ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ГИПОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО СПУСКА ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ*

А. В. Фоминых

alexfomster@mail.ru

7 мая 2015 г.

Аннотация. В докладе рассматривается задача оптимального управления в классической постановке. С помощью теории точных штрафных функций исходная задача сводится к задаче безусловной минимизации некоторого негладкого функционала. Для него найдены необходимые условия минимума в терминах субдифференциала и гиподифференциала. Выделен класс задач, для которых эти условия оказываются и достаточными. Для решения рассматриваемой задачи применяются метод субдифференциального спуска и метод гиподифференциального спуска. Анализируется сходимость этих методов.

1°. Постановка задачи. Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений в нормальной форме

$$\dot{x}(t) = f(x, u, t),\ \ t \in [0, T]. \tag{1}$$

Требуется подобрать управление $u^* \in P_m[0, T]$, удовлетворяющее интегральному ограничению

$$\int_0^T \big(u(t), u(t)\big) dt \leqslant 1, \tag{2}$$

которое переводит систему (1) из заданного начального положения

$$x(0) = x_0 \tag{3}$$

в заданное конечное состояние

$$x(T) = x_T \tag{4}$$

и доставляет минимум функционалу

$$I(x, \dot{x}, u) = \int_0^T f_0(x, \dot{x}, u, t) dt. \tag{5}$$

*Семинар по конструктивному негладкому анализу и недифференцируемой оптимизации «CNSA & NDO»: `http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/`

Считаем, что оптимальное управление u^* существует. В системе (1) величина $T > 0$ — заданный момент времени, $f(x, u, t)$ — вещественная n-мерная вектор-функция, $x(t)$ — n-мерная вектор-функция фазовых координат, которую будем считать непрерывной с кусочно непрерывным на интервале $[0, T]$ градиентом, $u(t)$ — m-мерная вектор-функция управлений, которую считаем кусочно непрерывной на промежутке $[0, T]$. Предполагаем $f(x, u, t)$ непрерывно дифференцируемой по x и u и непрерывной по всем трём аргументам.

Если $t_0 \in [0, T)$ — точка разрыва вектор-функции $u(t)$, то для определённости полагаем
$$u(t_0) = \lim_{t \downarrow t_0} u(t). \tag{6}$$
В точке T считаем, что
$$u(T) = \lim_{t \uparrow T} u(t). \tag{7}$$
При этом $\dot{x}(t_0)$ — правосторонний градиент вектор-функции x в точке t_0, $\dot{x}(T)$ — левосторонний градиент вектор-функции x в точке T.

В функционале (5) $f_0(x, \dot{x}, u, t)$ — вещественная скалярная функция, которую будем считать непрерывной по всем четырём аргументам и непрерывно дифференцируемой по x, $\dot{x}$ и u.

2°. Сведение к вариационной задаче. Положим $z(t) = \dot{x}(t)$, тогда $z \in P_n[0, T]$. С учётом (3) имеем $x(t) = x_0 + \displaystyle\int_0^t z(\tau) d\tau$. Относительно вектор-функции $z(t)$ сделаем предположение, аналогичное (6)–(7). Имеем
$$f(x, u, t) = f(x_0 + \int_0^t z(\tau) d\tau, u, t) = f(z, u, t),$$
$$f_0(x, \dot{x}, u, t) = f(x_0 + \int_0^t z(\tau) d\tau, z, u, t) = f_0(z, u, t).$$

Введём в рассмотрение функционал
$$F_\lambda(z, u) = I(z, u) + \lambda\big[\varphi(z, u) + \sum_{i=1}^n \psi_i(z) + \max\{0, \int_0^T \big(u(t), u(t)\big) dt - 1\}\big], \tag{8}$$
где
$$\varphi(z, u) = \sqrt{\int_0^T \big(z(t) - f\big(z, u, t\big), z(t) - f\big(z, u, t\big)\big) dt},$$
$$\psi_i(z) = \big|\overline{\psi}_i(z)\big|, \quad \overline{\psi}_i(z) = x_{0i} + \int_0^T z_i(t) dt - x_{Ti}, \quad i \in 1 : n,$$
а x_{0i} — i-я компонента вектора x_0, x_{Ti} — i-я компонента вектора x_T, $i \in 1 : n$, $\lambda > 0$ — некоторая константа.

Обозначим

$$\Phi(z,u) = \varphi(z,u) + \sum_{i=1}^{n} \psi_i(z) + \max\{0, \int_0^T \big(u(t), u(t)\big) dt - 1\}. \tag{9}$$

Нетрудно видеть, что функционал (9) неотрицателен для всех $z \in P_n[0,T]$ и для всех $u \in P_m[0,T]$ и обращается в ноль в точке $[\overline{z}, \overline{u}] \in P_n[0,T] \times P_m[0,T]$ тогда и только тогда, когда вектор-функция $\overline{u}(t)$ удовлетворяет ограничению (2), а вектор-функция $\overline{x}(t) = x_0 + \displaystyle\int_0^t \overline{z}(\tau) d\tau$ удовлетворяет системе (1) при $u(t) = \overline{u}(t)$ и ограничениям (3)–(4).

Введём множества

$$\Omega = \big\{[z,u] \in P_n[0,T] \times P_m[0,T] \;\big|\; \Phi(z,u) = 0\big\},$$

$$\Omega_\delta = \big\{[z,u] \in P_n[0,T] \times P_m[0,T] \;\big|\; \Phi(z,u) < \delta\big\},$$

где $\delta > 0$ — некоторое число. Тогда

$$\Omega_\delta \setminus \Omega = \big\{[z,u] \in P_n[0,T] \times P_m[0,T] \;\big|\; 0 < \Phi(z,u) < \delta\big\}.$$

Используя ту же технику, что и в [1, 2], можно показать, что имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть найдётся такое положительное число $\lambda_0 < \infty$, что для всех $\lambda > \lambda_0$ существует точка $[z(\lambda), u(\lambda)] \in P_n[0,T] \times P_m[0,T]$, для которой $F_\lambda\big(z(\lambda), u(\lambda)\big) = \inf\limits_{[z,u]} F_\lambda(z,u)$. Пусть также функционал $I(z,u)$ является локально липшицевым на множестве $\Omega_\delta \setminus \Omega$. Тогда функционал (8) будет точной штрафной функцией.*

Таким образом, при сделанных в теореме 1 предположениях существует такое число $0 < \lambda^* < \infty$, что для всех $\lambda > \lambda_*$ исходная задача минимизации функционала (5) на множестве Ω эквивалентна задаче минимизации функционала (8) на всём пространстве. Далее будем считать, что в функционале (8) число λ фиксировано и выполнено условие $\lambda > \lambda^*$.

3°. Необходимые условия минимума. Введём множества

$$\Omega_1 = \big\{z \in P_n[0,T] \;\big|\; x_0 + \int_0^T z(t) dt = x_T\big\},$$

$$\Omega_2 = \big\{u \in P_m[0,T] \;\big|\; \int_0^T \big(u(t), u(t)\big) dt \leqslant 1\big\},$$

$$\Omega_3 = \big\{[z,u] \in P_n[0,T] \times P_m[0,T] \;\big|\; \varphi(z,u) = 0\big\}.$$

Ниже нам также потребуются индексные множества

$$I_0 = \{i \in 1:n \mid \overline{\psi}_i(z) = 0\},$$
$$I_- = \{i \in 1:n \mid \overline{\psi}_i(z) < 0\},$$
$$I_+ = \{i \in 1:n \mid \overline{\psi}_i(z) > 0\}$$

и следующие множества управлений

$$U_0 = \Big\{u \in P_m[0,T] \ \Big| \ \int_0^T \big(u(t), u(t)\big)dt - 1 = 0\Big\},$$

$$U_- = \Big\{u \in P_m[0,T] \ \Big| \ \int_0^T \big(u(t), u(t)\big)dt - 1 < 0\Big\},$$

$$U_+ = \Big\{u \in P_m[0,T] \ \Big| \ \int_0^T \big(u(t), u(t)\big)dt - 1 > 0\Big\}.$$

Пусть «$'$» означает транспонирование, e_i, $i \in 1:n$, — канонический базис в $\mathbb{R}^n$, $||\cdot||$ — норма в $L^2[0,T]$. Далее иногда будем писать f вместо $f(z,u,t)$ и f_0 вместо $f_0(z,u,t)$. Используя ту же технику, что и в [1, 3] нетрудно убедиться в справедливости следующих двух теорем.

ТЕОРЕМА 2. *При $[z,u] \notin \Omega_3$ функционал $F_\lambda(z,u)$ субдифференцируем, и его субдифференциал в точке $[z,u]$ принимает вид*

$$\partial F_\lambda(z,u) = \Big\{ \Big[\int_t^T \frac{\partial f_0}{\partial x} d\tau + \frac{\partial f_0}{\partial z} + \lambda\big[w(t) - \int_t^T \Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)' w(\tau) d\tau + \sum_{i \in I_0} \omega_i e_i + \sum_{j=1}^n \mu_j e_j\big],$$
$$\frac{\partial f_0}{\partial u} + \lambda\big[- \Big(\frac{\partial f}{\partial u}\Big)' w(t) + 2\nu u(t)\big]\Big] \ \Big| \ \omega_i \in [-1,1], \ i \in I_0,$$
$$\mu_j = 0, \ j \in I_0, \ \mu_j = 1, \ j \in I_+, \ \mu_j = -1, \ j \in I_-,$$
$$\nu \in [0,1], \ u \in U_0, \ \nu = 1, \ u \in U_+, \ \nu = 0, \ u \in U_-,$$
$$w(t) = \frac{z(t) - f(z,u,t)}{\varphi(z,u)}\Big\}. \quad (10)$$

ТЕОРЕМА 3. *При $[z,u] \in \Omega_3$ функционал $F_\lambda(z,u)$ субдифференцируем, и его субдифференциал в точке $[z,u]$ принимает вид*

$$\partial F_\lambda(z,u) = \Big\{ \Big[\int_t^T \frac{\partial f_0}{\partial x} d\tau + \frac{\partial f_0}{\partial z} + \lambda\big[v(t) - \int_t^T \Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)' v(\tau) d\tau + \sum_{i \in I_0} \omega_i e_i + \sum_{j=1}^n \mu_j e_j\big],$$
$$\frac{\partial f_0}{\partial u} + \lambda\big[- \Big(\frac{\partial f}{\partial u}\Big)' v(t) + 2\nu u(t)\big]\Big] \ \Big| \ v \in P_n[0,T], \ ||v|| \leqslant 1\Big\}, \quad (11)$$

где $\omega_i \in [-1,1]$, $i \in I_0$, μ_j, $j \in 1:n$, ν определены в (10).

