ГЛАДКАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ*

Л.Н. Полякова
lnpol07@mail.ru

9 апреля 2015 г.

1°. Введение. Некоторые определения и утверждения из выпуклого анализа. Выпуклый анализ является одним из наиболее глубоко исследованных разделов негладкого анализа. В отсутствие гладкости свойство выпуклости дает возможность использовать богатый набор аналитических средств для развития содержательной теории условий оптимальности. Понятия выпуклого множества и выпуклой функции являются основными в выпуклом анализе [1]. Выпуклые множества и выпуклые функции — основной инструмент в теоретических исследованиях во многих вопросах недифференцируемой оптимизации. Сформулируем некоторые определения и утверждения ([1],[2]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Суммой двух выпуклых множеств $X_1, X_2 \subset \mathbb{R}^n$ называется множество

$$X = X_1 + X_2 = \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in X_1, \quad x_2 \in X_2\}.$$

Иногда множество $X = X_1 + X_2$ называют алгебраической суммой двух выпуклых множеств X_1 и X_2 или суммой Минковского. Под записью $X_1 - X_2$ будем понимать множество $X_1 + (-X_2)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Гиперплоскость

$$H(g, \alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n | \langle x, g \rangle = \alpha\}$$

называется опорной в граничной точке x выпуклого множества $X \subset \mathbb{R}^n$, если множество X лежит в одном из полупространств, порождаемых гиперплоскостью $H(g, \alpha)$ и $x \in H(g, \alpha)$.

*Семинар по конструктивному негладкому анализу и недифференцируемой оптимизации «CNSA & NDO»: `http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/`

Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклый конус.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Конус

$$K^* = \{g \in \mathbb{R}^n \mid \langle g, x \rangle \geqslant 0 \quad \forall x \in K\}$$

называется конусом, сопряженным к конусу K.

Пусть множество $X \subset \mathbb{R}^n$ замкнуто и выпукло, точка $x \in \mathbb{R}^n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Множество

$$N(X, x) = \left\{ g \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \langle g, z - x \rangle \leqslant 0 \quad \forall z \in X \right\}$$

называется нормальным конусом к множеству X в точке x.

Отметим некоторые свойства нормальных конусов.

1. Нормальный конус является замкнутым выпуклым конусом.

2. Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутое выпуклое множество. Если точка x принадлежит X, то справедлива формула

$$N(X, x) = -[\mathrm{cone}\ (X - x)]^* = -\Gamma^*(X, x),$$

где $\Gamma(X, x)$ — конус возможных направлений относительно множества X в точке x, а через cone A обозначена выпуклая коническая оболочка множества A.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Замкнутое выпуклое множество называется гладким, если в каждой его граничной точке существует единственная опорная гиперплоскость.

Таким образом, если нормальный конус в каждой граничной точке замкнутого выпуклого множества состоит из единственного луча, то множество является гладким.

Класс выпуклых функций является одним из наиболее изученных среди семейства негладких функций. Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \bigcup \{+\infty\} \bigcup \{-\infty\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Множество

$$\mathrm{dom}\ f = \{x \in \mathbb{R}^n \;\big|\; f(x) < +\infty\}$$

называется эффективной областью или эффективным множеством функции f.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Множество

$$\mathrm{epi}\ f = \{[x, \mu] \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \;\big|\; f(x) \leqslant \mu\}$$

называется надграфиком этой функции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Функция f называется выпуклой, если ее надграфик есть выпуклое множество в $\mathbb{R}^{n+1}$.

В дальнейшем будут рассматриваться только собственные выпуклые функции — функции, заданные на всем евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ и принимающие как конечные значения, так и $+\infty$, но тождественно не равные $+\infty$.

Для собственных выпуклых функций можно дать другое определение, эквивалентное вышеприведенному.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ называется выпуклой, если выполняется соотношение

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leqslant \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n,$$

$$\lambda_1, \lambda_2 \geq 0,\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Функция f называется замкнутой функцией, если ее надграфик — замкнутое множество.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. Функция

$$f^*(v) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{\langle x, v\rangle - f(x)\},\ v \in \mathbb{R}^n,$$

называется функцией, сопряженной к функции f.

