ТОЧНЫЕ ШТРАФНЫЕ ФУНКЦИИ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ВКЛЮЧЕНИЯ*

А. В. Фоминых

alexfomster@mail.ru

22 октября 2015 г.

Аннотация. В докладе рассматривается дифференциальное включение с заданными многозначным отображением и начальной точкой. Для этого дифференциального включения требуется найти решение, доставляющее минимум интегральному функционалу. Для исходной задачи условной оптимизации построена штрафная функция. При некоторых дополнительных предположениях она оказывается точной штрафной, что в случае непрерывной дифференцируемости опорной функции многозначного отображения по фазовым переменным позволяет получить принцип максимума В. И. Благодатских для дифференциальных включений.

1°. Постановка задачи. Рассмотрим дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(x,t) \tag{1}$$

с заданным начальным условием

$$x(0) = x_0. \tag{2}$$

В формуле (1) $F(x,t)$ — заданное непрерывное многозначное отображение при $t \in [0,T]$, x — n-мерная непрерывная вектор-функция фазовых координат с кусочно-непрерывной на $[0,T]$ производной, $T > 0$ — заданный момент времени. Будем полагать, что каждому моменту времени $t \in [0,T]$ и каждой фазовой точке $x \in \mathbb{R}^n$ функция $F(x,t)$ ставит в соответствие некоторый выпуклый компакт из $\mathbb{R}^n$.

Требуется найти такую вектор-функцию $x^* \in C_n[0,T]$, являющуюся решением включения (1) и удовлетворяющую начальному условию (2), которая доставляет минимум функционалу

$$I(x) = \int_0^T f_0(x,t)dt, \tag{3}$$

*Семинар по конструктивному негладкому анализу и недифференцируемой оптимизации «CNSA & NDO»: `http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/`

где f_0 — заданная вещественная скалярная функция, непрерывная по обоим аргументам и непрерывно дифференцируемая по x.

2°. Эквивалентная постановка задачи. Далее для краткости будем иногда писать F вместо $F(x,t)$. Поскольку для всех $t \in [0,T]$ и для всех $x \in \mathbb{R}^n$ многозначное отображение $F(x,t)$ представляет собой выпуклое замкнутое и ограниченное множество, включение (1) можно переписать иначе [1]

$$(\dot{x}, \psi) \leqslant c(F, \psi) \quad \forall \psi \in S, \quad \forall t \in [0,T],$$

где $c(F,\psi)$ — опорная функция многозначного отображения F, S — единичная сфера в пространстве $\mathbb{R}^n$. Обозначим $z(t) = \dot{x}(t)$, $z \in P_n[0,T]$, тогда с учётом равенства (2) будет

$$x(t) = x_0 + \int_0^t z(\tau) d\tau.$$

Введём функции

$$\ell(\psi, z, t) = (z, \psi) - c(F, \psi), \tag{4}$$

$$h(z,t) = \max_{\psi \in S} \max\{0, \ell(\psi, z, t)\} \tag{5}$$

и составим функционал

$$\varphi(z) = \sqrt{\int_0^T h^2(z,t) dt}. \tag{6}$$

Введём множество

$$\Omega = \{z \in P_n[0,T] \mid \varphi(z) = 0\}.$$

Нетрудно убедиться, что для функционала (6) справедливы соотношения

$$\begin{cases} \varphi(z) = 0 \text{ (или } z \in \Omega\text{), если } (\dot{x}, \psi) \leqslant c(F,\psi) \quad \forall \psi \in S, \quad \forall t \in [0,T], \\ \varphi(z) > 0 \text{ (или } z \notin \Omega\text{) в противном случае.} \end{cases}$$

Запишем функционал

$$\Phi_\lambda(z) = I(z) + \lambda \varphi(z), \tag{7}$$

в котором

$$I(z) = I(x_0 + \int_0^t z(\tau) d\tau),$$

а λ — достаточно большое положительное число. Видно, что функционал (7) является штрафной функцией. Ниже будут приведены условия, при которых эта функция является точной штрафной.