СЛЕДСТВИЕ 1. *Если $[z,u] \in \Omega_3$, $z \in \Omega_1$, $u \in \Omega_2$, то функционал $F_\lambda(z,u)$ субдифференцируем, и его субдифференциал в точке $[z,u]$ принимает вид*

$$\partial F_\lambda(z,u) = \Big\{ \Big[\int_t^T \frac{\partial f_0}{\partial x} d\tau + \frac{\partial f_0}{\partial z} + \lambda \big[v(t) - \int_t^T \Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)' v(\tau) d\tau + \sum_{i \in I_0} \omega_i e_i \big],$$
$$\frac{\partial f_0}{\partial u} + \lambda \big[- \Big(\frac{\partial f}{\partial u}\Big)' v(t) + 2\nu u(t) \big] \Big] \ \Big| \ \omega_i \in [-1,1], \ i \in 1:n,$$
$$\nu \in [0,1], \ u \in U_0, \ \nu = 0, \ u \in U_-, \ v \in P_n[0,T], \ ||v|| \leqslant 1 \Big\}. \quad (12)$$

ЛЕММА 1. *Если система* (1) *линейна по фазовым переменным x и по управлению u, а функционал $I(z,u)$ выпуклый, то функционал $F_\lambda(z,u)$ является выпуклым.*

Доказательство. Представим функционал (8) в виде

$$F_\lambda(z,u) = I(z,u) + \lambda \varphi(z,u) + \lambda F_1(z) + \lambda F_2(u),$$

где $I(z,u)$, $F_1(z)$, $F_2(u)$ — соответствующие слагаемые из правой части (8). Функционалы $F_1(z)$ и $F_2(u)$ выпуклы как максимумы выпуклых функционалов. Функционал $I(z,u)$ выпуклый по условию. Покажем выпуклость функционала $\varphi(z,u)$ в случае линейности системы (1).

Пусть система (1) имеет вид

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + c(t),$$

где $A(t)$ — $n \times n$-матрица, $B(t)$ — $n \times m$-матрица, $c(t)$ — n-мерная вектор-функция. Считаем $A(t)$, $B(t)$, $c(t)$ вещественными и непрерывными на $[0,T]$. Пусть $z_1, z_2 \in P_n[0,T]$, $u_1, u_2 \in P_m[0,T]$, $\alpha \in (0,1)$. Введём обозначение $\overline{\varphi}(z,u,t) = z(t) - f(z,u,t)$. Имеем

$$\varphi^2\big(\alpha(z_1,u_1) + (1-\alpha)(z_2,u_2)\big) = \big|\big|\alpha z_1(t) + (1-\alpha) z_2(t) -$$
$$-A(t)\big[x_0 + \int_0^t \big(\alpha z_1(\tau) + (1-\alpha) z_2(\tau)\big) d\tau\big] - B(t)\big[\alpha u_1(t) + (1-\alpha) u_2(t)\big] - c(t)\big|\big|^2 =$$
$$= \big|\big|\alpha \varphi(z_1,u_1) + (1-\alpha)\varphi(z_2,u_2)\big|\big|^2 = \alpha^2 \int_0^T \big(\overline{\varphi}(z_1,u_1,t), \overline{\varphi}(z_1,u_1,t)\big) dt +$$
$$+2\alpha(1-\alpha) \int_0^T \big(\overline{\varphi}(z_1,u_1,t), \overline{\varphi}(z_2,u_2,t)\big) dt +$$
$$+(1-\alpha)^2 \int_0^T \big(\overline{\varphi}(z_2,u_2,t), \overline{\varphi}(z_2,u_2,t)\big) dt, \quad (13)$$

а также

$$\big(\alpha\varphi(z_1,u_1)+(1-\alpha)\varphi(z_2,u_2)\big)^2=\alpha^2\int_0^T\big(\overline{\varphi}(z_1,u_1,t),\overline{\varphi}(z_1,u_1,t)\big)dt+$$
$$+2\alpha(1-\alpha)\sqrt{\int_0^T\big(\overline{\varphi}(z_1,u_1,t),\overline{\varphi}(z_1,u_1,t)\big)dt\int_0^T\big(\overline{\varphi}(z_2,u_2,t),\overline{\varphi}(z_2,u_2,t)\big)dt}+$$
$$+(1-\alpha)^2\int_0^T\big(\overline{\varphi}(z_2,u_2,t),\overline{\varphi}(z_2,u_2,t)\big)dt. \qquad (14)$$

В силу неравенства Гёльдера для всех z_1, z_2, u_1, u_2 справедливо

$$\int_0^T\big(\overline{\varphi}(z_1,u_1,t),\overline{\varphi}(z_2,u_2,t)\big)dt\leqslant$$
$$\leqslant\sqrt{\int_0^T\big(\overline{\varphi}(z_1,u_1,t),\overline{\varphi}(z_1,u_1,t)\big)dt}\sqrt{\int_0^T\big(\overline{\varphi}(z_2,u_2,t),\overline{\varphi}(z_2,u_2,t)\big)dt},$$

поэтому из (13) и (14) получаем, что

$$\varphi^2\big(\alpha(z_1,u_1)+(1-\alpha)(z_2,u_2)\big)\leqslant\big(\alpha\varphi(z_1,u_1)+(1-\alpha)\varphi(z_2,u_2)\big)^2. \qquad (15)$$

Так как $\varphi\big(\alpha(z_1,u_1)+(1-\alpha)(z_2,u_2)\big)\geqslant 0$, $\alpha\varphi(z_1,u_1)+(1-\alpha)\varphi(z_2,u_2)\geqslant 0$, то из неравенства (15) для всех z_1, z_2, u_1, u_2 и $\alpha\in(0,1)$ следует

$$\varphi\big(\alpha(z_1,u_1)+(1-\alpha)(z_2,u_2)\big)\leqslant\alpha\varphi(z_1,u_1)+(1-\alpha)\varphi(z_2,u_2),$$

что и доказывает выпуклость функционала $\varphi(z,u)$ в случае линейности исходной системы.

Теперь остаётся заметить, что функционал $F_\lambda(z,u)$ является выпуклым (в случае линейности исходной системы) как сумма выпуклых функционалов.

Лемма 1 доказана. □

Известно, что необходимым, а в случае выпуклости и достаточным условием минимума функционала (8) в точке $[z^*,u^*]$ в терминах субдифференциала является включение

$$0_{n+m}\in\partial F_\lambda(z^*,u^*),$$

где 0_{n+m} — нулевой элемент пространства $P_n[0,T]\times P_m[0,T]$. Отсюда с учётом леммы 1 заключаем, что справедлива

ТЕОРЕМА 4. *Для того чтобы управление $u^*\in\Omega_2$ переводило систему* (1) *из начального положения* (3) *в конечное состояние* (4) *и доставляло минимум функционалу* (5), *необходимо, а в случае линейности системы* (1) *и выпуклости функционала* (5) *и достаточно, чтобы*

$$0_{n+m}\in\partial F_\lambda(z^*,u^*), \qquad (16)$$

где выражение для субдифференциала $\partial F_\lambda(z,u)$ имеет вид (12).

4°. **Метод субдифференциального спуска.** Найдём минимальный по норме субградиент $h = h(t,z,u) \in \partial F_\lambda(z,u)$ в точке $[z,u]$. Для этого решим задачу $||h||^2 \longrightarrow \min\limits_{h\in\partial F_\lambda(z,u)}$.

Зафиксируем точку $[z,u]$ и рассмотрим два случая.

А. Пусть $\varphi(z,u) > 0$. В этом случае

$$\min_{h\in\partial F_\lambda(z,u)} ||h||^2 =$$

$$= \min_{\omega_i,\ i\in I_0,\ \nu} \Big[\int_0^T \big(s_1(t) + \lambda \sum_{i\in I_0} \omega_i e_i\big)^2 dt + \int_0^T \big(s_2(t) + 2\lambda\nu u(t)\big)^2 dt \Big], \qquad (17)$$

где

$$s_1(t) = \overline{s}_1(t) + \lambda \sum_{j=1}^n \mu_j e_j,$$

$$\overline{s}_1(t) = \int_t^T \frac{\partial f_0}{\partial x} d\tau + \frac{\partial f_0}{\partial z} + \lambda \big[w(t) - \int_t^T \Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)' w(\tau) d\tau \big],$$

$$s_2(t) = \frac{\partial f_0}{\partial u} - \lambda \Big(\frac{\partial f}{\partial u}\Big)' w(t),$$

а величины ω_i, $i \in I_0$, μ_j, $j \in 1:n$, ν и вектор-функция $w(t)$ определены в (10).

Задача (17) представляет собой задачу квадратичного программирования при наличии линейных ограничений и может быть решена одним из известных методов [4]. Обозначим ω_i^*, $i \in I_0$, ν^* её решение. Тогда вектор-функция

$$G(t,z,u) := h^* = \Big[s_1(t) + \lambda \sum_{i\in I_0} \omega_i^* e_i, s_2(t) + 2\lambda\nu^* u(t) \Big] \qquad (18)$$

является наименьшим по норме субградиентом функционала F_λ в точке $[z,u]$ (при $\varphi(z,u) > 0$). Если $||G|| > 0$, то вектор-функция $-G(t,z,u)/||G||$ является направлением субградиентного спуска функционала F_λ в точке $[z,u]$.

Б. Пусть $\varphi(z,u) = 0$. В этом случае

$$\min_{h\in\partial F_\lambda(z,u)} ||h||^2 := \min \big[||h_1||^2 + ||h_2||^2 \big] =$$

$$= \min_{\omega_i,\ i\in I_0,\ \nu,\ v} \Big[\int_0^T \Big\{ \int_t^T \frac{\partial f_0}{\partial x} d\tau + \frac{\partial f_0}{\partial z} +$$

$$+ \lambda \big[v(t) - \int_t^T \Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)' v(\tau) d\tau + \sum_{i\in I_0} \omega_i e_i + \sum_{j=1}^n \mu_j e_j \big] \Big\}^2 dt +$$

$$+ \int_0^T \Big\{ \frac{\partial f_0}{\partial u} + \lambda \big[- \Big(\frac{\partial f}{\partial u}\Big)' v(t) + 2\nu u(t) \big] \Big\}^2 dt \Big], \qquad (19)$$

где $h_1 = h_1(t, z, u)$, $h_2 = h_2(t, z, u)$, а величины ω_i, $i \in I_0$, μ_j, $j \in 1 : n$, ν и вектор-функция $v(t)$ определены в (11).

