возрастает на $(0, \frac{1}{3})$, при этом*

$$\lim_{d\to\frac{1}{3}-0} A(d) = \hat{A}_3. \qquad (20)$$

Доказательство. Отметим, что производная $A'(d)$ допускает представление

$$A'(d) = \frac{4M(a^2-1)(a-d)(3d^2+1)}{(1-d^2)^3}. \qquad (21)$$

Так как $a > 1$ и $d \in (0, \frac{1}{3})$, то $A'(d) > 0$. Это гарантирует строгое возрастание функции $A(d)$.

Предельное соотношение (20) проверяется непосредственно. □

Из лемм 1 и 2, в частности, следует, что функция $A(d)$ непрерывна на промежутке $(0, \frac{1}{2}]$ и строго возрастает на нём. Более того, в силу (13) и (21)

$$\lim_{d\to\frac{1}{3}+0} A'(d) = \lim_{d\to\frac{1}{3}-0} A'(d) = \tfrac{81}{32}M(a^2-1)(3a-1).$$

Это значит, что функция $A(d)$ непрерывно дифференцируема на $(0, \frac{1}{2}]$.

**7°.** **Третий случай** аналогичен второму. Точками альтернанса будут те же точки $t_1 = -1$, $t_2 = d$, $t_3 = 1$ (см. рис. 3).

Формулы (17), (19) и (21) сохраняются. Разница лишь в том, что в третьем случае $c \in (1, +\infty)$, поэтому $d \in (-\frac{1}{3}, 0)$.

Согласно (21) производная $A'(d)$ при $d \in (-\frac{1}{3}, 0)$ положительна. Значит, функция $A(d)$ строго возрастает на этом интервале.

Обратим внимание на то, что формула (19) справедлива при $d \in (-\frac{1}{3}, 0) \cup \cup (0, \frac{1}{3})$, но содержательна и при $d = 0$. А именно,

$$P_3(x(0),t) = M(2t^2-1) = MT_2(t),$$

где $T_2(t)$ — полином Чебышёва второй степени. При этом полином $MT_2(t)$ имеет три точки альтернанса $t_1 = -1$, $t_2 = 0$, $t_3 = 1$ и $A(0) = MT_2(a) =: A_2$. Формула (21) тоже определена при $d = 0$, причём

$$A'(0) = 4Ma(a^2-1).$$

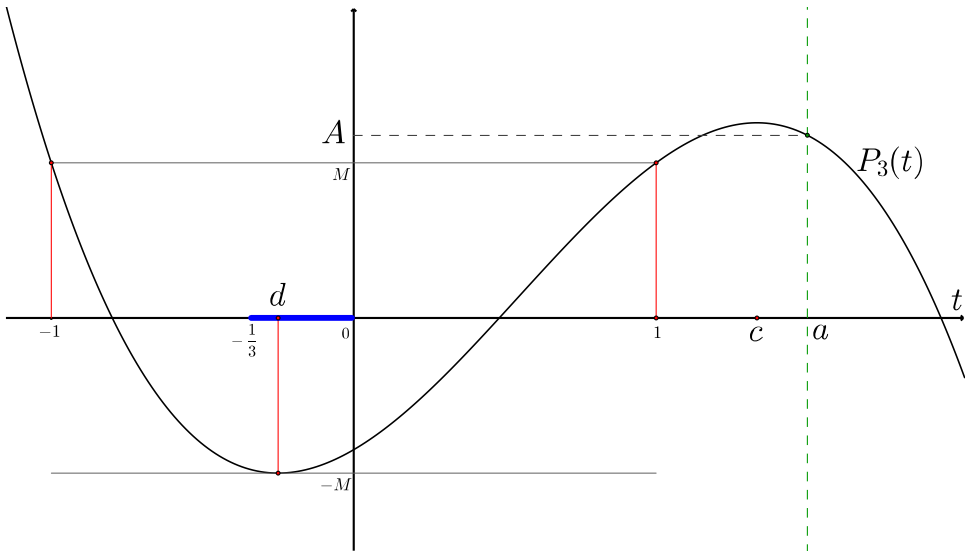


Рис. 3. Расположение точек альтернанса при $-1 < d < 1 < c$.

Приходим к следующим выводам:

- *полиномы вида* (19) *обладают трёхточечным альтернансом при всех* $d$, *удовлетворяющих условию* $|d| < \frac{1}{3}$;
- *функция* $A(d) = P_3(x(d), a)$ *непрерывно дифференцируема и строго возрастает на промежутке* $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$.