Очевидно, что справедливо также равенство

$$f^*(v) = \sup_{x \in \mathrm{dom}\ f} \{\langle x, v\rangle - f(x)\},\ v \in \mathbb{R}^n.$$

Сопряженные функции играют важную роль в теории двойственности. Отметим некоторые их свойства [1].

1. Сопряженная функция замкнута и выпукла.
2. Справедливо неравенство Юнга-Фенхеля

$$f(x) + f^*(v) \geq \langle x, v\rangle \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall v \in \mathbb{R}^n.$$

3. Если f — собственная выпуклая замкнутая функция, то f^* — собственная выпуклая замкнутая функция, и при этом справедливо равенство

$$f(x) = f^{**}(x).$$

Примеры сопряженных функций.

1. Пусть $f(x) = \dfrac{1}{2}\langle Ax, x\rangle, \quad x \in \mathbb{R}^n$, где A — положительно определенная матрица. Тогда

$$f^*(v) = \frac{1}{2}\langle A^{-1}v, v\rangle, \quad v \in \mathbb{R}^n.$$

2. Пусть множество $X \subset \mathbb{R}^n$ замкнуто и выпукло и

$$f(x) = \delta(X, x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Тогда

$$f^*(v) = \sup_{x \in X}\langle x, v\rangle = p(v, X).$$

Опорная функция множества X является сопряженной к индикаторной функции этого множества.

3. Пусть f_1 — конечная на $\mathbb{R}^n$ выпуклая функция, множество $X \subset \mathbb{R}^n$ выпукло и замкнуто. Рассмотрим функцию

$$f(x) = f_1(x) + \delta(x, X).$$

Тогда

$$f^*(v) = \sup_{x \in X}(\langle x, v\rangle - f_1(x)).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. Будем называть собственную выпуклую функцию f, существенно гладкой, если она удовлетворяет следующим трем условиям:

1. множество $C = \mathrm{int}\ (\mathrm{dom\ f})$ не пусто;

2. функция f дифференцируема в каждой точке из C;

3. если $x_1, x_2, \ldots$ — последовательность элементов из C, сходящаяся к точке $x \notin C$, то

$$\lim_{i \to +\infty} |f'(x_i)| = +\infty.$$

Заметим, что всякая гладкая выпуклая функция на $\mathbb{R}^n$ будет и существенно гладкой, так как множество последовательностей, удовлетворяющих последнему условию пусто.

2°. Инфимальная конволюция выпуклых функций. Пусть $f_1, f_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ — собственные выпуклые функции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13. Функция

$$f(x) = \inf_{\substack{x_1 + x_2 = x \\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n}} \{f_1(x_1) + f_2(x_2)\} = \inf_{x_1 \in \mathbb{R}^n}\{f_1(x_1) + f_2(x - x_1)\}$$

называется инфимальной конволюцией функций f_1, f_2 и обозначается

$$f(x) = (f_1 \oplus f_2)(x).$$

Функция f является выпуклой на $\mathbb{R}^n$. Операция взятия инфимальной конволюции двух выпуклых функции коммутативна и ассоциативна.

Инфимальную конволюцию также можно определить в терминах сложения надграфиков функций f_1 и f_2:

$$(f_1 \oplus f_2)(x) = \inf \left\{ \ \mu \in \mathbb{R} \ \middle| \ (x, \mu) \in [\ \mathrm{epi} \ f_1 + \mathrm{epi} \ f_2 \ ] \ \right\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14. Будем называть инфимальную конволюцию $f_1 \oplus f_2$ точной в точке $x = x_1 + x_2$, если

$$f_1(x_1) + f_2(x_2) = \min_{\substack{y_1 + y_2 = x \\ y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n}} \{f_1(y_1) + f_2(y_2)\}.$$

Отметим некоторые свойства выпуклых функций, полученных в результате инфимальной конволюции.