Составим функционал

$$H_\mu(v, \omega, \overline{\nu}) =$$
$$= ||h||^2 + \mu\big[\max\{0, ||v||^2 - 1\} + \max\{0, \overline{\nu}^2 - 1\} + \sum_{i \in I_0} \max\{0, \omega_i^2 - 1\}\big], \quad (20)$$

где $\overline{\nu} = 2\nu - 1$, а вектор $\omega \in \mathbb{R}^{|I_0|}$ состоит из компонент ω_i, $i \in I_0$.

Обозначим

$$\Psi(v, \omega, \overline{\nu}) = \mu\big[\max\{0, ||v||^2 - 1\} + \max\{0, \overline{\nu}^2 - 1\} + \sum_{i \in I_0} \max\{0, \omega_i^2 - 1\}\big].$$

Введём множества

$$\overline{\Omega} = \big\{[v, \omega, \overline{\nu}] \in P_n[0, T] \times \mathbb{R}^{|I_0|} \times \mathbb{R} \bigm| \Psi(v, \omega, \overline{\nu}) = 0\big\},$$

$$\overline{\Omega}_\delta = \big\{[v, \omega, \overline{\nu}] \in P_n[0, T] \times \mathbb{R}^{|I_0|} \times \mathbb{R} \bigm| \Psi(v, \omega, \overline{\nu}) < \delta\big\}.$$

Тогда

$$\overline{\Omega}_\delta \setminus \overline{\Omega} = \big\{[v, \omega, \overline{\nu}] \in P_n[0, T] \times \mathbb{R}^{|I_0|} \times \mathbb{R} \bigm| 0 < \Psi(v, \omega, \overline{\nu}) < \delta\big\}.$$

Также введём следующие множества

$$V_0 = \big\{v \in P_n[0, T] \bigm| \int_0^T \big(v(t), v(t)\big) dt - 1 = 0\big\},$$

$$V_- = \big\{v \in P_n[0, T] \bigm| \int_0^T \big(v(t), v(t)\big) dt - 1 < 0\big\},$$

$$V_+ = \big\{v \in P_n[0, T] \bigm| \int_0^T \big(v(t), v(t)\big) dt - 1 > 0\big\},$$

$$N_0 = \big\{\overline{\nu} \in \mathbb{R} \mid \overline{\nu}^2 - 1 = 0\big\},$$
$$N_- = \big\{\overline{\nu} \in \mathbb{R} \mid \overline{\nu}^2 - 1 < 0\big\},$$
$$N_+ = \big\{\overline{\nu} \in \mathbb{R} \mid \overline{\nu}^2 - 1 > 0\big\},$$

$$W_{i0} = \big\{\omega_i \in \mathbb{R} \mid \omega_i^2 - 1 = 0\big\},$$
$$W_{i-} = \big\{\omega_i \in \mathbb{R} \mid \omega_i^2 - 1 < 0\big\},$$
$$W_{i+} = \big\{\omega_i \in \mathbb{R} \mid \omega_i^2 - 1 > 0\big\},$$

где $i \in I_0$.

ЛЕММА 2. *Пусть найдётся такое положительное число $\mu_0 < \infty$, что для любого $\mu > \mu_0$ существует точка $[v(\mu), \omega(\mu), \overline{\nu}(\mu)] \in P_n[0,T] \times \mathbb{R}^{|I_0|} \times \mathbb{R}$, для которой $H_\mu\big(v(\mu), \omega(\mu), \overline{\nu}(\mu)\big) = \inf\limits_{[v,\omega,\overline{\nu}]} H_\mu(v, \omega, \overline{\nu})$. Пусть также функционал $h(v, \omega, \overline{\nu})$ является локально липшицевым на множестве $\overline{\Omega}_\delta \setminus \overline{\Omega}$. Тогда функционал (20) будет точной штрафной функцией.*

Таким образом, при сделанных в лемме 2 предположениях существует такое число $0 < \mu^* < \infty$, что при всех $\mu > \mu_*$ задача (19) эквивалентна задаче минимизации функционала (20) на всём пространстве. Далее будем считать, что в функционале (20) число μ фиксировано и выполнено условие $\mu > \mu^*$.

ЛЕММА 3. *Функционал (20) субдифференцируем, и его субдифференциал в точке $[v, \omega, \overline{\nu}]$ принимает вид*

$$\begin{aligned}\partial H_\mu(v,\omega,\overline{\nu}) = \Big\{ \big[& h_v + 2\mu\xi v(t), h_{\omega_1} + 2\mu\zeta_1\omega_1, \dots, h_{\omega_{|I_0|}} + 2\mu\zeta_{|I_0|}\omega_{|I_0|}, \\ & h_{\overline{\nu}} + 2\mu\zeta_0\overline{\nu}\big] \;\big|\; \xi \in [0,1],\ v \in V_0,\ \xi = 1,\ v \in V_+,\ \xi = 0,\ v \in V_-, \\ & \zeta_0 \in [0,1],\ \overline{\nu} \in N_0,\ \zeta_0 = 1,\ \overline{\nu} \in N_+,\ \zeta_0 = 0,\ \overline{\nu} \in N_-, \\ & \zeta_i \in [0,1],\ \omega_i \in W_{i0},\ \zeta_i = 1,\ \omega_i \in W_{i+},\ \zeta_i = 0,\ \omega_i \in W_{i-},\ i \in I_0 \Big\}. \end{aligned} \tag{21}$$

Вычислим следующие вектор-функции, входящие в формулу (21),

$$h_v = h_{1v} + h_{2v},$$

где

$$\begin{aligned} h_{1v} = 2\lambda\Big[& \lambda v(t) - \lambda \int_t^T \Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)' v(\tau)d\tau - \lambda \frac{\partial f}{\partial x}\int_0^t v(\tau)d\tau + \lambda\frac{\partial f}{\partial x}\int_0^t \int_\tau^T \Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)' v(\xi)d\xi d\tau + \\ & + \int_t^T \frac{\partial f_0}{\partial x}d\tau + \frac{\partial f_0}{\partial z} + \lambda\Big(E - t\frac{\partial f}{\partial x}\Big)\Big(\sum_{i\in I_0}\omega_i e_i + \sum_{j=1}^n \mu_j e_j\Big) - \frac{\partial f}{\partial x}\int_0^t \Big\{\int_\tau^T \frac{\partial f_0}{\partial x}d\xi + \frac{\partial f_0}{\partial z}\Big\}d\tau\Big], \end{aligned}$$

$$h_{2v} = -2\lambda\frac{\partial f}{\partial u}\Big(\frac{\partial f_0}{\partial u} + \lambda\big[-\Big(\frac{\partial f}{\partial u}\Big)' v(t) + \overline{\nu}u(t) + u(t)\big]\Big),$$

и E — единичная матрица в $\mathbb{R}^{2n}$. Далее

$$h_{\omega_i} = 2\lambda\int_0^T \Big\{\big(q(t) + \lambda\omega_i e_i\big)' e_i\Big\}dt,\ i \in I_0,$$

где

$$q(t) = \int_t^T \frac{\partial f_0}{\partial x}d\tau + \frac{\partial f_0}{\partial z} + \lambda\big[v(t) - \int_t^T \Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)' v(\tau)d\tau + \sum_{k\in I_0/\{i\}}\omega_k e_k + \sum_{j=1}^n \mu_j e_j\big].$$

Наконец,

$$h_{\overline{\nu}} = 2\lambda \int_0^T \Big\{ \big(r(t) + \lambda \overline{\nu} u(t) \big)' u(t) \Big\} dt,$$

где

$$r(t) = \frac{\partial f_0}{\partial u} + \lambda \Big[- \Big(\frac{\partial f}{\partial u} \Big)' v(t) + u(t) \Big].$$

СЛЕДСТВИЕ 2. *Если* $||v||^2 \leqslant 1$, $|\omega_i| \leqslant 1$, $i \in I_0$, $|\overline{\nu}| \leqslant 1$, *то функционал* (20) *субдифференцируем, и его субдифференциал в точке* $[v, \omega, \overline{\nu}]$ *принимает вид*

$$\partial H_\mu(v, \omega, \overline{\nu}) = \Big\{ \big[h_v + 2\mu \xi v(t), h_{\omega_1} + 2\mu \zeta_1 \omega_1, \ldots, h_{\omega_{|I_0|}} + 2\mu \zeta_{|I_0|} \omega_{|I_0|},$$
$$h_{\overline{\nu}} + 2\mu \zeta_0 \overline{\nu} \big] \;\Big|\; \xi \in [0,1],\ v \in V_0,\ \xi = 0,\ v \in V_-, \zeta_0 \in [0,1],\ \overline{\nu} \in N_0,$$
$$\zeta_0 = 0,\ \overline{\nu} \in N_-,\ \zeta_i \in [0,1],\ \omega_i \in W_{i0},\ \zeta_i = 0,\ \omega_i \in W_{i-},\ i \in I_0 \Big\}. \quad (22)$$

Замечание 1. Субдифференциал $\partial F_\lambda(z, u)$ является выпуклым компактным множеством, поэтому необходимое условие минимума функционала $H_\mu(v, \omega, \overline{\nu})$ будет и достаточным.

ЛЕММА 4. *Для того чтобы точка* $[v^*, \omega^*, \overline{\nu}^*] \in P_n[0,T] \times \mathbb{R}^{|I_0|} \times \mathbb{R}$ *доставляла минимум функционалу* (20) *необходимо и достаточно, чтобы*

$$0_{n+|I_0|+1} \in \partial H_\mu(v^*, \omega^*, \overline{\nu}^*), \quad (23)$$

где $0_{n+|I_0|+1}$ *— нулевой элемент пространства* $P_n[0,T] \times \mathbb{R}^{|I_0|} \times \mathbb{R}$*, а выражение для субдифференциала* $\partial H_\mu(v, \omega, \overline{\nu})$ *имеет вид* (22).

