НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ДИСКРЕТНОГО МАКСИМУМА*

В. Н. Малозёмов
v.malozemov@spbu.ru

14 мая 2015 г.

1°. Пусть I — конечное индексное множество, α_i при $i \in I$ и c — произвольные вещественные числа. В докладе будут указаны нестандартные приложения элементарного равенства

$$\max_{i\in I}\{\alpha_i + c\} = \max_{i\in I}\{\alpha_i\} + c. \tag{1}$$

2°. Вначале проверим само равенство (1). Обозначим $A = \max\limits_{i\in I}\{\alpha_i\}$. При всех $i \in I$ имеем $\alpha_i + c \leqslant A + c$. Значит,

$$\max_{i\in I}\{\alpha_i + c\} \leqslant A + c. \tag{2}$$

Вместе с тем,

$$\alpha_i = (\alpha_i + c) - c \leqslant \max_{i\in I}\{\alpha_i + c\} - c,$$

так что

$$A \leqslant \max_{i\in I}\{\alpha_i + c\} - c$$

и

$$A + c \leqslant \max_{i\in I}\{\alpha_i + c\}. \tag{3}$$

Объединяя неравенства (2) и (3), приходим к равенству (1).

3°. В. Ф. Демьянов обратил внимание на то, что наряду с очевидным неравенством

$$\max_{i\in I}\{\alpha_i + \beta_i\} \leqslant \max_{i\in I}\{\alpha_i\} + \max_{i\in I}\{\beta_i\}$$

выполняется обратное неравенство

$$\max_{i\in I}\{\alpha_i + \beta_i\} \geqslant \max_{i\in I}\{\alpha_i\} + \max_{i\in R}\{\beta_i\}, \tag{4}$$

*Семинар по конструктивному негладкому анализу и недифференцируемой оптимизации «CNSA & NDO»: `http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/`

где $R = \{i \in I \mid \alpha_i = A\}$. Действительно, согласно (1),

$$\begin{aligned}\max_{i\in I}\{\alpha_i+\beta_i\} &\geqslant \max_{i\in R}\{\alpha_i+\beta_i\} = \\ &= \max_{i\in R}\{A+\beta_i\} = A + \max_{i\in R}\{\beta_i\} = \max_{i\in I}\{\alpha_i\} + \max_{i\in R}\{\beta_i\}.\end{aligned}$$

Неравенство (4) обобщается на бо́льшее число слагаемых. Например

$$\max_{i\in I}\{\alpha_i+\beta_i+\gamma_i\} \geqslant \max_{i\in R}\{A+\beta_i+\gamma_i\} = A + \max_{i\in R}\{\beta_i+\gamma_i\}.$$

Обозначим $B = \max\limits_{i\in R}\{\beta_i\}$ и $R_1 = \{i \in R \mid \beta_i = B\}$. Согласно (1),

$$\max_{i\in R}\{\beta_i+\gamma_i\} \geqslant \max_{i\in R_1}\{B+\gamma_i\} = B + \max_{i\in R_1}\{\gamma_i\}.$$

Окончательно получаем

$$\max_{i\in I}\{\alpha_i+\beta_i+\gamma_i\} \geqslant \max_{i\in I}\{\alpha_i\} + \max_{i\in R}\{\beta_i\} + \max_{i\in R_1}\{\gamma_i\}.$$

С помощью указанных в этом пункте соображений в книге [1, с. 69–76] выводится разложение дискретной функции максимума по направлению.

4°. Обозначим $f_i = \alpha_i + \beta_i$, $i \in I$.

ЛЕММА 1. *Справедливо равенство*

$$\max_{i\in I}\{f_i\} = \max_{i\in I}\big\{\alpha_i - \sum_{j\in I, j\neq i}\beta_j\big\} + \sum_{i\in I}\beta_i. \tag{5}$$

Например, в случае

$$\alpha = (1,4,7,0), \quad \beta = (2,1,-3,1)$$

равенство (5) принимает вид

$$\max\{3,5,4,1\} = \max\{2,4,3,0\} + 1.$$

В книге [2, с. 116] доказательство этой леммы занимает полторы страницы. На самом деле, равенство (5) легко следует из (1). Действительно, запишем

$$\begin{aligned}\alpha_i + \beta_i &= \alpha_i + \big(\sum_{i\in I}\beta_i - \sum_{j\in I, j\neq i}\beta_j\big) = \\ &= \big(\alpha_i - \sum_{j\in I, j\neq i}\beta_j\big) + \sum_{i\in I}\beta_i.\end{aligned}$$

Взяв максимум по $i \in I$ и воспользовавшись равенством (1) при $c = \sum\limits_{i\in I}\beta_i$, получим (5).