1) Пусть f_1 и f_2 выпуклые функции, тогда

$$\mathrm{dom} \ (f_1 \oplus f_2) = \mathrm{dom} \ f_1 + \mathrm{dom} \ f_2.$$

2) Пусть f_1 и f_2 — замкнутые собственные выпуклые функции на $\mathbb{R}^n$. Тогда

$$(f_1 \oplus f_2)^* = f_1^* + f_2^*. \tag{1}$$

Если

$$\mathrm{ri} \ (\mathrm{dom} \ f_1) \cap \mathrm{ri} \ (\mathrm{dom} \ f_2) \neq \emptyset,$$

то

$$(f_1 + f_2)^* = f_1^* \oplus f_2^*.$$

Таким образом, операция инфимальной конволюции в некотором смысле двойственна операции сложения.

3) Пусть f_1 и f_2 — замкнутые собственные выпуклые функции на $\mathbb{R}^n$, причем

$$\mathrm{ri} \ (\mathrm{dom} \ f_1) \cap \mathrm{ri} \ (\mathrm{dom} \ f_2) \neq \emptyset,$$

тогда, если f_1 — существенно гладкая функция, то и $f_1 \oplus f_2$ - существенно гладкая.

4) Если функции f_1 и f_2 не равны тождественно $+\infty$ и инфимальная конволюция $f_1 \oplus f_2$ точна в точке $x = x_1 + x_2$, то

$$\partial(f_1 \oplus f_2)(x) = \partial f_1(x_1) \cap \partial f_2(x_2).$$

Пусть f_1 — конечная выпуклая на $\mathbb{R}^n$ функция и $f_2(x) = \dfrac{1}{2}\langle Mx, x\rangle$, где M — положительно определенная матрица. Функция

$$f(x) = (f_1 \oplus f_2)(x) = \inf_{y \in \mathbb{R}^n} \left\{ f_1(y) + \frac{1}{2}\langle M(x-y), (x-y)\rangle \right\}.$$

называется регуляризацией Моро-Иосида.

ПРИМЕР 1. Пусть X_1 и X_2 — выпуклые множества в $\mathbb{R}^n$ и $f_1(x) = \delta(X_1, x)$, $f_2(x) = \delta(X_2, x)$ — их индикаторные функции, тогда

$$f(x) = (f_1 \oplus f_2)(x) = \delta(X_1 + X_2)(x).$$

Например, если

$$X_1 = \mathrm{co}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^2, \quad X_2 = \mathrm{co}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^2,$$

то

$$\delta(X_1, x) = \left\{ \begin{array}{cl} 0, & x \in X_1, \\ +\infty, & x \notin X_1, \end{array} \right. , \quad \delta(X_2, x) = \left\{ \begin{array}{cl} 0, & x \in X_2, \\ +\infty, & x \notin X_2, \end{array} \right.$$

$$X_1 + X_2 = \mathrm{co}\ \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^2,$$

$$\delta(X_1 + X_2, x) = \left\{ \begin{array}{cl} 0, & x \in X_1 + X_2, \\ +\infty, & x \notin X_1 + X_2. \end{array} \right.$$

ПРИМЕР 2. Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклое множество, $f_1(x) = \delta(X, x)$ — индикаторная функция этого множества, f_2 — выпуклая функция, тогда

$$f(x) = (f_1 \oplus f_2)(x) = \inf_{x_1 \in X} f_2(x - x_1).$$

Пусть

$$X = \mathrm{co}\ \{-1, 1\} \subset \mathbb{R}, \quad f_1(x) = \delta(X, \cdot x), \quad f_2(x) = x^2,\ x \in \mathbb{R}.$$

Тогда

$$f(x) = (f_1 \oplus f)(x) = \left\{ \begin{array}{cc} (1+x)^2, & x < -1, \\ 0, & |x| \leqslant 1, \\ (1-x)^2, & x > 1. \end{array} \right.$$

ПРИМЕР 3. Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклое множество, $f_1(x) = \delta(X, x)$ — индикаторная функция этого множества, $f_2(x) = ||x||$, $x \in \mathbb{R}^n$, тогда

$$f(x) = (f_1 \oplus f_2)(x) = \inf_{x_1 \in X} ||x - x_1||.$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Определим функцию

$$t_\varepsilon(x) = \begin{cases} -\sqrt{\varepsilon^2 - \langle x, x \rangle}, & ||x|| \leqslant \varepsilon, \\ +\infty, & ||x|| > \varepsilon, \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Функция $t_\varepsilon(x)$ конечна лишь в шаре радиуса ε с центром в нулевой точке и является существенно гладкой, т.е., она дифференцируема в каждой внутренней точке $x \in \text{int dom } t_\varepsilon$, и, если $x_1, x_2, \ldots$ — последовательность элементов из int dom t_ε, сходящаяся к точке $x \notin \text{int dom } t_{2\varepsilon}$, то

$$\lim_{i \to +\infty} |f'(x_i)| = +\infty.$$

.