Найдём минимальный по норме субградиент $\overline{h} = \overline{h}(t, v, \omega, \overline{\nu}) \in \partial H_\mu(v, \omega, \overline{\nu})$ в точке $[v, \omega, \overline{\nu}]$. Для этого решим задачу

$$\min_{\xi,\ \zeta_0,\ \zeta_i,\ i \in I_0} ||\overline{h}||^2 =$$

$$= \min_{\xi,\ \zeta_0,\ \zeta_i,\ i \in I_0} \Big[\int_0^T \big\{ h_v + 2\mu \xi v(t) \big\}^2 dt +$$
$$+ \sum_{i \in I_0} \big\{ h_{\omega_i} + 2\mu \zeta_i \omega_i \big\}^2 + \big\{ h_{\overline{\nu}} + 2\mu \zeta_0 \overline{\nu} \big\}^2 \Big], \quad (24)$$

где величины ξ, ζ_0, ζ_i, $i \in I_0$, определены в (21).

Задача (24) представляет собой задачу квадратичного программирования при наличии линейных ограничений и может быть решена одним из известных методов [4]. Обозначим ξ^*, ζ_0^*, ζ_i^*, $i \in I_0$, её решение. Тогда вектор-функция

$$\overline{G}(t, v, \omega, \overline{\nu}) := \overline{h}^* =$$

$$= \big[h_v + 2\mu \xi^* v(t), h_{\omega_1} + 2\mu \zeta_1^* \omega_1, \ldots, h_{\omega_{|I_0|}} + 2\mu \zeta_{|I_0|}^* \omega_{|I_0|}, h_{\overline{\nu}} + 2\mu \zeta_0^* \overline{\nu} \big]$$

является наименьшим по норме субградиентом функционала H_μ в точке $[v,\omega,\overline{\nu}]$. Если $||\overline{G}||>0$, то вектор-функция $-\overline{G}(t,v,\omega,\overline{\nu})/||\overline{G}||$ является направлением субградиентного спуска функционала H_μ в точке $[v,\omega,\overline{\nu}]$.

Опишем следующий метод субдифференциального спуска для поиска точек минимума функционала $H_\mu(v,\omega,\overline{\nu})$.

Фиксируем произвольную точку $[v_1,\omega_1,\overline{\nu}_1]\in P_n[0,T]\times\mathbb{R}^{|I_0|}\times\mathbb{R}$.

Пусть уже построена точка $[v_k,\omega_k,\overline{\nu}_k]\in P_n[0,T]\times\mathbb{R}^{|I_0|}\times\mathbb{R}$. Если выполнено условие минимума (23), то точка $[v_k,\omega_k,\overline{\nu}_k]$ является точкой минимума функционала $H_\mu(v,\omega,\overline{\nu})$, и процесс прекращается. В противном случае положим

$$[v_{k+1},\omega_{k+1},\overline{\nu}_{k+1}]=[v_k,\omega_k,\overline{\nu}_k]-\alpha_k\overline{G}_k,$$

где вектор-функция $\overline{G}_k=\overline{G}(t,v_k,\omega_k,\overline{\nu}_k)$ представляет собой наименьший по норме субградиент функционала H_μ в точке $[v_k,\omega_k,\overline{\nu}_k]$, а величина α_k является решением следующей задачи одномерной минимизации

$$\min_{\alpha\geqslant 0}H_\mu([v_k,\omega_k,\overline{\nu}_k]-\alpha\overline{G}_k)=H_\mu([v_k,\omega_k,\overline{\nu}_k]-\alpha_k\overline{G}_k). \tag{25}$$

Тогда $H_\mu(v_{k+1},\omega_{k+1},\overline{\nu}_{k+1})\leqslant H_\mu(v_k,\omega_k,\overline{\nu}_k)$. Далее продолжаем аналогично.

Замечание 2. Если последовательность $\{[v_k,\omega_k,\overline{\nu}_k]\}$ конечна, то последняя её точка является точкой минимума функционала $H_\mu(v,\omega,\overline{\nu})$ по построению. Если же последовательность $\{[v_k,\omega_k,\overline{\nu}_k]\}$ бесконечна, то описанный процесс может и не привести к точке минимума функционала $H_\mu(v,\omega,\overline{\nu})$, поскольку субдифференциальное отображение $\partial H_\mu(v,\omega,\overline{\nu})$ не является непрерывным в метрике Хаусдорфа.

Пусть в результате работы описанного метода получено решение задачи (19). Обозначим его v^*, ω^*, ν^*. Тогда вектор-функция

$$G(t,z,u):=h^*=$$

$$=\Big[\int_t^T\frac{\partial f_0}{\partial x}d\tau+\frac{\partial f_0}{\partial z}+\lambda\big[v^*(t)-\int_t^T\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)'v^*(\tau)d\tau+\sum_{i\in I_0}\omega_i^*e_i+\sum_{j=1}^n\mu_je_j\big],$$

$$\frac{\partial f_0}{\partial u}+\lambda\big[-\Big(\frac{\partial f}{\partial u}\Big)'v^*(t)+2\nu^*u(t)\big]\Big] \tag{26}$$

является наименьшим по норме субградиентом функционала F_λ в точке $[z,u]$ в данном случае (при $\varphi(z,u)=0$). Если $||G||>0$, то вектор-функция $-G(t,z,u)/||G||$ является направлением субградиентного спуска функционала F_λ в точке $[z,u]$.

Таким образом, в пунктах А и Б решалась задача поиска направления субградиентного спуска функционала F_λ в точке $[z,u]$. В случае $\varphi(z,u)>0$

(пункт А) данная задача решается сравнительно просто, так как представляет собой задачу квадратичного программирования при наличии линейных ограничений. В случае $\varphi(z, u) = 0$ (пункт Б) помимо неизвестных величин ω, ν требуется также найти вектор-функцию $v(t)$. Это более сложная задача, решать которую можно численными методами, например, методом субдифференциального спуска, как это описано в пункте Б.

Замечание 3. Отметим, что в силу структуры функционала H_μ задача (25) поиска шага спуска решается аналитически. Кроме того, задача (24) нахождения направления спуска с помощью методов квадратичного программирования может быть решена за конечное число итераций.

Итак, теперь можно описать метод субдифференциального спуска для поиска стационарных точек функционала $F_\lambda(z, u)$.

Фиксируем произвольную точку $[z_1, u_1] \in P_n[0, T] \times P_m[0, T]$.

Пусть уже построена точка $[z_k, u_k] \in P_n[0, T] \times P_m[0, T]$. Если выполнено условие минимума (16), то точка $[z_k, u_k]$ является стационарной точкой функционала $F_\lambda(z, u)$, и процесс прекращается. В противном случае положим

$$[z_{k+1}, u_{k+1}] = [z_k, u_k] - \alpha_k G_k,$$

где вектор-функция $G_k = G(t, z_k, u_k)$ представляет собой наименьший по норме субградиент функционала F_λ в точке $[z_k, u_k]$. Значение для функционала G_k берётся либо из формулы (18) при $\varphi(z, u) > 0$, либо из формулы (26) при $\varphi(z, u) = 0$. Величина α_k является решением следующей задачи одномерной минимизации

$$\min_{\alpha \geqslant 0} F_\lambda([z_k, u_k] - \alpha G_k) = F_\lambda([z_k, u_k] - \alpha_k G_k).$$

Тогда $F_\lambda(z_{k+1}, u_{k+1}) \leqslant F_\lambda(z_k, u_k)$. Далее продолжаем аналогично.

Для последовательности $\{[z_k, u_k]\}$ справедливы рассуждения, аналогичные приведённым в замечании 1.

5°. Метод гиподифференциального спуска. Как уже отмечалось, описанный в предыдущем разделе метод субдифференциального спуска может не привести к стационарной точке функционала $F_\lambda(z, u)$ в силу разрывности субдифференциального отображения $\partial F_\lambda(z, u)$. Чтобы гарантировать сходимость рассматриваемого численного метода, перейдём к гиподифференциальному отображению $dF_\lambda(z, u)$.

Пользуясь формулами кодифференциального исчисления [5], можно показать, что имеют место следующие две теоремы.

ТЕОРЕМА 5. *При $[z,u] \notin \Omega_3$ функционал $F_\lambda(z,u)$ гиподифференцируем и его гиподифференциал в точке $[z,u]$ имеет вид*

$$dF_\lambda(z,u) = \big[0, \overline{s}_1(t), s_2(t)\big] +$$

$$+\lambda \sum_{i=1}^{n} \text{co}\big\{\big[\overline{\psi}_i(z) - \psi_i(z), e_i, 0_m\big], \big[-\overline{\psi}_i(z) - \psi_i(z), -e_i, 0_m\big]\big\}+$$

$$+\lambda\text{co}\Big\{\Big[\int_0^T \big(u(t),u(t)\big)dt - 1 - \max\{0, ||u||^2 - 1\}, 0_n, 2u(t)\Big], \big[-\max\{0, ||u||^2-1\}, 0_n, 0_m\big]\Big\},$$

где вектор-функции $\overline{s}_1(t)$ и $s_2(t)$ определены в задаче (17).

ТЕОРЕМА 6. *При $[z,u] \in \Omega_3$ функционал $F_\lambda(z,u)$ гиподифференцируем и его гиподифференциал в точке $[z,u]$ имеет вид*

$$dF_\lambda(z,u) = \Big\{\Big[\lambda\Big[\int_0^T \big(z(t) - f(z,u,t)\big)' v(t) dt - \varphi(z,u)\Big], \int_t^T \frac{\partial f_0}{\partial x} d\tau + \frac{\partial f_0}{\partial z} +$$
$$+\lambda\Big[v(t) - \int_t^T \Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)' v(\tau) d\tau\Big], \frac{\partial f_0}{\partial u} - \lambda\Big(\frac{\partial f}{\partial u}\Big)' v(t)\Big] +$$
$$+\lambda \sum_{i=1}^{n} \text{co}\big\{\big[\overline{\psi}_i(z) - \psi_i(z), e_i, 0_m\big], \big[-\overline{\psi}_i(z) - \psi_i(z), -e_i, 0_m\big]\big\} +$$
$$+\lambda\text{co}\Big\{\Big[\int_0^T \big(u(t),u(t)\big)dt - 1 - \max\{0, ||u||^2 - 1\}, 0_n, 2u(t)\Big],$$
$$\big[-\max\{0, ||u||^2-1\}, 0_n, 0_m\big]\Big\} \ \Big| \ v \in P_n[0,T], \ ||v|| \leqslant 1\Big\}. \quad (27)$$

Известно, что необходимым, а в случае выпуклости и достаточным условием минимума функционала (8) в точке $[z^*, u^*]$ в терминах гиподифференциала является включение

$$0_{n+m+1} \in dF_\lambda(z^*, u^*),$$

где 0_{n+m+1} — нулевой элемент пространства $P_n[0,T] \times P_m[0,T] \times \mathbb{R}$. Отсюда с учётом леммы 1 заключаем, что справедлива

ТЕОРЕМА 7. *Для того чтобы управление $u^* \in \Omega_2$ переводило систему* (1) *из начального положения* (3) *в конечное состояние* (4) *и доставляло минимум функционалу* (5), *необходимо, а в случае линейности системы* (1) *и выпуклости функционала* (5) *и достаточно, чтобы*

$$0_{n+m+1} \in dF_\lambda(z^*, u^*), \quad (28)$$

где выражение для гиподифференциала $dF_\lambda(z,u)$ имеет вид (27).