3°. Дифференциальные свойства функционалов φ и I. Далее считаем, что опорная функция $c(F,\psi)$ многозначного отображения $F(x,t)$ непрерывно дифференцируема по фазовой переменной x. Тогда для любых x, $y \in C_n[0,T]$ и любого $t \in [0,T]$ будет

$$c\big(F(x+\alpha y,t),\psi\big) - c\big(F(x,t),\psi\big) =$$

$$= \alpha\Big(\frac{\partial c(F,\psi)}{\partial x}, y\Big) + o(\alpha,t),\ \ \frac{o(\alpha,t)}{\alpha} \to 0 \text{ при } \alpha \downarrow 0. \tag{8}$$

Пусть $v \in P_n[0,T]$. Положим

$$z_\alpha(t) = z(t) + \alpha v(t),$$

$$y(t) = \int_0^t v(\tau)d\tau.$$

Найдём вариацию функционала ℓ. Вычислим

$$l(\psi, z_\alpha, t) = l(\psi, z, t) + \alpha H_1(\psi, z, v, t) + o(\alpha, t), \quad \frac{o(\alpha,t)}{\alpha} \to 0 \text{ при } \alpha \downarrow 0,$$

где

$$H_1(\psi, z, v, t) = (\psi, v(t)) - \Big(\int_0^t v(\tau)d\tau, \frac{\partial c(F,\psi)}{\partial x}\Big).$$

Здесь использованы свойство аддитивности опорной функции по первому аргументу [2] и равенство (8).

Далее получим вариацию функционала h. С учётом (4) и (5) найдём

$$h(z_\alpha, t) = h(z,t) + \alpha H(z,v,t) + o(\alpha,t), \quad \frac{o(\alpha,t)}{\alpha} \to 0 \text{ при } \alpha \downarrow 0,$$

где

$$H(z,v,t) = \max_{\psi \in \overline{R}} H_1(\psi,z,v,t), \quad \max_{\psi \in S} \ell(\psi,z,t) > 0,$$

$$H(z,v,t) = 0, \quad \max_{\psi \in S} \ell(\psi,z,t) < 0,$$

$$H(z,v,t) = \max_{\psi \in \overline{R}} \max\{0, H_1(\psi,z,v,t)\}, \quad \max_{\psi \in S} \ell(\psi,z,t) = 0,$$

$$\overline{R}(t) = \Big\{\overline{\psi}(t) \in S \mid \max\{0, \ell(\overline{\psi},z,t)\} = \max_{\psi(t) \in S} \max\{0, \ell(\psi,z,t)\}\Big\}.$$

В силу структуры функционала (4) нетрудно заметить, что в случае $\ell(\psi,z,t) > 0$ максимум выражения

$$\max\{0, \ell(\psi,z,t)\} = \ell(\psi,z,t)$$

достигается на единственном элементе $\psi^*(t) \in S$, поэтому в этом случае множество $\overline{R}(t)$ состоит из одного элемента $\psi^*(t)$.

Используя выражение (6), можно показать, что имеет место разложение

$$\varphi(z_\alpha) = \varphi(z) + \alpha \int_0^T \frac{h(z,t)}{\varphi(z)} H(z,v,t)dt + o(\alpha), \quad \frac{o(\alpha)}{\alpha} \to 0 \text{ при } \alpha \downarrow 0. \qquad (9)$$

Введём множества

$$T_+(z) = \{t \in [0,T] \mid \ell(\psi,z,t) > 0\},$$

$$T_-(z) = \{t \in [0,T] \mid \ell(\psi,z,t) < 0\},$$

$$T_0(z) = \{t \in [0,T] \mid \ell(\psi,z,t) = 0\}.$$

Изучим дифференциальные свойства функционала φ.

Используя разложение (9), нетрудно убедиться в справедливости следующей леммы.