Нетрудно заметить, что

$$t^*_\varepsilon(v) = \varepsilon\sqrt{1 + \langle v, v \rangle}, \quad v \in \mathbb{R}^n, \quad \varepsilon > 0.$$

Поэтому эффективная область функции t^*_ε, сопряженной к функции t_ε, будет все пространство $\mathbb{R}^n$.

3°. Гладкая аппроксимация выпуклых множеств. Пусть множество $X \subset \mathbb{R}^n$ замкнуто и выпукло и не совпадает с $\mathbb{R}^n$.

Образуем замкнутое выпуклое множество

$$Z_\varepsilon = X + \varepsilon B_1(0_n), \qquad \varepsilon > 0,$$

где

$$B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x - x_0|| \leqslant r\}.$$

Здесь и далее рассматривается только евклидова норма $||x|| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. Отметим, что Z_ε — множество с непустой внутренностью при любом положительном ε.

ТЕОРЕМА 1. *Нормальный конус в произвольной граничной точке $z_0 \in \in bd\ (Z_\varepsilon)$ к множеству Z_ε состоит из единственного луча.*

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Выберем граничную точку $z_0 \in \in \text{bd } (Z_\varepsilon)$ и спроектируем ее на множество X, т. е., найдем такую точку x_0, что

$$x_0 = \arg \min_{x \in X} ||x - z_0||.$$

Точка x_0 единственна, причем $||x_0 - z_0|| = \varepsilon$. Покажем, что

$$N(Z_\varepsilon, z_0) = \{\ g \in \mathbb{R}^n \ \big|\ \ g = \lambda(z_0 - x_0) \quad \forall \lambda \geqslant 0\ \}.$$

Вначале докажем, что

$$(z_0 - x_0) \in N(Z_\varepsilon, z_0),$$

т.е.

$$\langle z - z_0, z_0 - x_0 \rangle \leqslant 0 \quad \forall z \in Z_\varepsilon.$$

Возьмем произвольную точку $z \in Z_\varepsilon$. Если окажется, что $z \in X$, то выполняется неравенство

$$\langle z - z_0, z_0 - x_0 \rangle \ \leqslant -||x_0 - z_0||^2 = -\varepsilon^2 < 0. \qquad (2)$$

Если же $z \notin X$, то найдутся точка $x \in X$, вектор $p \in \mathbb{R}^n$, $||p|| = 1$, и число $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon]$ такие, что $z = x + \varepsilon_1 p$. В этом случае

$$\langle z - z_0, z_0 - x_0 \rangle = \langle x + \varepsilon_1 p - z_0, z_0 - x_0 \rangle =$$

$$= \langle x - z_0, z_0 - z_0 \rangle + \varepsilon_1 \langle p, z_0 - x_0 \rangle \leqslant -\varepsilon^2 + \varepsilon_1 \varepsilon \leq 0. \qquad (3)$$

Таким образом, из утверждений (2) и (3) следует, что для каждого $z \in Z_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$\langle z - z_0, z_0 - z_0 \rangle \leqslant 0.$$

Это означает, что луч с направляющим вектором $g_0 = z_0 - x_0$ лежит в конусе $N(Z_\varepsilon, z_0)$.

Докажем его единственность. Заметим, что z_0 является граничной точкой не только множества Z_ε, но и замкнутого шара $B_\varepsilon(x_0)$ радиуса ε с центром в точке x_0, при этом вектор g_0 является также нормальным к касательной плоскости, проведенной к этому шару в точке z_0. Поэтому, если предположить существование вектора

$$g_1 \in N(Z_\varepsilon, z_0), \quad g_1 \neq \lambda g_0 \quad \forall \lambda \geq 0,$$

то он должен быть нормальным к множеству $B_\varepsilon(x_0)$.