Найдём минимальный по норме гипоградиент $g = g(t,z,u) \in dF_\lambda(z,u)$ в точке $[z,u]$. Для этого решим задачу $||g||^2 \longrightarrow \min\limits_{g \in dF_\lambda(z,u)}$.

Зафиксируем точку $[z,u]$ и рассмотрим два случая.

А. Пусть $\varphi(z,u) > 0$. В этом случае

$$\min_{g \in dF_\lambda(z,u)} ||g||^2 = \min_{\beta_i \in [0,1],\ i=\overline{1,n+1}} \Big|\Big| \big[0, \overline{s}_1(t), s_2(t)\big] +$$
$$+\lambda \sum_{i=1}^{n} \big\{ \beta_i \big[\, \overline{\psi}_i(z) - \psi_i(z), e_i, 0_m\big] + (1-\beta_i)\big[-\overline{\psi}_i(z) - \psi_i(z), -e_i, 0_m\big] \big\} +$$
$$+\lambda\beta_{n+1}\Big[\int_0^T \big(u(t), u(t)\big)dt - 1 - \max\{0, ||u||^2 - 1\}, 0_n, 2u(t)\Big] +$$
$$+\lambda(1-\beta_{n+1})\big[-\max\{0, ||u||^2 - 1\}, 0_n, 0_m\big]\Big|\Big|^2. \quad (29)$$

Задача (29) представляет собой задачу квадратичного программирования при наличии линейных ограничений и может быть решена одним из известных методов [4]. Обозначим β_i^*, $i \in 1:n+1$, её решение. Пусть $g = [g_1, g_2]$, где вектор-функция g_2 состоит из последних $n+m$ компонент g. Тогда вектор-функция

$$\overline{\overline{G}}(t,z,u) := g_2^* =$$
$$= \big[\overline{s}_1(t), s_2(t)\big] + \lambda \sum_{i=1}^{n} \big\{ \beta_i^* \big[e_i, 0_m\big] + (1-\beta_i^*)\big[-e_i, 0_m\big] \big\} +$$
$$+ \lambda\beta_{n+1}^*\big[0_n, 2u(t)\big] + \lambda(1-\beta_{n+1}^*)\big[0_n, 0_m\big] \quad (30)$$

состоит из последних $n+m$ компонент наименьшего по норме гипоградиента функционала F_λ в точке $[z,u]$ (при $\varphi(z,u) > 0$). Если $||\overline{\overline{G}}|| > 0$, то вектор-функция $-\overline{\overline{G}}(t,z,u)/||\overline{\overline{G}}||$ является направлением гипоградиентного спуска функционала F_λ в точке $[z,u]$.

Б. Пусть $\varphi(z,u) = 0$. В этом случае

$$\min_{g \in dF_\lambda(z,u)} ||g||^2 = \min_{\beta_i \in [0,1],\ i \in 1:n+1,\ v} \Big|\Big| \Big[\lambda\Big[\int_0^T \big(z(t) - f(z,u,t)\big)' v(t)dt - \varphi(z,u)\Big],$$
$$\int_t^T \frac{\partial f_0}{\partial x} d\tau + \frac{\partial f_0}{\partial z} + \lambda\Big[v(t) - \int_t^T \Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)' v(\tau)d\tau\Big], \frac{\partial f_0}{\partial u} - \lambda\Big(\frac{\partial f}{\partial u}\Big)' v(t)\Big] +$$
$$+\lambda \sum_{i=1}^{n} \big\{ \beta_i \big[\overline{\psi}_i(z) - \psi_i(z), e_i, 0_m\big] + (1-\beta_i)\big[-\overline{\psi}_i(z) - \psi_i(z), -e_i, 0_m\big] \big\} +$$
$$+\lambda\beta_{n+1}\Big[\int_0^T \big(u(t), u(t)\big)dt - 1 - \max\{0, ||u||^2 - 1\}, 0_n, 2u(t)\Big] +$$

$$+\lambda(1-\beta_{n+1})\big[-\max\{0,||u||^2-1\},0_n,0_m\big]\Big|\Big|^2=$$

$$=\min_{\beta_i\in[0,1],\ i\in 1:n+1,\ v}\Big|\Big|\Big[\lambda\big[\int_0^T\big(z(t)-f(z,u,t)\big)'v(t)dt-\varphi(z,u)\big],$$

$$\int_t^T\frac{\partial f_0}{\partial x}d\tau+\frac{\partial f_0}{\partial z}+\lambda\big[v(t)-\int_t^T\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)'v(\tau)d\tau\big],\frac{\partial f_0}{\partial u}-\lambda\Big(\frac{\partial f}{\partial u}\Big)'v(t)\Big]+$$

$$+\lambda\sum_{i=1}^n\big\{\beta_i\big[2\overline{\psi}_i(z),2e_i,0_m\big]+\big[-\overline{\psi}_i(z)-\psi_i(z),-e_i,0_m\big]\big\}+$$

$$+\lambda\beta_{n+1}\big[\int_0^T\big(u(t),u(t)\big)dt-1,0_n,2u(t)\big]+\lambda\big[-\max\{0,||u||^2-1\},0_n,0_m\big]\Big|\Big|^2.$$

Это выражение можно переписать так:

$$\min_{g\in dF_\lambda(z,u)}||g||^2=\min\left[||g_1||^2+||g_2||^2+||g_3||^2\right]=$$

$$=\min_{\overline{\beta}_i\in[-1,1],\ i\in 1:n+1,\ v}\Big[\Big\{\lambda\big[\int_0^T\big(z(t)-f(z,u,t)\big)'v(t)dt-\varphi(z,u)\big]+\lambda\sum_{i=1}^n\overline{\psi}_i(z)\big(\overline{\beta}_i+1\big)+$$

$$+\lambda\sum_{i=1}^n\big(-\overline{\psi}_i(z)-\psi_i(z)\big)+\frac{\lambda}{2}\big(\int_0^T\big(u(t),u(t)\big)dt-1\big)(\overline{\beta}_{n+1}+1)-\lambda\max\{0,||u||^2-1\}\Big\}^2+$$

$$+\int_0^T\Big\{\int_t^T\frac{\partial f_0}{\partial x}d\tau+\frac{\partial f_0}{\partial z}+\lambda\big[v(t)-\int_t^T\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)'v(\tau)d\tau+\sum_{i=1}^n\overline{\beta}_ie_i\big]\Big\}^2dt+$$

$$+\int_0^T\Big\{\frac{\partial f_0}{\partial u}-\lambda\Big(\frac{\partial f}{\partial u}\Big)'v(t)+\lambda\overline{\beta}_{n+1}u(t)+\lambda u(t)\Big\}^2dt\Big],\qquad(31)$$

где $g_1=g_1(t,z,u)$, $g_2=g_2(t,z,u)$, $g_3=g_3(t,z,u)$, $\overline{\beta}_i=2\beta_i-1$, $i\in 1:n+1$, а вектор-функция $v(t)$ определена в (27).

Пусть вектор $\overline{\beta}\in\mathbb{R}^{n+1}$ состоит из компонент $\overline{\beta}_i$, $i\in 1:n+1$. Составим функционал

$$\overline{H}_\mu(v,\overline{\beta})=||g||^2+\mu\big[\max\{0,||v||^2-1\}+\sum_{i=1}^{n+1}\max\{0,\overline{\beta}_i^2-1\}\big].\qquad(32)$$

Обозначим

$$\overline{\Psi}(v,\overline{\beta})=\mu\big[\max\{0,||v||^2-1\}+\sum_{i=1}^{n+1}\max\{0,\overline{\beta}_i^2-1\}\big].$$

Введём множества

$$\overline{\overline{\Omega}} = \left\{[v,\overline{\beta}] \in P_n[0,T] \times \mathbb{R}^{n+1} \mid \overline{\Psi}(v,\overline{\beta}) = 0\right\},$$

$$\overline{\overline{\Omega}}_\delta = \left\{[v,\overline{\beta}] \in P_n[0,T] \times \mathbb{R}^{n+1} \mid \overline{\Psi}(v,\overline{\beta}) < \delta\right\}.$$

Тогда

$$\overline{\overline{\Omega}}_\delta \setminus \overline{\overline{\Omega}} = \left\{[v,\overline{\beta}] \in P_n[0,T] \times \mathbb{R}^{n+1} \mid 0 < \overline{\Psi}(v,\overline{\beta}) < \delta\right\}.$$

Также введём следующие множества

$$B_{i0} = \left\{\overline{\beta}_i \in \mathbb{R} \mid \overline{\beta}_i^2 - 1 = 0\right\},$$

$$B_{i-} = \left\{\overline{\beta}_i \in \mathbb{R} \mid \overline{\beta}_i^2 - 1 < 0\right\},$$

$$B_{i+} = \left\{\overline{\beta}_i \in \mathbb{R} \mid \overline{\beta}_i^2 - 1 > 0\right\},$$

где $i \in 1 : n+1$.

ЛЕММА 5. *Пусть найдётся такое положительное число $\mu_0 < \infty$, что при всех $\mu > \mu_0$ существует точка $[v(\mu), \overline{\beta}(\mu)] \in P_n[0,T] \times \mathbb{R}^{n+1}$, для которой $H_\mu\big(v(\mu), \overline{\beta}(\mu)\big) = \inf\limits_{[v,\overline{\beta}]} H_\mu(v,\overline{\beta})$. Пусть также функционал $g(v,\overline{\beta})$ является локально липшицевым на множестве $\overline{\overline{\Omega}}_\delta \setminus \overline{\overline{\Omega}}$. Тогда функционал* (32) *будет точной штрафной функцией.*

Таким образом, при сделанных в лемме 5 предположениях существует такое число $0 < \mu^* < \infty$, что для всех $\mu > \mu_*$ задача (31) эквивалентна задаче минимизации функционала (32) на всём пространстве. Далее будем считать, что в функционале (32) число μ фиксировано и выполнено условие $\mu > \mu^*$.