**8°. В четвёртом случае** точками альтернанса будут $t_1 = -1$, $t_2 = d$, $t_3 = c$ (см. рис. 4).

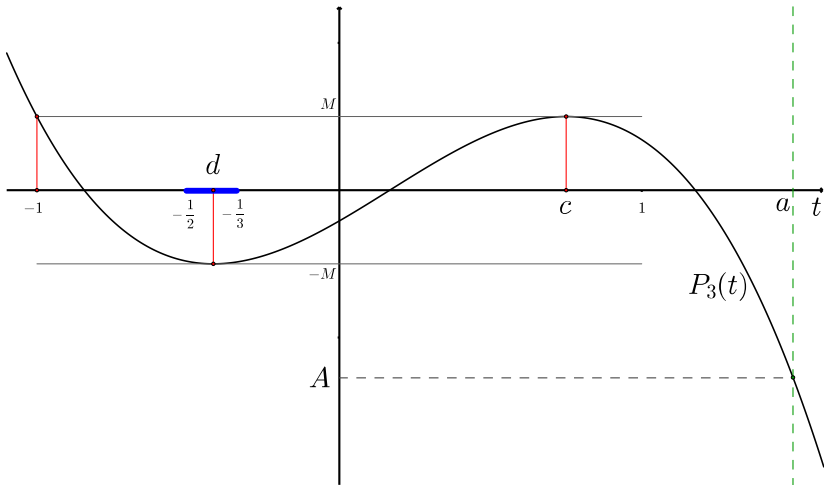


Рис. 4. Расположение точек альтернанса при $-1 < d < c \leqslant 1$.

Альтернансные условия принимают вид

$$P_3(-1) = M, \quad \begin{array}{rcl} P_3(d) & = & -M, \\ P_3(1) & \geqslant & -M. \end{array} \quad P_3(c) = M,$$

В подробной записи:

$$\begin{aligned} -x_0 - \tfrac{3}{2}x_0(c+d) - 3x_0cd + h &= M, && (22)\\ -\tfrac{1}{2}x_0d^3 + \tfrac{3}{2}x_0cd^2 + h &= -M, && (23)\\ -\tfrac{1}{2}x_0c^3 + \tfrac{3}{2}x_0c^2d + h &= M, && (24)\\ x_0 - \tfrac{3}{2}x_0(c+d) + 3x_0cd + h &\geqslant -M. && (25) \end{aligned}$$

Вычитая (22) из (24), получаем

$$-\tfrac{1}{2}x_0(c+1)^2(c-3d-2) = 0.$$

В силу (4)

$$c = 3d + 2. \tag{26}$$

Так как $c \leqslant 1$, то $d \leqslant -\frac{1}{3}$.

Подставим (26) в (22) и (23). Получим

$$x_0 = -\frac{M}{2(1+d)^3}, \qquad h = \frac{M}{2(1+d)^3}(1+2d)(d^2-2d-2). \tag{27}$$

Теперь распишем неравенство (25):

$$\frac{Md}{(1+d)^3}(d^2-6d-3) \geqslant -M$$

или

$$\frac{M(2d+1)(d-1)^2}{(1+d)^3} \geqslant 0.$$

Так как $d \in (-1,1)$, то необходимо $d \geqslant -\frac{1}{2}$.

Подставим (26) и (27) в (3). После несложных преобразований получим

$$P_3(x(d),t) = -\frac{M}{2(1+d)^3}(t-2d-1)\left(t^2-2(1+2d)t+d^2-2d-2\right). \tag{28}$$

Такой вид имеют полиномы с тремя точками альтернанса в четвёртом случае при условии, что $d \in [-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}]$. В частности,

$$\begin{aligned} P_3(x(-\tfrac{1}{2}),t) &= -MT_3(t), \\ P_3(x(-\tfrac{1}{3}),t) &= -\tfrac{M}{16}(3t-1)(9t^2-6t-11). \end{aligned} \tag{29}$$

**ЛЕММА 3.** *Функция* $A(d) = P_3(x(d), a)$ *строго возрастает на* $[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}]$ *от значения* $-A_3$ *до* $-\check{A}_3 = P_3(x(-\frac{1}{3}), a)$.