Полученное противоречие завершает доказательство теоремы. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 1. *Для точек x_0, z_0, фигурирующих в теореме 1, справедливо включение*

$$N(X_\varepsilon, z_0) \subset N(X, x_0).$$

4°. Гладкая аппроксимация выпуклых функций. Рассмотрим конечную выпуклую на $\mathbb{R}^n$ функцию f и замкнутое выпуклое множество $D \subset \mathbb{R}^n$. Обозначим

$$X = \left\{[x, \mu] \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \;\middle|\; \mu \geq f(x), \quad x \in D\right\}.$$

Построим семейство выпуклых замкнутых множеств $Z_\varepsilon \subset \mathbb{R}^{n+1}$

$$Z_\varepsilon = X + \varepsilon B_1(0_{n+1}) \subset \mathbb{R}^{n+1}, \quad \varepsilon > 0,$$

семейство выпуклых множеств $D_\varepsilon \subset \mathbb{R}^n$

$$D_\varepsilon = D + \varepsilon B_1(0_n) \subset \mathbb{R}^n,$$

и семейство выпуклых функций

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} \inf \mu, & [x, \mu] \in Z_\varepsilon, \\ +\infty, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Нетрудно заметить, что

$$\operatorname{dom} f_\varepsilon = D_\varepsilon,$$

и для каждого фиксированного $\varepsilon > 0$ график функции f_ε есть нижняя огибающая соответствующего ей множества X_ε.

Зафиксируем положительное число $\varepsilon > 0$. Пусть $z \in D$. Рассмотрим семейство выпуклых функций $\{\varphi_\varepsilon(x, z)\}$,

$$\varphi_\varepsilon(x, z) = f(z) + t_\varepsilon(x, z),$$

где

$$t_\varepsilon(x, z) = \begin{cases} -\sqrt{\varepsilon^2 - ||x - z||^2}, & x \in a_\varepsilon(z), \\ +\infty, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Здесь

$$a_\varepsilon(z) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \; ||x - z|| \leqslant \varepsilon \; \} \subset D_\varepsilon.$$

Очевидно, что

$$\operatorname{dom} \varphi_\varepsilon(\cdot, z) = a_\varepsilon(z), \quad \bigcup_{z \in D} a_\varepsilon(z) = D_\varepsilon.$$

Обозначим

$$H_\varepsilon(z) = \operatorname{epi} \varphi_\varepsilon(\cdot, z).$$

Рассмотрим также функции

$$\varphi_\varepsilon(x) = \inf_{z \in D} \varphi_\varepsilon(x, z)$$

и их надграфики $H_\varepsilon = \operatorname{epi} \varphi_\varepsilon$.

Из построения функций f_ε и φ_ε вытекает лемма.

ЛЕММА 1. *Справедливо следующее соотношение*

$$f_\varepsilon(x) = (f \oplus t_\varepsilon)(x),$$

где

$$t_\varepsilon(x) = \begin{cases} -\sqrt{\varepsilon^2 - ||x||^2}, & ||x|| \leqslant \varepsilon, \\ +\infty, & \textit{в остальных точках.} \end{cases}$$

Отметим тот факт, что функция t_ε является существенно гладкой функцией при каждом фиксированном положительном ε.

Рассмотрим функцию $f_\varepsilon(x) = (f \oplus t_\varepsilon)(x)$. Функция f_ε выпукла и

$$f_\varepsilon^*(v) = f^*(v) + t_\varepsilon^*(v), \quad v \in \mathbb{R}^n.$$

ТЕОРЕМА 2. *Для функции f_ε справедливы следующие соотношения:*

$$dom\ f_\varepsilon = dom\ f_1 + B_\varepsilon(0_n), \quad epi\ f_\varepsilon = epi\ f_1 + B_\varepsilon(0_{n+1}).$$

ТЕОРЕМА 3. *Функция f_ε при каждом фиксированном $\varepsilon > 0$ непрерывно дифференцируема в любой внутренней точке множества D_ε.*