ЛЕММА 6. *Функционал* (32) *гиподифференцируем и его гиподифференциал в точке $[v,\overline{\beta}]$ имеет вид*

$$\begin{gathered} d\overline{H}_\mu(v,\overline{\beta}) = \left[0, g_v, g_{\overline{\beta}_1}, \ldots, g_{\overline{\beta}_{n+1}}\right] + \\ +\mu\Big[\mathrm{co}\big\{\left[||v||^2 - 1 - \max\{0, ||v||^2 - 1\}, 2v(t), 0_{n+1}\right], \left[-\max\{0, ||v||^2-1\}, 0_n, 0_{n+1}\right]\big\} + \\ + \mathrm{co}\big\{\left[\overline{\beta}_1^2 - 1 - \max\{0, \overline{\beta}_1^2 - 1\}, 0_n, 2\overline{\beta}_1, 0_n\right], \left[-\max\{0, \overline{\beta}_1^2 - 1\}, 0_n, 0_{n+1}\right]\big\} + \cdots + \\ + \mathrm{co}\big\{\left[\overline{\beta}_{n+1}^2 - 1 - \max\{0, \overline{\beta}_{n+1}^2 - 1\}, 0_n, 0_n, 2\overline{\beta}_{n+1}\right], \left[-\max\{0, \overline{\beta}_{n+1}^2 - 1\}, 0_n, 0_{n+1}\right]\big\}\Big]. \end{gathered} \tag{33}$$

Вычислим следующие вектор-функции, входящие в формулу (33),

$$g_v = g_{1v} + g_{2v} + g_{3v},$$

где

$$g_{1v} = 2\lambda^2\Big\{ \int_0^T \big(z(t) - f(z,u,t)\big)' v(t)dt - \varphi(z,u) + \sum_{i=1}^n \overline{\beta}_i \overline{\psi}_i(z) + \sum_{i=1}^n \overline{\psi}_i(z) +$$

$$+ \sum_{i=1}^n \big(-\overline{\psi}_i(z) - \psi_i(z)\big) + \frac{1}{2}\Big(\int_0^T \big(u(t),u(t)\big)dt - 1\Big)(\overline{\beta}_{n+1}+1) - \max\{0, ||u||^2 - 1\}\Big\}\big(z(t) - f(z,u,t)\big),$$

$$g_{2v} = 2\lambda\Big\{\lambda v(t) - \lambda \int_t^T \Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)' v(\tau)d\tau - \lambda\frac{\partial f}{\partial x}\int_0^t v(\tau)d\tau + \lambda\frac{\partial f}{\partial x}\int_0^t\int_\tau^T \Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)' v(\xi)d\xi d\tau +$$

$$+ \int_t^T \frac{\partial f_0}{\partial x}d\tau + \frac{\partial f_0}{\partial z} + \lambda\sum_{i=1}^n \overline{\beta}_i e_i - \frac{\partial f}{\partial x}\int_0^t \Big[\int_\tau^T \frac{\partial f_0}{\partial x}d\xi + \frac{\partial f_0}{\partial z}\Big]d\tau - \lambda t \frac{\partial f}{\partial x}\sum_{i=1}^n \overline{\beta}_i e_i,$$

$$g_{3v} = -2\lambda\frac{\partial f}{\partial u}\Big(\frac{\partial f_0}{\partial u} + \lambda\Big[-\Big(\frac{\partial f}{\partial u}\Big)' v(t) + \overline{\beta}_{n+1}u(t) + u(t)\Big]\Big).$$

Далее

$$g_{\overline{\beta}_i} = g_{1\overline{\beta}_i} + g_{2\overline{\beta}_i},\ i \in 1:n,$$

где

$$g_{1\overline{\beta}_i} = 2\lambda^2\Big\{ \int_0^T \big(z(t) - f(z,u,t)\big)' v(t)dt - \varphi(z,u) + \sum_{i=1}^n \overline{\beta}_i \overline{\psi}_i(z) + \sum_{i=1}^n \overline{\psi}_i(z) +$$

$$+ \sum_{i=1}^n \big(-\overline{\psi}_i(z) - \psi_i(z)\big) + \frac{1}{2}\Big[\int_0^T \big(u(t),u(t)\big)dt - 1\Big](\overline{\beta}_{n+1}+1) - \max\{0, ||u||^2 - 1\}\Big\}\overline{\psi}_i(z),$$

$$g_{2\overline{\beta}_i} = 2\lambda\int_0^T \Big\{ \int_t^T \frac{\partial f_0}{\partial x}d\tau + \frac{\partial f_0}{\partial z} + \lambda\Big[v(t) - \int_t^T \Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)' v(\tau)d\tau\Big] + \lambda\sum_{i=1}^n \overline{\beta}_i e_i\Big\}' e_i dt,$$

Наконец,

$$g_{\overline{\beta}_{n+1}} = 2\lambda\int_0^T \Big(\frac{\partial f_0}{\partial u} + \lambda\Big[-\Big(\frac{\partial f}{\partial u}\Big)' v(t) + \overline{\beta}_{n+1}u(t) + u(t)\Big]\Big)' u(t)dt.$$

Замечание 4. Гиподифференциал $dF_\lambda(z,u)$ является выпуклым компактным множеством, поэтому необходимое условие минимума функционала $\overline{H}_\mu(v,\overline{\beta})$ будет и достаточным.

ЛЕММА 7. *Для того чтобы точка* $[v^*, \overline{\beta}^*] \in P_n[0,T] \times \mathbb{R}^{n+1}$ *доставляла минимум функционалу* (32), *необходимо и достаточно, чтобы*

$$0_{n+n+2} \in d\overline{H}_\mu(v^*, \overline{\beta}^*), \tag{34}$$

где выражение для гиподифференциала $d\overline{H}_\mu(v, \overline{\beta})$ *имеет вид* (33).

Найдём минимальный по норме гипоградиент $\overline{g} = \overline{g}(t, v, \overline{\beta}) \in d\overline{H}_\mu(v, \overline{\beta})$ в точке $[v, \overline{\beta}]$. Для этого решим задачу

$$\min_{\overline{g} \in d\overline{H}_\mu(v,\overline{\beta})} ||\overline{g}||^2 = \min_{\gamma_i \in [0,1],\ i \in 1:n+2} \Big|\Big| \big[0, g_v, g_{\overline{\beta}_1}, \ldots, g_{\overline{\beta}_{n+1}}\big] +$$

$$+\mu\Big[\gamma_1\big[||v||^2 - 1 - \max\{0, ||v||^2 - 1\}, 2v(t), 0_{n+1}\big] + (1-\gamma_1)\big[-\max\{0, ||v||^2 - 1\}, 0_n, 0_{n+1}\big] +$$

$$+\gamma_2\big[\overline{\beta}_1^2 - 1 - \max\{0, \overline{\beta}_1^2 - 1\}, 0_n, 2\overline{\beta}_1, 0_n\big] + (1-\gamma_2)\big[-\max\{0, \overline{\beta}_1^2 - 1\}, 0_n, 0_{n+1}\big] + \cdots +$$

$$+\gamma_{n+2}\big[\overline{\beta}_{n+1}^2 - 1 - \max\{0, \overline{\beta}_{n+1}^2 - 1\}, 0_n, 0_n, 2\overline{\beta}_{n+1}\big] +$$

$$+ (1 - \gamma_{n+2})\big[- \max\{0, \overline{\beta}_{n+1}^2 - 1\}, 0_n, 0_{n+1}\big]\Big]\Big|\Big|^2. \tag{35}$$

Задача (35) представляет собой задачу квадратичного программирования при наличии линейных ограничений и может быть решена одним из известных методов [4]. Обозначим γ_i^*, $i \in 1 : n+2$, её решение. Пусть $\overline{g} = [\overline{g}_1, \overline{g}_2]$, где вектор-функция $\overline{g}_2$ состоит из последних $n + n + 1$ компонент $\overline{g}$. Тогда вектор-функция

$$\overline{\overline{\overline{G}}}(t, v, \overline{\beta}) := \overline{g}_2^* = \big[g_v, g_{\overline{\beta}_1}, \ldots, g_{\overline{\beta}_{n+1}}\big] +$$

$$+\mu\Big[\gamma_1^*\big[2v(t), 0_{n+1}\big] + (1-\gamma_1^*)\big[0_n, 0_{n+1}\big] + \gamma_2^*\big[0_n, 2\overline{\beta}_1, 0_n\big] + (1-\gamma_2^*)\big[0_n, 0_{n+1}\big] + \cdots +$$

$$+\gamma_{n+2}^*\big[0_n, 0_n, 2\overline{\beta}_{n+1}\big] + (1 - \gamma_{n+2}^*)\big[0_n, 0_{n+1}\big]\Big]$$

состоит из последних $n + n + 1$ компонент наименьшего по норме гипоградиента функционала $\overline{H}_\mu$ в точке $[v, \overline{\beta}]$. Если $||\overline{\overline{\overline{G}}}|| > 0$, то вектор-функция $-\overline{\overline{\overline{G}}}(t, v, \overline{\beta})/||\overline{\overline{\overline{G}}}||$ является направлением гипоградиентного спуска функционала $\overline{H}_\mu$ в точке $[v, \overline{\beta}]$.

Опишем следующий метод гиподифференциального спуска для поиска точек минимума функционала $\overline{H}_\mu(v, \overline{\beta})$.

Фиксируем произвольную точку $[v_1, \overline{\beta}_1] \in P_n[0,T] \times \mathbb{R}^{n+1}$.

Пусть уже построена точка $[v_k, \overline{\beta}_k] \in P_n[0,T] \times \mathbb{R}^{n+1}$. Если выполнено условие минимума (34), то точка $[v_k, \overline{\beta}_k]$ является точкой минимума функционала $\overline{H}_\mu(v, \overline{\beta})$, и процесс прекращается. В противном случае положим

$$[v_{k+1}, \overline{\beta}_{k+1}] = [v_k, \overline{\beta}_k] - \alpha_k \overline{\overline{\overline{G}}}_k,$$

где вектор-функция $\overline{\overline{\overline{G}}}_k = \overline{\overline{\overline{G}}}(t, v_k, \overline{\beta}_k)$ представляет собой вектор-функцию, состоящую из последних $n+n+1$ компонент наименьшего по норме гипоградиента функционала $\overline{H}_\mu$ в точке $[v_k, \overline{\beta}_k]$, а величина α_k является решением следующей задачи одномерной минимизации

$$\min_{\alpha \geqslant 0} \overline{H}_\mu([v_k, \overline{\beta}_k] - \alpha \overline{\overline{\overline{G}}}_k) = \overline{H}_\mu([v_k, \overline{\beta}_k] - \alpha_k \overline{\overline{\overline{G}}}_k). \tag{36}$$

Тогда $\overline{H}_\mu(v_{k+1}, \overline{\beta}_{k+1}) \leqslant \overline{H}_\mu(v_k, \overline{\beta}_k)$. Далее продолжаем аналогично.

