МИНИМИЗАЦИЯ ЦИКЛИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ*

А. В. Плоткин

avplotkin@gmail.com

17 декабря 2015 г.

1°. Неравенство Шапиро. Рассмотрим циклическую функцию вида

$$F_n(x) = \frac{x_1}{x_2 + x_3} + \frac{x_2}{x_3 + x_4} + \ldots + \frac{x_{n-1}}{x_n + x_1} + \frac{x_n}{x_1 + x_2},$$

где $x_i \geqslant 0$, $i \in 1 : n$, и все знаменатели отличны от нуля.

В 1954 г. Г. Шапиро выдвинул гипотезу о том, что при $n \geqslant 3$ справедливо следующее неравенство:

$$F_n(x) \geqslant \frac{n}{2}.$$

На тот момент у него имелось доказательство только для случаев $n = 3$ и $n = 4$.

Отметим важное свойство этого неравенства:

ЛЕММА. *Если неравенство Шапиро неверно при некотором $n = k$, то оно неверно и при $n = k + 2$.*

Доказательство. Пусть $F_n(x') < \frac{n}{2}$. Рассмотрим $x'' = (x'_1, \ldots, x'_n, x'_1, x'_2)$. Заметим, что $F_{n+2}(x'') = F_n(x') + 1$, следовательно, $F_{n+2}(x'') < \frac{n+2}{2}$. $\square$

Гипотеза Шапиро вызвала широкий интерес математиков (см., например, [1, 2]), но только к 1989 г. коллективными усилиями удалось установить, что неравенство Шапиро верно дня четных $n \leqslant 12$ и нечетных $n \leqslant 23$. Для $n = 14$ и $n = 25$ неравенство нарушается, а значит, по доказанной лемме, нарушается и для всех четных $n > 14$ и нечетных $n > 25$.

*Семинар по конструктивному негладкому анализу и недифференцируемой оптимизации «CNSA & NDO»: `http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/`

2°. Постановка задачи и метод решения. Целью работы являлся поиск значений x, при которых нарушается неравенство Шапиро в случаях $n = 14$ и $n = 25$. Для этого рассмотрим экстремальную задачу следующего вида:

$$F_n(x) \to \min, \quad x_i \geqslant 0,\ i \in 1:n.$$

Стоит отметить, что при $n \geqslant 3$ для всех векторов x с положительными компонентами справедлива оценка Дринфельда

$$F_n(x) > c\,\frac{n}{2},$$

где $c = 0.989$ [2].

Сделаем замену $x_i = y_i^2$ и перейдем к задаче безусловной оптимизации:

$$G_n(y) := \frac{y_1^2}{y_2^2 + y_3^2} + \frac{y_2^2}{y_3^2 + y_4^2} + \ldots + \frac{y_{n-1}^2}{y_n^2 + y_1^2} + \frac{y_n^2}{y_1^2 + y_2^2} \to \min_{y \in \mathbb{R}^n}.$$

Решать поставленную задачу будем методом сопряженных градиентов без точного линейного поиска [3–5]. Опишем вычислительную схему данного метода.

Нулевой шаг. Берем начальное приближение y_0 и вычисляем градиент $g_0 = G'(y_0)$. Если $g_0 = \mathbb{O}$, то возвращаем y_0 в качестве ответа. Вычисления прекращаются. Иначе полагаем $s_1 = -g_0$.

k-й шаг. Пусть уже имеются y_{k-1}, $g_{k-1} \neq \mathbb{O}$ и s_k. Если s_k не является направлением убывания $G(y)$, то возвращаемся на нулевой шаг с начальным приближением y_{k-1}. Иначе находим t_k из условия Армихо (см. ниже) и вычисляем

$$\begin{aligned} y_k &= y_{k-1} + t_k s_k, \\ g_k &= G'(y_k). \end{aligned}$$

Если $g_k = \mathbb{O}$, то возвращаем y_k в качестве ответа. Вычисления прекращаются. В противном случае, если $k = n$, то возвращаемся на нулевой шаг с начальным приближением y_k. Если же $k < n$, то находим