ЛЕММА 1. *Если опорная функция $c(F,\psi)$ многозначного отображения $F(x,t)$ непрерывно дифференцируема по фазовой переменной x, то:*

- *при $z \notin \Omega$ функционал φ дифференцируем по Гато и его градиент в точке z находится по формуле*

$$\nabla\varphi(z) = \frac{h(z,t)}{\varphi(z)}\psi^*(t) - \int_t^T \frac{h(z,\tau)}{\varphi(z)} \frac{\partial c(F(x,\tau),\psi^*(\tau))}{\partial x} d\tau,$$

- *при $z \in \Omega$ функционал φ субдифференцируем и его субдифференциал в точке z находится по формуле*

$$\partial\varphi(z) = \Big\{ w(t)\psi(t) - \int_t^T w(\tau) \frac{\partial c(F(x,\tau),\psi(\tau))}{\partial x} d\tau \;\Big|\; w \in W,\ \psi(t) \in \overline{\overline{R}}(t) \Big\}, \qquad (10)$$

где

$$\overline{\overline{R}}(t) = \Big\{ \overline{\psi}(t) \in B(\mathbf{0},1) \mid \max\{0, \ell(\overline{\psi},z,t)\} = \max_{\psi(t)\in B(\mathbf{0},1)} \max\{0,\ell(\psi,z,t)\} \Big\},$$

$$W = \{w \in P[0,T] \mid ||w|| \leqslant 1;\ w(t) \geqslant 0\ \forall t \in T_0,\ w(t) = 0\ \forall t \in T_-\}.$$

Здесь $B(\mathbf{0},1)$ — единичный шар в пространстве $\mathbb{R}^n$ с центром в начале координат. Заметим, что в данном случае также имеет место равенство

$$\gamma w(t) \frac{\partial c(F(x,t),\psi(t))}{\partial x} = \frac{\partial c(F(x,t),\gamma w(t)\psi(t))}{\partial x} \quad \forall t \in [0,T], \quad \forall \gamma > 0. \qquad (11)$$

Вычисляя производную функционала I по направлению $v \in P_n[0,T]$, убеждаемся [3], что он дифференцируем по Гато

$$I'(z,v) = \int_0^T \Big(\int_t^T \frac{\partial f_0}{\partial x} d\tau, v(t) \Big) dt,$$

и его градиент на множестве $P_n[0,T]$ выражается по формуле

$$\nabla I(z) = \int_t^T \frac{\partial f_0}{\partial x} d\tau. \tag{12}$$

4°. Необходимые условия минимума. Воспользуемся известным достаточным условием локальной точности штрафной функции [3]. Придём к следующему результату.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть точка $z_0 \in \Omega$ является локальным минимумом функционала I на множестве Ω в метрике ρ. Предположим, что в некоторой окрестности*

$$\overline{\Omega}_\delta = \{z \in P_n[0,T] \mid \rho(z,z_0) < \delta\}$$

точки z_0 выполнено соотношение

$$\varphi^{\downarrow}(z) \leqslant -a < 0 \ \forall z \in \overline{\Omega}_\delta \setminus \Omega.$$

Пусть также функционал I является липшицевым на множестве $\overline{\Omega}_\delta$. Тогда существует такое число λ^*, что для любого $\lambda > \lambda^*$ точка z_0 будет локальным минимумом функционала Φ_λ в метрике ρ.

Получим принцип максимума В. И. Благодатских.