Замечание 5. Если последовательность $\{[v_k, \overline{\beta}_k]\}$ бесконечна, то можно показать [6], что метод гиподифференциального спуска сходится в следующем смысле

$$||\overline{g}(v_k, \overline{\beta}_k)|| \to 0 \text{ при } k \to \infty.$$

Если последовательность $\{[v_k, \overline{\beta}_k]\}$ конечна, то последняя её точка является стационарной точкой функционала $\overline{H}_\mu(v, \overline{\beta})$ по построению.

Пусть в результате работы описанного метода получено решение задачи (31). Обозначим его v^*, β^*. Пусть $g = [g_1, g_2]$, где вектор-функция g_2 состоит из последних $n+m$ компонент g. Тогда вектор-функция

$$\overline{\overline{G}}(t, z, u) := g_2^* =$$

$$= \Big[\int_t^T \frac{\partial f_0}{\partial x} d\tau + \frac{\partial f_0}{\partial z} + \lambda \big[v^*(t) - \int_t^T \Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)' v^*(\tau) d\tau \big], \frac{\partial f_0}{\partial u} - \lambda \Big(\frac{\partial f}{\partial u}\Big)' v^*(t) \Big] +$$
$$+ \lambda \sum_{i=1}^n \big\{ \beta_i^* \big[e_i, 0_m\big] + (1 - \beta_i^*) \big[-e_i, 0_m\big] \big\} +$$
$$+ \lambda \beta_{n+1}^* \big[0_n, 2u(t)\big] + \lambda (1 - \beta_{n+1}^*) \big[0_n, 0_m\big] \tag{37}$$

состоит из последних $n+m$ компонент наименьшего по норме гипоградиента функционала F_λ в точке $[z, u]$ (при $\varphi(z, u) = 0$). Если $||\overline{\overline{G}}|| > 0$, то вектор-функция $-\overline{\overline{G}}(t, z, u) / ||\overline{\overline{G}}||$ является направлением гипоградиентного спуска функционала F_λ в точке $[z, u]$.

Таким образом, в пунктах А и Б решалась задача поиска направления гипоградиентного спуска функционала F_λ в точке $[z, u]$. В случае $\varphi(z, u) > 0$ (пункт А) данная задача решается сравнительно просто, так как представляет собой задачу квадратичного программирования при наличии линейных ограничений. В случае $\varphi(z, u) = 0$ (пункт Б) помимо неизвестных величин β_i, $i \in 1 : n+1$, требуется также найти вектор-функцию $v(t)$. Это более сложная задача, решать которую можно численными методами, например, методом гиподифференциального спуска, как это описано в пункте Б.

Замечание 6. Отметим, что в силу структуры функционала $\overline{H}_\mu$ задача (36) поиска шага спуска решается аналитически. Кроме того, задача (35) нахождения направления спуска с помощью методов квадратичного программирования может быть решена за конечное число итераций.

Итак, теперь можно описать метод гиподифференциального спуска для поиска стационарных точек функционала $F_\lambda(z, u)$.

Фиксируем произвольную точку $[z_1, u_1] \in P_n[0, T] \times P_m[0, T]$.

Пусть уже построена точка $[z_k, u_k] \in P_n[0, T] \times P_m[0, T]$. Если выполнено условие минимума (16) или (28), то точка $[z_k, u_k]$ является стационарной точкой функционала $F_\lambda(z, u)$, и процесс прекращается. В противном случае положим

$$[z_{k+1}, u_{k+1}] = [z_k, u_k] - \alpha_k \overline{\overline{G}}_k,$$

где вектор-функция $\overline{\overline{G}}_k = \overline{\overline{G}}(t, z_k, u_k)$ представляет собой вектор-функцию, состоящую из последних $n+m$ компонент наименьшего по норме гипоградиента функционала F_λ в точке $[z_k, u_k]$. Значение для функционала $\overline{\overline{G}}_k$ берётся либо из формулы (30) при $\varphi(z_k, u_k) > 0$, либо из формулы (37) при $\varphi(z_k, u_k) = 0$. Величина α_k является решением следующей задачи одномерной минимизации

$$\min_{\alpha \geqslant 0} F_\lambda([z_k, u_k] - \alpha \overline{\overline{G}}_k) = F_\lambda([z_k, u_k] - \alpha_k \overline{\overline{G}}_k).$$

Тогда $F_\lambda(z_{k+1}, u_{k+1}) \leqslant F_\lambda(z_k, u_k)$. Далее продолжаем аналогично.

Относительно сходимости последовательности $\{[z_k, u_k]\}$ справедливо замечание, аналогичное замечанию 5.

6°. Численные примеры. Приведём примеры задач построения оптимального управления, в которых метод субдифференциального спуска привёл к точке минимума функционала (8).

ПРИМЕР 1. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u_1, \\ \dot{x}_3 = x_4, \\ \dot{x}_4 = u_2 - 9.8 \end{cases}$$

с граничными условиями

$$x(0) = [-1, 0, 0, 0], \quad x(1) = [0, 0, 0, 0].$$

Требуется минимизировать функционал

$$I = \int_0^1 u_1^2(t) + u_2^2(t)\ dt.$$

В данной задаче известно [7] аналитическое решение, которое имеет следующий вид

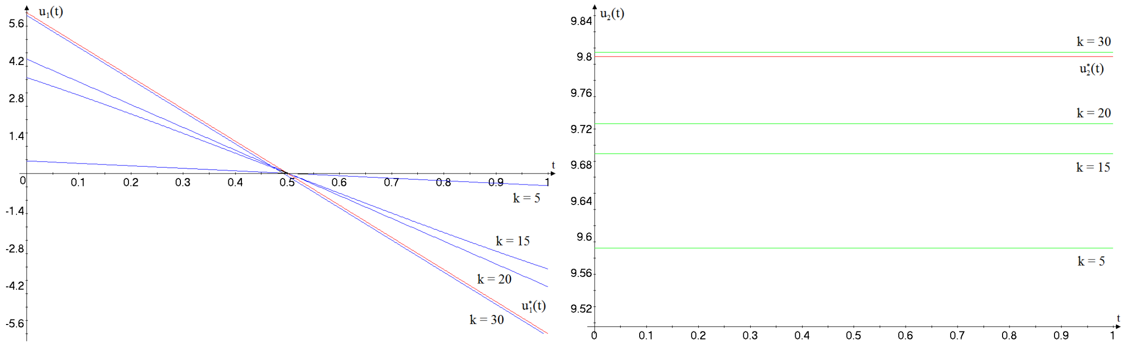
$$u_1^*(t) = -12t + 6,$$
$$u_2^*(t) = 9.8,$$
$$z_1^*(t) = -6t^2 + 6t,$$
$$z_2^*(t) = -12t + 6,$$
$$z_3^*(t) = 0,$$
$$z_4^*(t) = 0,$$
$$I(z^*, u^*) = 108.04.$$

В Таблице 1 приведены результаты работы метода субдифференциального спуска. В качестве начального приближения взята точка $u = [0, 1]$, $z(t) = [1, 0, 0, 0]$, а тогда $x(t) = [-1 + t, 0, 0, 0]$. Из Таблицы 1 видно, что на 30-й итерации погрешность не превышает величины 3×10^{-3}.

Таблица 1.

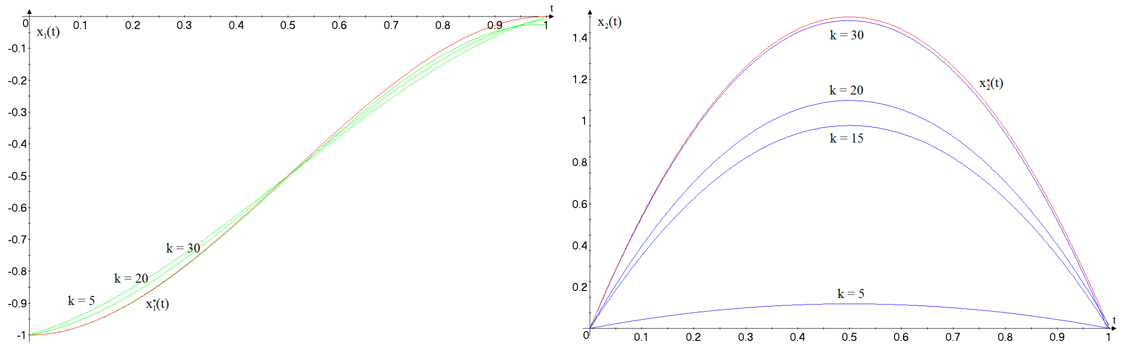
k	$I(z_k, u_k)$	$\Phi(z_k, u_k)$	$\|\|u^* - u_k\|\|$	$\|\|z^* - z_k\|\|$	$\|\|G(z_k, u_k)\|\|$
1		1.06044	3.47062	3.21367	197.96324
2		0.94422	3.20293	3.22259	707.22868
10		0.34105	1.15682	1.38112	848.13142
20		0.20739	0.72749	0.69893	256.2921
30	108.0425		0.05774	0.02886	0.425

На рисунках 1–3 изображены управления, фазовые координаты и их производные соответственно на некоторых итерациях. Последние две фазовые координаты и их производные не отображены, так как их значения не менялись в ходе итераций. Красным цветом выделен оптимальный процесс.



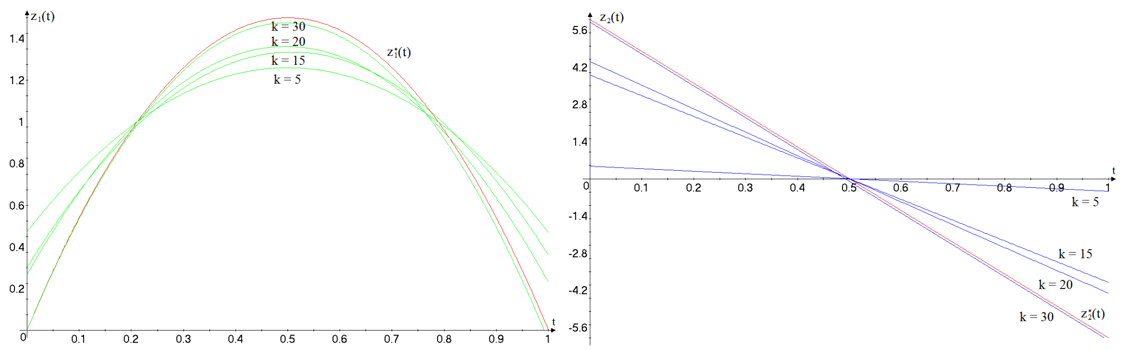
$u_1(t)$ $u_2(t)$

Рис. 1. Значения $u(t)$ на некоторых итерациях.