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{\langle g_k, g_k - g_{k-1} \rangle}{\langle s_k, g_k - g_{k-1} \rangle}, \\ s_{k+1} &= -g_k + b_k s_k. \end{aligned}$$

Условие Армихо. Опишем, как по правилу Армихо находить t_k. Пусть заданы параметры $\lambda > 0$, $\delta, c \in (0, 1)$. Величина t_k выбирается итеративно. Изначально $t_k := \lambda$. На каждой итерации проверяется выполнение условия

$$G(y_k + t_k s_k) < G(y_k) + c\, t_k \langle G'(y_k), s_k \rangle.$$

В случае его выполнения вычисления прекращаются. Иначе полагаем $t_k := \delta t_k$ и переходим к следующей итерации. Процедура выбора обязательно завершится, так как s_k — направление убывания $G(y)$. При решении использовались значения $\lambda = 1$, $\delta = 0.5$, $c = 0.1$.

3°. Начальное приближение. Запуск алгоритма из случайных начальных приближений редко приводил к тому, что в получившихся точках значение функции было меньше $\frac{n}{2}$. Анализ успешных случаев при $n = 14$ позволил сделать предположение о структуре решения. На этом основании начальное приближение выбиралось следующим:

$$y_0 = [\alpha, \beta_1, \ldots, \alpha, \beta_7],$$

где α — случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[0.7, 0.9]$, а β_i — независимые случайные величины, равномерно распределенные на отрезке $[0, 0.2]$. Алгоритм был запущен 10000 раз из точек такого вида и каждый раз получалась точка, значение функции в которой было меньше $\frac{n}{2}$.

При $n = 25$ успеха удалось добиться, когда в качестве начального приближения брались точки вида

$$y_0 = [\alpha, \beta_1, \ldots, \alpha, \beta_{12}, \alpha],$$

где α и β_i — такие же случайные величины, что и при $n = 14$. Алгоритм был снова 10000 раз запущен из точек указанного вида и вновь в каждом случае привел к решению. Стоит отметить, что значение функции в точках, взятых в качестве начального приближения, для $n = 14$ очень близко к $\frac{n}{2}$, а для $n = 25$ уже достаточно сильно отличается от $\frac{n}{2}$.

4°. Результаты вычислений. Было получено большое количество значений x, при которых $F_n(x) < \frac{n}{2}$ для $n = 14$ и $n = 25$. Многие из них были приведены к целочисленному виду.

1) $n = 14$

- $x = [78, 7, 75, 8, 71, 6, 70, 3, 71, 1, 74, 1, 77, 3]$, $F_{14}(x) = 6.99996$;
- $x = [73, 8, 70, 6, 68, 3, 69, 1, 72, 1, 75, 3, 76, 7]$, $F_{14}(x) = 6.99994$;
- $x = [74, 6, 72, 3, 73, 1, 76, 1, 79, 3, 80, 7, 77, 8]$, $F_{14}(x) = 6.99991$.

2) $n = 25$

- $x = [39, 39, 38, 28, 36, 19, 35, 11, 35, 4, 39, 0, 46, 0, 55, 0, 65, 0, 77, 12, 79, 29, 68, 38, 53]$, $F_{25}(x) = 12.49896$;
- $x = [49, 48, 47, 35, 44, 23, 43, 13, 44, 5, 48, 0, 57, 0, 68, 0, 80, 0, 95, 15, 97, 36, 83, 47, 65]$, $F_{25}(x) = 12.49885$;
- $x = [43, 43, 41, 30, 39, 20, 38, 12, 39, 5, 43, 0, 51, 0, 60, 0, 71, 0, 84, 13, 86, 32, 74, 41, 57]$, $F_{25}(x) = 12.49881$.