ТЕОРЕМА 2 ([1, 2])**.** *Пусть выполнены условия Теоремы 1. Пусть также опорная функция многозначного отображения $F(x,t)$ из (1) непрерывно дифференцируема по x. Для того, чтобы точка*

$$x^*(t) = x_0 + \int_0^t z^*(\tau) d\tau$$

удовлетворяла включению (1) и условию (2) и доставляла минимум функционалу (3), необходимо, чтобы нашлась такая вектор-функция $\Psi(t)$, что для почти всех $t \in [0,T]$ выполняются соотношения

$$\dot{\Psi}(t) = -\frac{\partial c(F(x^*,t),\Psi(t))}{\partial x} + \frac{\partial f_0(x^*,t)}{\partial x}, \tag{13}$$

$$(\dot{x}^*, \Psi(t)) - c(F(x^*,t),\Psi(t)) = 0, \tag{14}$$

$$\Psi(T) = \mathbf{0}. \tag{15}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Теорема 1 утверждает, что существует такое число $\lambda^* > 0$, что для всех $\lambda > \lambda^*$ точки локального минимума функционала (3) на множестве, задаваемом ограничениями (1), (2), являются точками локального минимума функционала (7) на всём пространстве.

Положим $\Psi(t) = \lambda w(t)\psi(t)$, где вектор-функция $w(t)$ берётся из множества W, а вектор-функция $\psi(t)$ — из множества $\overline{\overline{R}}(t)$. Поскольку по Лемме 1 при $z \in \Omega$ функционал φ субдифференцируем, и его субдифференциал выписан в (10), а функционал I дифференцируем по Гато, и его градиент выписан в (12), то из необходимого условия минимума [4]

$$0_n \in \partial\Phi_\lambda(z^*)$$

имеем с учётом (11), что в точке минимума для почти всех $t \in [0, T]$ должно выполняться условие

$$\int_t^T \frac{\partial f_0(x^*, t)}{\partial x} d\tau + \Psi(t) + \int_t^T -\frac{\partial c(F(x^*, t), \Psi(t))}{\partial x} d\tau = 0_n, \tag{16}$$

где 0_n — нулевой элемент пространства $P_n[0, T]$. Дифференцируя (16) на интервале времени $[0, T]$ (в точках дифференцируемости), получаем систему дифференциальных уравнений

$$\dot{\Psi}(t) = -\frac{\partial c(F(x^*, t), \Psi(t))}{\partial x} + \frac{\partial f_0(x^*, t)}{\partial x}$$

с концевым условием $\Psi(T) = \mathbf{0}$. Мы приходим к соотношениям (13), (15).

При $t \in T_0$ из вида функции $\ell(\psi, z, t)$ получаем $(z, \Psi) = c(F, \Psi)$, при $t \in T_-$ $w(t) = 0$, и соотношение (14) остаётся в силе. Таким образом, (14) имеет место при любом $t \in [0, T]$.

Теорема доказана. □

З а м е ч а н и е. Теорема 2 сформулирована для задачи со свободным правым концом. Нетрудно показать, что соотношения (13), (14) будут иметь место и для задачи с фиксированным правым концом, однако концевое значение $\Psi(T)$ для этой задачи в общем случае будет ненулевым, то есть здесь (15) уже не будет иметь места.

5°. Примеры.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u, \\ \dot{x}_2 = x_1, \end{cases}$$

в которой ограничение на управление задаётся множеством

$$U = \{u \in \mathbb{R} \mid |u| \leqslant 1\}.$$

Пусть заданы начальное положение $x_0 = (0, 0)$ и конечное состояние $x(1) = (-1/2, -1/3)'$ системы. Требуется подобрать такое управление $u^* \in U$, при котором функционал

$$I(x) = \int_0^1 x_2(t)dt$$

принимает наименьшее значение.

Систему можно переписать в виде включения

$$\dot{x} \in F(x),$$

где

$$F(x) = \begin{pmatrix} [-1, 1] \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку опорная функция $c(A, b)$ отрезка $A = \{a \in \mathbb{R} \mid a \in [-1, 1]\}$ имеет вид $|b|$, то в данном случае опорная функция многозначного отображения $F(x)$ выражается по формуле

$$c(F, \psi) = |\psi_1| + x_1\psi_2.$$

Видно, что функция $c(F, \psi)$ является непрерывно дифференцируемой по фазовым переменным и её градиент выписывается следующим образом

$$\frac{\partial c}{\partial x} = (\psi_2, 0)'.$$

Для градиента подынтегральной функции f_0 справедливо выражение

$$\frac{\partial f_0}{\partial x} = (0, 1)'.$$

Из Теоремы 2 с учётом Замечания следует, что вектор-функция $\psi(t)$ должна удовлетворять системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = -\psi_2, \\ \dot{\psi}_2 = 1. \end{cases} \tag{17}$$