Доказательство. Так как функция t_ε является существенно гладкой, то (см. [1]) функция f_ε также является существенно гладкой. Следовательно, она дифференцируема в каждой внутренней точке множества D_ε. $\square$

ТЕОРЕМА 4. *Множество $epi\ f_\varepsilon$ является гладким множеством для любого произвольного положительного числа ε.*

ТЕОРЕМА 5. *1) Для любой фиксированной точки x_0 найдется единственная точка $z_0 \in D$ такая, что*

$$\varphi_\varepsilon(x_0) = f(z_0) + t_\varepsilon(x_0, z_0).$$

2) $H_\varepsilon = epi\ \varphi_\varepsilon = \bigcup_{z\in D} epi\ \varphi_\varepsilon(\cdot, z) = \bigcup_{z\in D} H_\varepsilon(z).$

3) $H_\varepsilon = Z_\varepsilon.$

СЛЕДСТВИЕ 2. *При каждом фиксированном $\varepsilon > 0$*

$$f_\varepsilon(x) = \varphi_\varepsilon(x).$$

ТЕОРЕМА 6. *Пусть точка $x_0 \in\ intD_\varepsilon$. Тогда найдется единственная точка $z_0 \in D$, в которой справедливо соотношение*

$$f'_\varepsilon(x_0) \in \partial f(z_0).$$

Доказательство. Пусть $x_0 \in \mathrm{int} D_\varepsilon$. Тогда по теореме 1 в любой точке $\bar{x}_0 = [x_0, f_\varepsilon(x_0)]$ нормальный конус к множеству X_ε состоит из луча с направляющим вектором

$$g_0 = \bar{x}_0 - \bar{z}_0 = [x_0 - z_0, f_\varepsilon(x_0) - f(z_0)],$$

где

$$\bar{z}_0 = \arg \min_{\bar{z} \in X} ||\bar{z} - \bar{x}_0|| = [z_0, f(x_0)],$$

причем $f_\varepsilon(x_0) - f(z_0) < 0$, то есть,

$$N(X_\varepsilon, \bar{x}_0) = \{g \in \mathbb{R}^{n+1} \mid g = \lambda(\bar{x}_0 - \bar{z}_0) \quad \forall \lambda \geq 0\}.$$

Так как множество X является надграфиком функции f, то по одному из свойств нормального конуса к надграфику функции f в точке $\bar{z}_0$, следует, что

$$[f'_\varepsilon(x_0), -1] \in N(X_\varepsilon, \bar{x}_0) \subset N(X, \bar{z}_0).$$

Таким образом, $f'_\varepsilon(x_0) \in \partial f(z_0)$. □

Отметим некоторые свойства функций, сопряженных к функциям f и f_ε.

Пусть f — замкнутая собственная выпуклая на $\mathbb{R}^n$ функция. Множества

$$\mathrm{dom}\, \partial f = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \partial f(x) \neq \emptyset\}$$

и

$$\mathrm{range}\, \partial f = \bigcup_{x \in \mathbb{R}^n} \partial f(x)$$

называются соответственно *эффективным множеством и образом* ∂f. Известно [1], что

$$\mathrm{ri}(\mathrm{dom}\ f^*) \subset \mathrm{range}\, \partial f \subset \mathrm{dom}\ f^*.$$

ТЕОРЕМА 7. *В каждой точке $v \in$ range ∂f_ε для любого положительного ε выполняется равенство*

$$f^*_\varepsilon(x) = f^*(v) + \varepsilon\sqrt{1 + ||v||^2}.$$

Доказательство. следует из того факта, что для функции, сопряженной к функции t_ε, справедлива формула

$$t^*_\varepsilon(v) = \varepsilon\sqrt{1 + ||v||^2}.$$

И так как функция f_ε есть инфимальная конволюция функции f и t_ε, то из свойства (1) следует утверждение нашей теоремы. □

Выберем

$$v \in \text{range}\ \partial f_\varepsilon \subset \text{dom} f_\varepsilon^*.$$