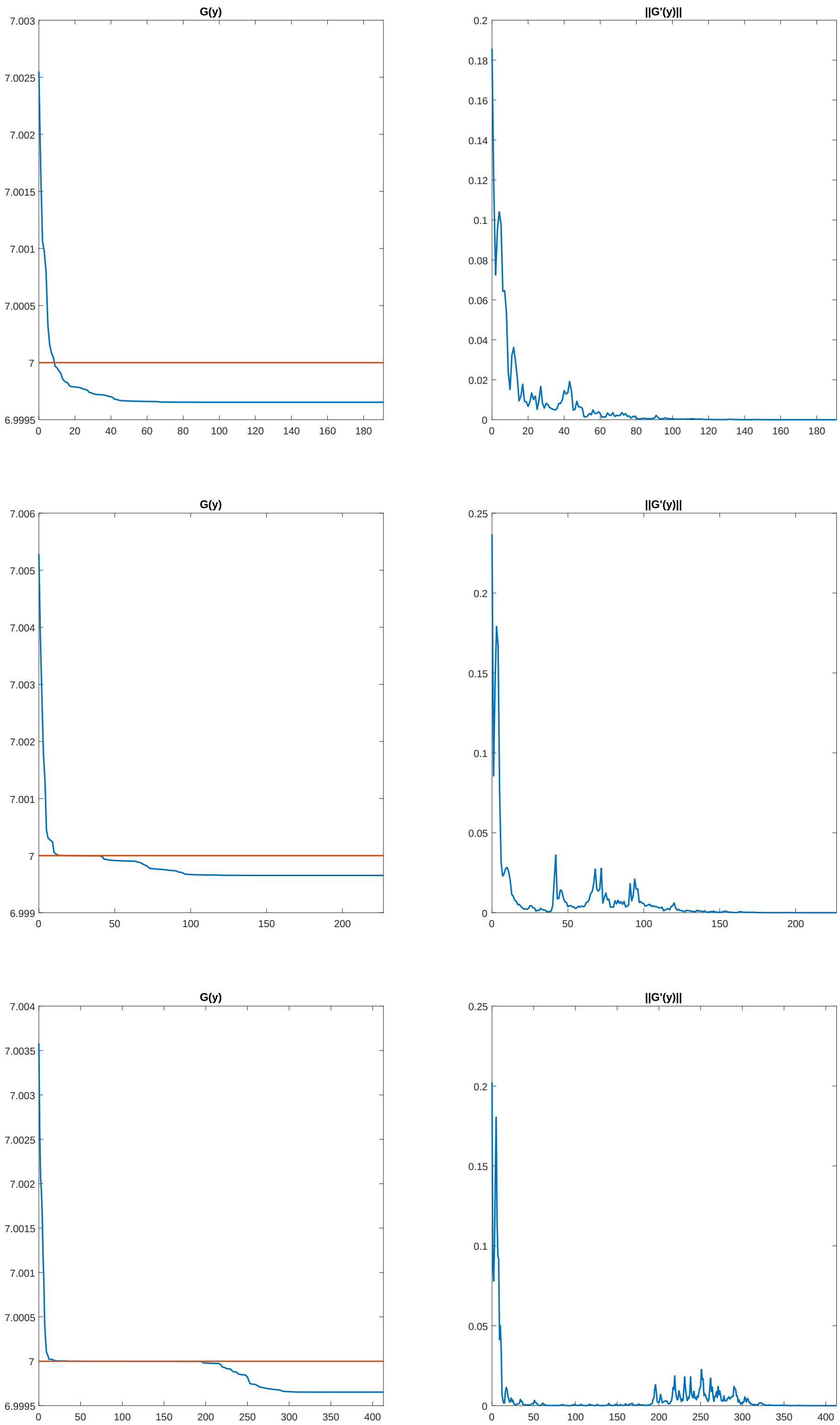

Рис. 1. Поведение функции $G(y)$ и её градиента по итерациям при $n = 14$ и различных начальных приближениях.