Из Теоремы 2 с учётом Замечания также получаем, что для $\psi(t)$ при почти всех t необходимо выполнение соотношений

$$(\dot{x}, \psi(t)) = u\psi_1 + x_1\psi_2 = c(F, \psi) = |\psi_1| + x_1\psi_2.$$

Отсюда для почти всех t должно выполняться равенство

$$u(t)\psi_1(t) = |\psi_1(t)|. \tag{18}$$

Из (17), (18) уже нетрудно получить оптимальное управление

$$\begin{gathered} u^*(t) = -1, \quad t \in [0, \tau_1), \\ u^*(t) = 1, \quad t \in [\tau_1, \tau_2), \\ u^*(t) = -1, \quad t \in [\tau_2, 1], \end{gathered} \tag{19}$$

и соответствующую ему оптимальную траекторию

$$\begin{gathered} x_1^*(t) = -t,\ x_2^*(t) = -t^2/2, \quad t \in [0, \tau_1), \\ x_1^*(t) = t + S_1,\ x_2^*(t) = t^2/2 + S_1 t + S_2, \quad t \in [\tau_1, \tau_2), \\ x_1^*(t) = -t + 1/2,\ x_2^*(t) = -t^2/2 + t/2 - 1/2, \quad t \in [\tau_2, 1], \end{gathered} \tag{20}$$

где $\tau_1 = 13/24$, $\tau_2 = 19/24$, $S_1 = -13/12$, $S_2 = 169/576$. Для поиска величин τ_1, τ_2, S_1, S_2 в (19), (20) использованы граничные условия и условие непрерывности траектории.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим ещё один пример. Дано дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{yu}{x}, \quad x \in [x_-, x_+],$$

с краевыми условиями

$$\begin{gathered} y(x_-) = y_-, \\ y(x_+) = y_+, \\ x_+ > x_- > 0, \quad y_- > 0, \quad y_+ > 0, \end{gathered}$$

и ограничением на управление

$$-1 < \delta \leqslant u \leqslant \sigma < 0.$$

Требуется подобрать такое управление u^*, которое удовлетворяет данному ограничению и доставляет минимум функционалу

$$I(y, u) = \int_{x_-}^{x_+} -y(x) f'(x) dx,$$

где $f(x)$ — некоторая функция распределения.

Такие задачи встречаются при моделировании регрессивной шкалы прибыли [5].

Перейдём от исходного дифференциального уравнения к дифференциальному включению
$$\frac{dy}{dx} \in F(y,x),$$
где
$$F(y,x) = \Big[\delta\frac{y}{x}, \sigma\frac{y}{x}\Big].$$

Отрезок $\Big[\delta\frac{y}{x}, \sigma\frac{y}{x}\Big]$ представляет собой одномерный шар с центром в точке $\frac{y}{x}\frac{\sigma+\delta}{2}$ и радиусом $\frac{y}{x}\frac{\sigma-\delta}{2}$. Опорная функция $c(A,b)$ шара $A = \{a \in \mathbb{R}^n \mid ||a-a_0|| \leqslant r\}$ имеет вид $a_0 b + r||b||$, поэтому опорная функция многозначного отображения $F(y,x)$ выражается по формуле
$$c(F,\psi) = \frac{y}{x}\Big(\frac{\sigma+\delta}{2}\psi + \frac{\sigma-\delta}{2}|\psi|\Big).$$