Тогда найдется точка $x \in \text{dom} f_\varepsilon$ такая, что $v \in \partial f_\varepsilon(x)$, следовательно,

$$f_\varepsilon(x) + f_\varepsilon^*(v) = \langle x, v \rangle. \tag{4}$$

Рассмотрим точку $\bar{x} = [x, f_\varepsilon(x)]$. Найдем

$$\bar{z} = \arg \min_{\tilde{z} \in X} ||\tilde{z} - \bar{x}|| = [z, f(z)].$$

Тогда

$$v \in \partial f(z), \quad \bar{x} = \bar{z} + \varepsilon \mu(v)[v, -1],$$

где

$$\mu(v) = \frac{1}{\sqrt{1 + ||v||^2}}.$$

Отсюда следуют равенства

$$x = z + \varepsilon \mu(v) v, \quad f_\varepsilon(x) = f(z) - \varepsilon \mu(v). \tag{5}$$

Таким образом, если точка $x \in \text{int}\ (\text{dom}\ f)$, то в этой точке функция f_ε' дифференцируема. Тогда

$$v = f_\varepsilon'(x), \quad \mu(v) = \frac{1}{\sqrt{1 + ||f_\varepsilon'(x)||^2}}, \quad x = z + \varepsilon \mu(v) f_\varepsilon'(x).$$

Поскольку $v \in \partial f(z)$, то

$$f(z) + f^*(v) = \langle z, v \rangle.$$

Из этого равенства, из равенств (4) и (5) непосредственно вытекает теорема.

ТЕОРЕМА 8. *Если множество D компактно, то*

$$\min_{x \in D} f(x) = \min_{x \in D_\varepsilon} f_\varepsilon(x) + \varepsilon.$$

Обозначим через M - множество точек минимума функции f на множестве D, а через M_ε - множество точек минимума функции f_ε на множестве D_ε. Случай, когда эти множества пусты не исключается.

ТЕОРЕМА 9. *1) Справедливо равенство $M = M_\varepsilon$.*

2) Если M — непустое множество, то

$$f_\varepsilon(z^*) = f(z^*) - \varepsilon \quad \forall z^* \in M.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала отметим, что если точка $x_0 \notin D$, но $x_0 \in D_\varepsilon$, то найдется точка $z_0 \in D$ такая, что

$$f_\varepsilon(x_0) = f(z_0) + t_\varepsilon(x_0, z_0) > f(z_0) - \varepsilon \geq f_\varepsilon(z_0).$$

Следовательно,

$$M_\varepsilon \subset D \subset \ \mathrm{int} D_\varepsilon.$$

Пусть множество M_ε не пусто и $z \in M_\varepsilon$. Покажем, что множество M_ε содержится в множестве M. Рассмотрим точку

$$\bar{z} = [z, f_\varepsilon(z)] \in X_\varepsilon.$$

Тогда найдется точка

$$\bar{x} \in X, \ \bar{x} = [x, f(x)]$$

такая, что

$$[z - x, f_\varepsilon(z) - f(x)] \in N(X_\varepsilon, \bar{x}).$$

Поскольку z - точка минимума функции f_ε на D_ε, то

$$[z - x, f_\varepsilon(z) - f(x)] = \varepsilon[0_n, -1] \subset N(X_\varepsilon, \bar{x}).$$

Поэтому

$$z = x \quad \text{и} \quad f_\varepsilon(x) - f(x) = -\varepsilon.$$

Следовательно, $z \in M$. Включение $M_\varepsilon \subset M$ доказано.

Покажем справедливость обратного включения. Пусть $z \in M$. Рассмотрим точки

$$\bar{z} = [z, f(z)], \quad \tilde{z} = [z, f_\varepsilon(z)]$$

и вектор

$$\bar{g} = \tilde{z} - \bar{z} = [0_n, f_\varepsilon(z) - f(z)].$$

По построению множества X имеем $||\bar{g}|| \geq \varepsilon$, причем

$$f(z) - f_\varepsilon(z) \geq \varepsilon.$$

Предположим, что

$$f(z) - f_\varepsilon(z) > \varepsilon.$$

Тогда найдется точка $\bar{x} = [x, f(x)], \ x \in D$, что

$$||\bar{x} - \tilde{z}|| = \varepsilon.$$

Следовательно,

$$|f(x) - f_\varepsilon(z)| \leqslant \varepsilon.$$

Отсюда имеем

$$\varepsilon < f(z) - f_\varepsilon(z) \leqslant f(z) + \varepsilon - f(x),$$

или же

$$f(z) > f(x).$$

Но это неравенство противоречит тому, что z есть точка минимума функции f на множестве D. Теорема доказана. $\square$

ПРИМЕР 4. Пусть

$$f(x) = |x|, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Рассмотрим два варианта.