Доказательство. Отметим, что производная $A'(d)$ допускает представление

$$A'(d) = \frac{3M(a+1)(a-d)(a-2-3d)}{2(1+d)^4}. \tag{30}$$

Так как $a > 1$ и $d \in [-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}]$, то $A'(d) > 0$. Отсюда очевидным образом следует заключение леммы. □

Отметим, что согласно (19), (28) и (21), (30)

$$\lim_{d \to -\frac{1}{3}+0} A(d) = \lim_{d \to -\frac{1}{3}-0} A(d) = -\tfrac{M}{16}(3a-1)(9a^2-6a-11) = -\check{A}_3,$$

$$\lim_{d \to -\frac{1}{3}+0} A'(d) = \lim_{d \to -\frac{1}{3}-0} A'(d) = \tfrac{81}{32}(a^2-1)(3a+1).$$

Учитывая указанные ранее свойства $A(d)$ заключаем, что эта функция непрерывно дифференцируема на отрезке $[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}]$, а её производная $A'(d)$ положительна при всех $d \in [-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}]$. Более того, существует обратная функция $d = d(A)$, непрерывно дифференцируемая на отрезке $[-A_3, A_3]$ с производной $d'(A)$, положительной при всех $A \in [-A_3, A_3]$.

На рис. 5 представлен график функции $A(d)$ при $a = \frac{3}{2}$ и $M = \frac{1}{2}$.

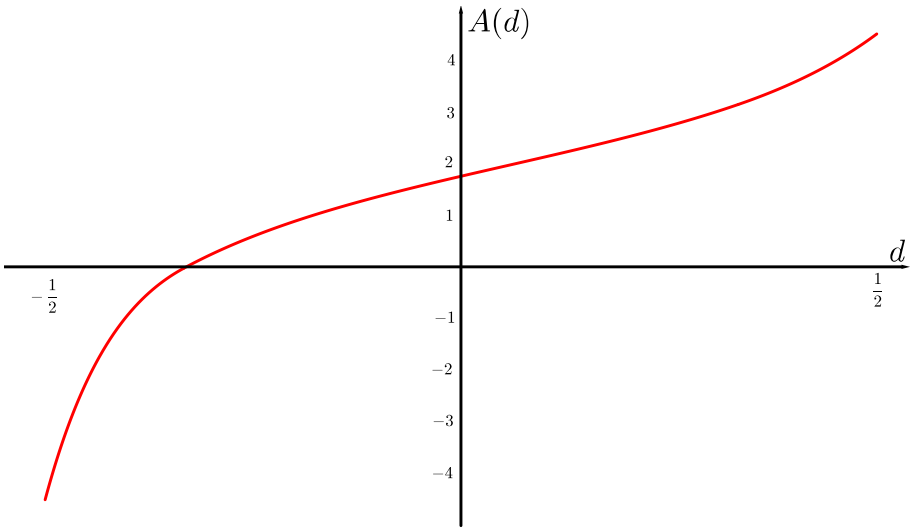


Рис. 5. График функции $A(d)$ при $a = \frac{3}{2}$, $M = \frac{1}{2}$.

**9**°. Подведём предварительные итоги.

**ТЕОРЕМА 2.** *Семейство полиномов $P_3(x(d),t)$, обладающих на отрезке $[-1,1]$ трёхточечным альтернансом, допускает представление*

$$P_3(x(d),t) =$$
$$= \begin{cases} \frac{M}{2(1-d)^3}(t-2d+1)\,(t^2+2(1-2d)t+d^2+2d-2) & \text{при } d\in[\frac{1}{3},\frac{1}{2}], \\ \frac{M}{(d^2-1)^2}\,(4dt^3+2(1-3d^2)t^2-4dt+d^4+4d^2-1) & \text{при } |d|<\frac{1}{3}, \\ -\frac{M}{2(d+1)^3}(t-2d-1)\,(t^2-2(1+2d)t+d^2-2d-2) & \text{при } d\in[-\frac{1}{2},-\frac{1}{3}]. \end{cases} \tag{31}$$

*При этом функция $A(d)=P_3(x(d),a)$ непрерывно дифференцируема и строго возрастает на отрезке $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ от значения $-A_3$ до $A_3$. Её производная имеет вид*

$$A'(d) = \begin{cases} \dfrac{3M(a-1)(a-d)(a+2-3d)}{2(1-d)^4} & \text{при } d\in[\frac{1}{3},\frac{1}{2}], \\ \dfrac{4M(a^2-1)(a-d)(3d^2+1)}{(1-d^2)^3} & \text{при } |d|<\frac{1}{3}, \\ \dfrac{3M(a+1)(a-d)(a-2-3d)}{2(d+1)^4} & \text{при } d\in[-\frac{1}{2},-\frac{1}{3}]. \end{cases} \tag{32}$$