5°. Укажем на ещё одно приложение равенства (1).

ЛЕММА 2. *Справедливы равенства*

$$\max_{i\in I}\min_{j\in I}\{\alpha_i+\beta_j\}=\min_{j\in I}\max_{i\in I}\{\alpha_i+\beta_j\}= \\ =\max_{i\in I}\{\alpha_i\}+\min_{j\in I}\{\beta_j\}. \tag{6}$$

Доказательство. Отметим, что наряду с (1) выполняется равенство

$$\min_{j\in I}\{\beta_j+c\}=\min_{j\in I}\{\beta_j\}+c. \tag{7}$$

Имеем

$$\max_{i\in I}\min_{j\in I}\{\alpha_i+\beta_j\}=\max_{i\in I}\Big\{\alpha_i+\min_{j\in I}\{\beta_j\}\Big\}.$$

Воспользовавшись равенством (1) при $c=\min\limits_{j\in I}\{\beta_j\}$, получим

$$\max_{i\in I}\min_{j\in I}\{\alpha_i+\beta_j\}=\max_{i\in I}\{\alpha_i\}+\min_{j\in I}\{\beta_j\}.$$

Аналогично

$$\min_{j\in I}\max_{i\in I}\{\alpha_i+\beta_j\}=\min_{j\in I}\Big\{\max_{i\in I}\{\alpha_i\}+\beta_j\Big\}.$$

Воспользовавшись равенством (7) при $c=\max\limits_{i\in I}\{\alpha_i\}$, получим

$$\min_{j\in I}\max_{i\in I}\{\alpha_i+\beta_j\}=\max_{i\in I}\{\alpha_i\}+\min_{j\in I}\{\beta_j\}.$$

Лемма доказана. $\square$

6°. Следующее свойство дискретного максимума не зависит от равенства (1).

Введём полиэдральную функцию

$$\varphi(x)=\max_{i\in I}\Big\{\langle a_i,x\rangle+b_i\Big\},\quad x\in\mathbb{R}^n.$$

Обозначим через F множество $(n+1)$-мерных векторов $f_i=\begin{pmatrix}a_i\\ b_i\end{pmatrix}$, $i\in I$, через G — выпуклую оболочку множества F, $G=\mathrm{co}(F)$, и через K — совокупность всех крайних точек выпуклого множества G. Ясно, что $K\subset F$.

Пусть $J = \{j \in I \mid f_j \in K\}$.

ЛЕММА 3. *Справедливо равенство*

$$\varphi(x) = \max_{j \in J} \bigl\{ \langle a_j, x \rangle + b_j \bigr\}.$$

Таким образом, максимум по I сводится к максимуму по подмножеству J.

Доказательство. По теореме Крейна-Мильмана [3, с. 32] любой вектор f_i при $i \in I \setminus J$ допускает представление

$$f_i = \sum_{j \in J} \lambda_j f_j,$$

где $\lambda_j \geqslant 0$ и $\sum\limits_{j \in J} \lambda_j = 1$. В подробной записи:

$$\begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix} = \sum_{j \in J} \lambda_j \begin{pmatrix} a_j \\ b_j \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \langle a_i, x \rangle + b_i = \sum_{j \in J} \lambda_j \bigl[\langle a_j, x \rangle + b_j \bigr] \leqslant \\ \leqslant \max_{j \in J} \bigl\{ \langle a_j, x \rangle + b_j \bigr\}. \end{aligned}$$

Теперь имеем

$$\begin{aligned} \varphi(x) = \max \Bigl\{ \max_{j \in J} \bigl\{ \langle a_j, x \rangle + b_j \bigr\},\ \max_{i \in I \setminus J} \bigl\{ \langle a_i, x \rangle + b_i \bigr\} \Bigr\} = \\ = \max_{j \in J} \bigl\{ \langle a_j, x \rangle + b_j \bigr\}. \end{aligned}$$

Лемма доказана. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. Демьянов В. Ф., Малозёмов В. Н. *Введение в минимакс.* М.: Наука, 1972. 368 с.

2. Демьянов В. Ф., Рубинов А. М. *Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление.* М.: Наука, 1990. 432 с.

3. Лейхтвейс К. Выпуклые множества. М.: Наука, 1985. 336 с.