1. Множество D есть все пространство $\mathbb{R}$. Тогда множество точек минимума этой функции состоит из единственной нулевой точки и при этом $f(0) = 0$. Зафиксируем произвольное положительное ε. Тогда

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} -x - \sqrt{2}, & x < -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\varepsilon, \\ -\sqrt{\varepsilon^2 - x^2}, & x \in \left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\varepsilon, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\varepsilon\right], \\ x - \sqrt{2}, & x > \dfrac{\sqrt{2}}{2}\varepsilon. \end{cases}$$

Функция f_ε непрерывно дифференцируема на $\mathbb{R}$ и при этом

$$f'_\varepsilon(x) = \begin{cases} -1, & x < -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\varepsilon, \\ \dfrac{x}{\sqrt{\varepsilon^2 - x^2}}, & x \in \left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\varepsilon, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\varepsilon\right], \\ 1, & x > \dfrac{\sqrt{2}}{2}\varepsilon. \end{cases}$$

Следовательно, $f'_\varepsilon(0) = 0$ и $f_\varepsilon(0) = -\varepsilon$. Так как

$$f^*(v) = \begin{cases} 0, & v \in [-1, 1], \\ +\infty, & \text{в остальных точках.} \end{cases}$$

то

$$f^*_\varepsilon(v) = \begin{cases} \varepsilon\sqrt{1 + v^2}, & v \in [-1, 1], \\ +\infty, & \text{в остальных точках.} \end{cases}$$

2. Теперь рассмотрим случай, когда множество D есть отрезок $[1, 2]$ и

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [1, 2], \\ +\infty, & \text{в остальных точках.} \end{cases}$$

Тогда $D_\varepsilon = [1-\varepsilon, 2+\varepsilon]$,

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 - \sqrt{\varepsilon^2 - (x-1)^2}, & x \in \left[1-\varepsilon, 1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\varepsilon\right), \\ x - \sqrt{2}, & x \in \left[1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\varepsilon, 2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\varepsilon\right], \\ 2 - \sqrt{\varepsilon^2 - (x-2)^2}, & x \in \left(2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\varepsilon, 2+\varepsilon\right], \\ +\infty, & \text{в остальных точках.} \end{cases}$$

Отсюда

$$f'_\varepsilon(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{\sqrt{\varepsilon^2 - (x-1)^2}}, & x \in \left(1-\varepsilon, 1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\varepsilon\right), \\ 1, & x \in \left[1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\varepsilon, 2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\varepsilon\right], \\ \dfrac{x-2}{\sqrt{\varepsilon^2 - (x-2)^2}}, & x \in \left(2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\varepsilon, 2+\varepsilon\right), \end{cases}$$

Так как

$$f'_\varepsilon(1) = 0$$

и

$$f_\varepsilon(1) = 1-\varepsilon, \quad f_\varepsilon(1-\varepsilon) = 1, \quad f_\varepsilon(2+\varepsilon) = 2,$$

то

$$\min_{x \in D_\varepsilon} f_\varepsilon(x) = 1 - \varepsilon.$$

При этом

$$\min_{x \in D} f(x) = 1.$$

Так как

$$f^*(v) = \begin{cases} v-1, & v < 1, \\ 2(v-1), & v \geqslant 1, \end{cases}$$

то

$$f^*_\varepsilon(v) = \begin{cases} v - 1 + \varepsilon\sqrt{1+v^2}, & v < 1, \\ 2(v-1) + \varepsilon\sqrt{1+v^2}, & v \geqslant 1. \end{cases}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М.: Мир. 1973.

2. Лейхтвейс К. Выпуклые множества. М.: Наука. 1985.