$x_1(t)$ $x_2(t)$

Рис. 2. Значения $x(t)$ на некоторых итерациях.



$z_1(t)$ $z_2(t)$

Рис. 3. Значения $z(t)$ на некоторых итерациях.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим ещё один пример. Пусть задана следующая система

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + u_1, \\ \dot{x}_2 = u_2 \end{cases}$$

с граничными условиями

$$x(0) = [2, 0.5], \quad x(1) = [x_1(1), 0]$$

и ограничением на управление

$$\int_0^1 u_1^2(t) + u_2^2(t)\ dt \leqslant 1.$$

Требуется минимизировать функционал

$$I = \int_0^1 z_1(t)\ dt.$$

В данной задаче также известно [8] аналитическое решение, которое имеет следующий вид

$$u_1^*(t) = -\sqrt{\frac{9}{13}},$$

$$u_2^*(t) = \sqrt{\frac{9}{13}}t - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{9}{13}} - \frac{1}{2},$$

$$z_1^*(t) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{9}{13}}t^2 - \frac{1}{2}(\sqrt{\frac{9}{13}} + 1)t + \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{9}{13}},$$

$$z_2^*(t) = \sqrt{\frac{9}{13}}t - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{9}{13}} - \frac{1}{2},$$

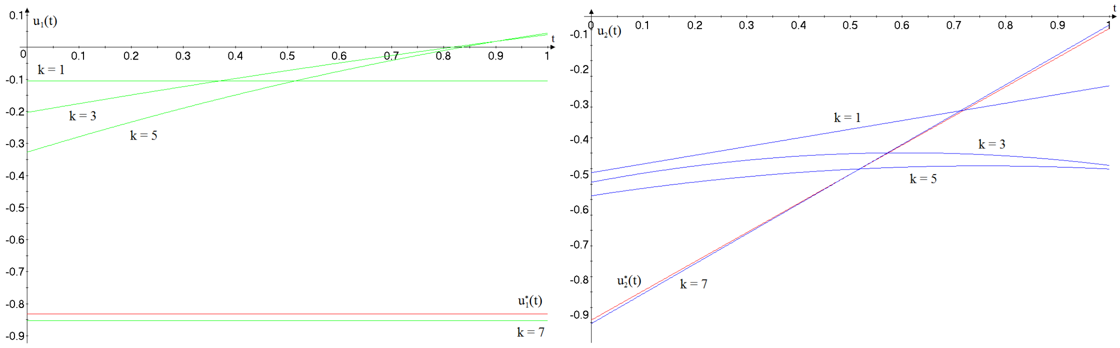
$$I(z^*, u^*) = \frac{1}{4}(1 - \sqrt{13}).$$

В Таблице 2 приведены результаты работы метода субдифференциального спуска. В качестве начального приближения взята точка $u = [0, 0]$, $z(t) = [0, 0]$, а тогда $x(t) = [2, 0.5]$. Из Таблицы 2 видно, что на 7-й итерации погрешность не превышает величины 5×10^{-3}.

Таблица 2.

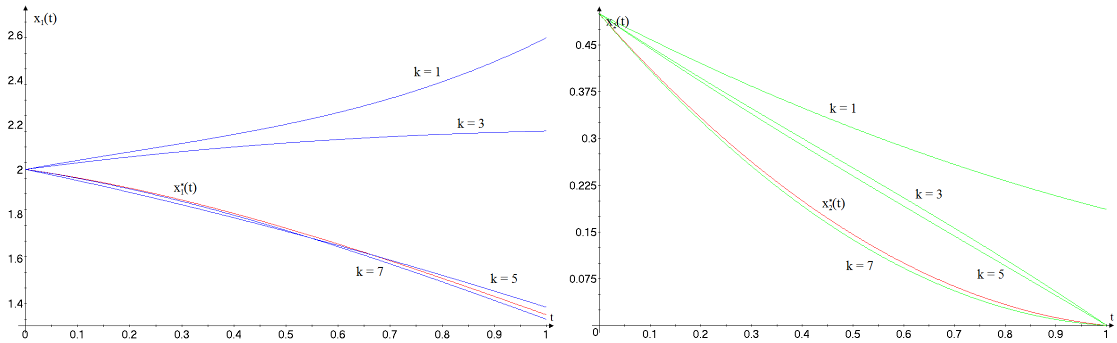
k	$I(z_k, u_k)$	$\Phi(z_k, u_k)$	$\|\|u^* - u_k\|\|$	$\|\|z^* - z_k\|\|$	$\|\|G(z_k, u_k)\|\|$
1		1.0	1.00004	0.86826	188.77058
2		0.51873	0.91483	0.90879	76.71471
5		0.00243	0.79148	0.85081	112.2858
6	−0.61768		0.23167	0.23273	0.70711
7	−0.6464		0.08873	0.1132	0.21357

На рисунках 4–6 изображены управления, фазовые координаты и их производные соответственно на некоторых итерациях. Красным цветом выделен оптимальный процесс.



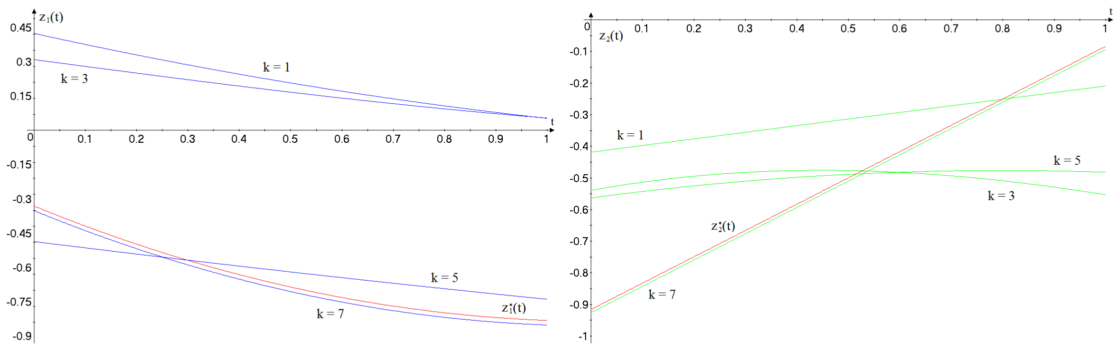
$u_1(t)$ $u_2(t)$

Рис. 4. Значения $u(t)$ на некоторых итерациях.



$x_1(t)$ $x_2(t)$

Рис. 5. Значения $x(t)$ на некоторых итерациях.



$z_1(t)$ $z_2(t)$

Рис. 6. Значения $z(t)$ на некоторых итерациях.

ПРИМЕР 3. В заключение рассмотрим один нелинейный пример. Пусть задана следующая система

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u, \\ \dot{x}_2 = x_1^2 \end{cases}$$

с граничными условиями

$$x(0) = [0.25, 0], \quad x(1) = [0.25, x_2(1)]$$

и ограничением на управление

$$\int_0^1 u_1^2(t) + u_2^2(t)\ dt \leqslant 1.$$

Требуется минимизировать функционал

$$I = \int_0^1 z_2(t)\ dt.$$

Данный пример рассмотрен в работе [9] при более жёстком ограничении на управление $|u(t)| \leqslant 1$, $t \in [0, 1]$, где также указано оптимальное значение функционала

$$I(z^*, u^*) = \frac{1}{96}.$$

В Таблице 3 приведены результаты работы метода субдифференциального спуска. В качестве начального приближения взята точка $u = 10t - 5$, $z(t) = [10t - 5, (0.25 + 5t^2 - 5t)^2]$, а тогда $x(t) = [0.25 + 5t^2 - 5t, 5t^5 - 12.5t^4 + 9.1(6)t^3 - 1.25t^2 + 0.0625t]$. Из Таблицы 3 видно, что на 8-й итерации метод привёл к значению, отличающемуся от значения $I(z^*, u^*)$ не более, чем на величину 5×10^{-3}, однако в силу рассматриваемого менее жёсткого ограничения на управление и нелинейности системы нельзя гарантировать, что данное значение является глобальным минимумом в этой задаче.

Таблица 3.

k	$I(z_k, u_k)$	$\Phi(z_k, u_k)$	$\|\|G(z_k, u_k)\|\|$
1		8.3333	486.44
2		0.43953	102.93801
5		0.10272	130.33683
7		0.00025	99.303
8	0.01579		0.1127

В рассмотренных примерах метод гиподифференциального спуска показал аналогичные результаты.

7°. Заключение. Таким образом, в данном докладе задача построения оптимального управления сводится к вариационной задаче минимизации некоторого негладкого функционала на всём пространстве. Для этого функционала выписаны субдифференциал и гиподифференциал, найдены необходимые условия минимума, которые в случае линейности исходной системы по фазовым переменным и управлению оказываются и достаточными. На основании этих условий описываются метод субдифференциального спуска и метод гиподифференциального спуска для данной задачи. Приведены численные примеры реализации описанных методов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Карелин В. В. *Точные штрафы в одной задаче управления* // Автоматика и телемеханика. 2004. № 3. С. 137–147.

2. Фоминых А. В. *Численные методы в задаче построения программного управления* // Семинар «CNSA & NDO». Избранные доклады. 9 октября 2014 г.

3. Тамасян Г. Ш. *Численные методы в задачах вариационного исчисления для функционалов, зависящих от производных высшего порядка* // Проблемы математического анализа. 2012. Вып. 67. С. 113–132.

4. Даугавет В. А. Численные методы квадратичного программирования. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2004. 128 с.

5. Демьянов В. Ф., Рубинов А. М. Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. М.: Наука, 1990. 432 с.

6. Демьянов В. Ф. Условия экстремума и вариационное исчисление. М.: Высш. шк., 2005. 335 с.

7. Красовский Н. Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.

8. Егоров А. И. Основы теории управления. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 504 с.

9. Kumar V. *A control averaging technique for solving a class of singular optimal control problems* // Internat. J: Control, 1976, vol. 23, no. 3, pp. 361–380.