Из Теоремы 2 с учётом Замечания имеем
$$\frac{y}{x}u\psi = \frac{dy}{dx}\psi = c(F,\psi) = \frac{y}{x}\Big(\frac{\sigma+\delta}{2}\psi + \frac{\sigma-\delta}{2}|\psi|\Big).$$
Тогда
$$u\psi = \frac{\sigma+\delta}{2}\psi + \frac{\sigma-\delta}{2}|\psi|,$$
поэтому
$$\begin{gathered} u = \sigma, \quad \psi(x) > 0, \\ u \in [\delta,\sigma], \quad \psi(x) = 0, \\ u = \delta, \quad \psi(x) < 0. \end{gathered} \tag{21}$$

Далее, поскольку
$$\frac{\partial c}{\partial y} = \frac{\sigma+\delta}{2x}\psi + \frac{\sigma-\delta}{2x}|\psi| = \frac{u}{x}\psi,$$
из Теоремы 2 с учётом Замечания получаем
$$\frac{d\psi}{dx} = -\frac{\partial c}{\partial y} - f' = -\frac{u}{x}\psi - f'. \tag{22}$$

Из (21), (22) уже нетрудно получить оптимальное управление
$$\begin{gathered} u^*(x) = \sigma, \quad x \in [x_-, x_0), \\ u^*(x) \in [\delta,\sigma], \quad x = x_0, \\ u^*(x) = \delta, \quad x \in (x_0, x_+], \end{gathered} \tag{23}$$

и соответствующую ему оптимальную траекторию

$$y^*(x) = C_1 x^{\sigma}, \quad x \in [x_-, x_0],$$

$$y^*(x) = C_2 x^{\delta}, \quad x \in [x_0, x_+], \tag{24}$$

где $C_1 = \dfrac{y_-}{x_-^{\sigma}}$, $C_2 = \dfrac{y_+}{x_+^{\delta}}$, $x_0 = \left(\dfrac{y_+ x_-^{\sigma}}{y_- x_+^{\delta}}\right)^{\frac{1}{\sigma-\delta}}$. Для поиска величин C_1, C_2, x_0 в (23), (24) использованы граничные условия и условие непрерывности траектории.

Нетрудно убедиться, что условия (17), (18) и (21), (22) могут быть получены непосредственно из принципа максимума Л. С. Понтрягина. Здесь же продемонстрирован несколько иной подход, когда осуществляется переход от исходной системы к соответствующему дифференциальному включению, для которого применяются полученные условия оптимальности для поиска оптимального процесса $(x^*(t), u^*(t))$.

6°. Заключение. В данном докладе продемонстрировано применение теории точных штрафных функций к задаче оптимального управления дифференциальным включением. Аппарат опорных функций позволяет свести исходную задачу к оптимизационной задаче при наличии ограничений. С помощью штрафной функции эта задача условной оптимизации сводится к минимизации негладкого функционала Φ_λ на всём пространстве, который при некоторых дополнительных предположениях является точной штрафной функцией. При условии непрерывной дифференцируемости опорной функции $c(F(x,t),\psi)$ по вектору фазовых координат этот функционал оказывается субдифференцируемым, что позволяет выписать необходимые условия минимума в терминах субдифференциала, совпадающие с некоторым классическим результатом для этой задачи. Приведены примеры применения теоретических результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Благодатских В. И. *Принцип максимума для дифференциальных включений* // Тр. МИАН СССР. 1984. Т. 166. С. 23–43.

2. Благодатских В. И., Филиппов А. Ф. *Дифференциальные включения и оптимальное управление* // Тр. МИАН СССР. 1985. Т. 169. С. 194–252.

3. Демьянов В. Ф. Условия экстремума и вариационное исчисление. М.: Высшая школа, 2005. 335 с.

4. Васильев Л. В., Демьянов В. Ф. Недифференцируемая оптимизация. М.: Наука, 1981. 384 с.

5. Andersen A., Chistiakov S., Vishnevskii V. *A Game-theoretic Model of a Regressive Profit Tax* // Applied Mathematical Sciences. 2015. Vol. 9, no. 85, pp. 4201–4209.