**10**°. Вернёмся к исходной задаче (1). По теореме 1 её решением будет полином $P_3^*(t)=P_3(x(d^*),t)$ из семейства (31), который удовлетворяет условию $P_3^*(a)=A$ или, что равносильно, $A(d^*)=A$. При $A=\pm A_3$ и $A=A_2$ такой полином нам известен — это $\pm MT_3$ и $MT_2$. Формулы (12) и (29) определяют решение при $A=\hat{A}_3$ и $A=-\check{A}_3$.

Возьмём $A\in[-A_3,A_3]$, отличное от указанных выше значений, и рассмотрим уравнение $A(d)=A$. В силу отмеченных в теореме 2 свойств функции $A(d)$ это уравнение имеет единственное решение $d^*\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$. Полином $P_3^*(t)=P_3(x(d^*),t)$ и будет решением экстремальной задачи (1).

**11**°. Обратимся к целевой функции. Обозначим $B(d)=P_3(x(d),b)$. Явные формулы для $B(d)$ и $B'(d)$ мы получим, подставив $t=b$ в (31) и заменив $a$ на $b$ в (32). Функция $B(d)$ останется непрерывно дифференцируемой, но её производная $B'(d)$ будет отрицательной при всех $d\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$.

Как отмечалось в п. 8°, функция $A(d)$ имеет обратную функцию $d=d(A)$, которая непрерывно дифференцируема и её производная $d'(A)$ положительна при всех $A\in[-A_3,A_3]$. Запишем целевую функцию как функцию параметра $A$:

$$B=B(d(A)).$$

Из предыдущего следует, что эта функция непрерывно дифференцируема и строго убывает на отрезке $[-A_3, A_3]$.

На рис. 6 представлен график функции $B(d(A))$ при $a = \frac{3}{2}$, $M = \frac{1}{2}$ и $b = -3$.

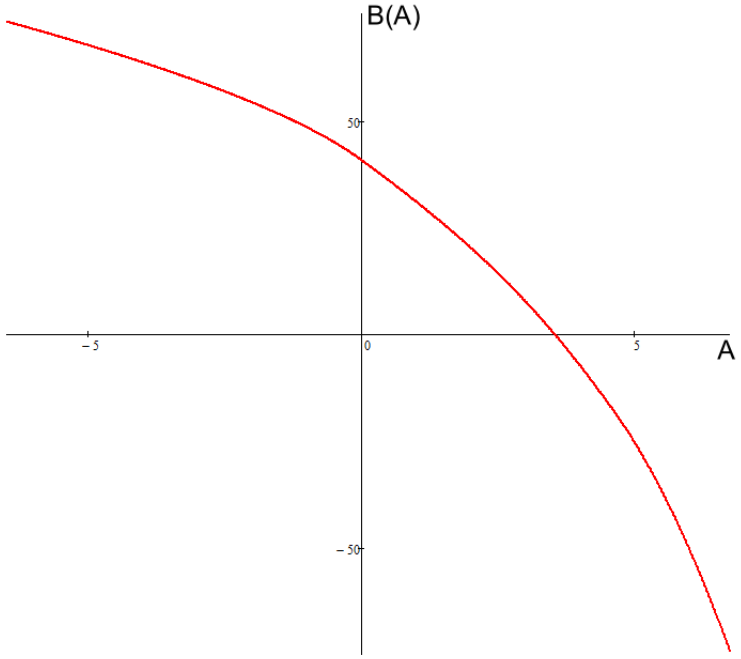


Рис. 6. График функции $B(A)$ при $a = \frac{3}{2}$, $M = \frac{1}{2}$, $b = -3$.

**12°**. Анализ алгоритма решения задачи (1), описанного в п. 10°, показывает, что оптимальный план $x^*$ не зависит от значения параметра $b$.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Агафонова И. В., Малозёмов В. Н. *Об одной экстремальной задаче, связанной с полиномами Золотарёва* // Семинар «CNSA & NDO». Избранные доклады. 13 ноября 2014 г. (`http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/reps14.shtml#1113`)

2. Тамасян Г. Ш. *Этюд на тему полиномиальной фильтровой задачи* ($n = 1, 2$) // Семинар «CNSA & NDO». Избранные доклады. 27 ноября 2014 г. (`http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/reps14.shtml#1127`)