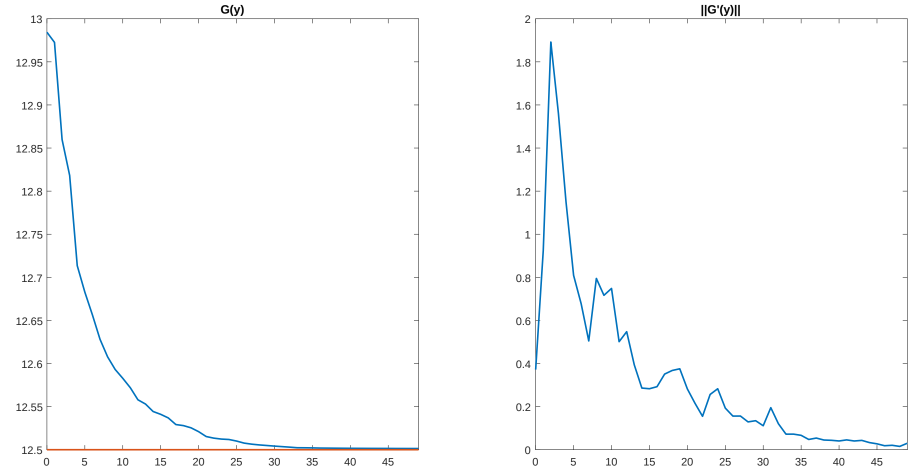

Рис. 2. Поведение функции $G(y)$ и её градиента по итерациям при $n = 25$ до 50-й итерации.

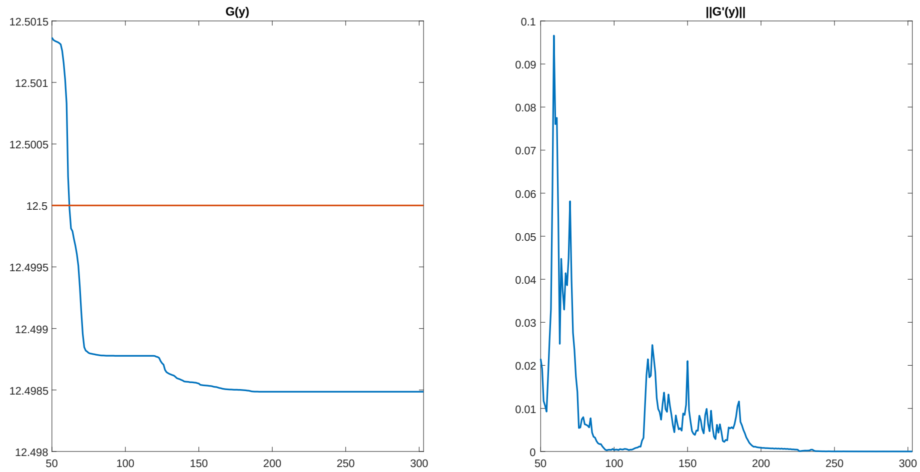

Рис. 3. Поведение функции $G(y)$ и её градиента по итерациям при $n = 25$ после 50-й итерации.

5°. Заключение. Отметим, что метод сопряженных градиентов без точного линейного поиска оказался эффективным при решении данной задачи. В дальнейшем планируется испытание этого метода на различных целевых функциях с другими способами выбора t_k.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Храбров. *Неравенство Шапиро*
(http://olympiads.mccme.ru/lktg/2010/5/5-1ru.pdf)

2. В. Н. Малоземов. *Циклические функции и экстремальные задачи* // Семинар «CNSA & NDO». Избранные доклады. 27 августа 2015 г.
(http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/reps15.shtml#0827)

3. Малозёмов В. Н. *О методе сопряжённых градиентов* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 28 апреля 2012 г.
(http://http://dha.spb.ru/reps12.shtml#0428)

4. Малозёмов В. Н. *Варианты метода сопряжённых градиентов* // Семинар «CNSA & NDO». Избранные доклады. 29 октября 2015 г.
(http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/reps15.shtml#1029)

5. Pytlak R. Conjugate Gradient Algorithms in Nonconvex Optimization. Berlin: Springer, 2009. P. 478.