СТУДЕНТЫ РЕШАЮТ ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ...*

В. Н. Малозёмов
v.malozemov@spbu.ru

12 февраля 2015 г.

С 1986 г. я читаю на математико-механическом факультете Санкт-Петербургского государственного университета лекции по экстремальным задачам для студентов 3-го курса отделения прикладной математики и информатики. Лекции состоят из трёх частей:

- линейные экстремальные задачи,
- нелинейные экстремальные задачи,
- вариационные задачи.

На лекциях студентам предлагаются для самостоятельного решения как стандартные задачи (проверка плана общей задачи линейного программирования на оптимальность, решение задачи квадратичного программирования с помощью теоремы Куна–Таккера, решение квадратичных вариационных задач), так и менее стандартные. Иногда студенты находят оригинальные, красивые решения нестандартных задач. Примеры таких решений вместе с комментариями к ним я приведу в этом докладе.

ЗАДАЧА 1. *Пусть D — симметричная положительно определённая матрица порядка n и c — ненулевой n-мерный вектор. Найдите глобальное решение экстремальной задачи*

$$\begin{gathered} f(x) := \langle c, x\rangle \to \max, \\ \langle Dx, x\rangle = 1 \end{gathered} \tag{1}$$

и докажите, что оно единственно.

*Семинар по конструктивному негладкому анализу и недифференцируемой оптимизации «CNSA & NDO»: `http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/`

Решение (М. Кольцов, Е. Ржевская, 2014 г.). Запишем формально необходимые условия локального максимума:

$$c = uDx, \tag{2}$$

$$\langle Dx, x\rangle = 1. \tag{3}$$

Так как c — ненулевой вектор, то и $u \neq 0$.

Умножим (2) скалярно на x. Учитывая (3), получаем

$$\langle c, x\rangle = u. \tag{4}$$

Далее, у симметричной положительно определённой матрицы D существует обратная матрица D^{-1}, которая также является симметричной и положительно определённой. Из (2) следует, что

$$x = \frac{1}{u}D^{-1}c. \tag{5}$$

Условие (3) принимает вид

$$\langle c, D^{-1}c\rangle = u^2,$$

так что

$$u = \pm\sqrt{\langle c, D^{-1}c\rangle}.$$

На основании (4) и того факта, что мы максимизируем функцию $\langle c, x\rangle$, выбираем

$$u = \sqrt{\langle c, D^{-1}c\rangle}.$$

Согласно (5) приходим к формуле

$$x_* = \frac{D^{-1}c}{\sqrt{\langle c, D^{-1}c\rangle}}. \tag{6}$$

Покажем, что $f(x) < f(x_*)$ для любого плана x, отличного от x_*. Этим и завершится решение задачи (1).

Возьмём план x, отличный от x_*, и обозначим $h = x - x_*$, $h \neq \mathbb{O}$. Имеем

$$1 = \langle Dx, x\rangle = \big\langle D(x_* + h), x_* + h\big\rangle = \langle Dx_*, x_*\rangle + 2\langle Dx_*, h\rangle + \langle Dh, h\rangle.$$

Отсюда следует, что

$$2\langle Dx_*, h\rangle = -\langle Dh, h\rangle < 0.$$

В силу (6) приходим к неравенству

$$\langle c, h\rangle < 0.$$

Окончательно получаем

$$f(x) = f(x_* + h) = \langle c, x_* \rangle + \langle c, h \rangle < \langle c, x_* \rangle = f(x_*),$$

то есть $f(x) < f(x_*)$. $\square$

К о м м е н т а р и й. Я имел в виду другое решение, основанное на связи задачи (1) с взаимной по Эйлеру задачей

$$\begin{gathered} g(x) := \langle Dx, x \rangle \to \min, \\ \langle c, x \rangle = 1 \end{gathered} \tag{7}$$

(по сравнению с задачей (1) целевая функция и функция, входящая в ограничение, поменялись местами). У задачи (7) целевая функция выпуклая и ограничение линейное. Её решение x_0 находится стандартным путём из критерия оптимальности. Оно единственно и имеет вид

$$x_0 = \frac{D^{-1}c}{\langle c, D^{-1}c \rangle}.$$

Обозначим

$$\mu = \langle Dx_0, x_0 \rangle = \frac{1}{\langle c, D^{-1}c \rangle}.$$

Вектор $x_* = \frac{1}{\sqrt{\mu}} x_0$ является планом задачи (1). При этом

$$\langle c, x_* \rangle = \frac{1}{\sqrt{\mu}}. \tag{8}$$

Покажем, что для любого плана x_1 задачи (1) выполняется неравенство

$$\langle c, x_1 \rangle \leqslant \frac{1}{\sqrt{\mu}}. \tag{9}$$

Если $\langle c, x_1 \rangle \leqslant 0$, то это очевидно. Пусть $\langle c, x_1 \rangle > 0$. Вектор

$$x_2 = \frac{x_1}{\langle c, x_1 \rangle}$$

удовлетворяет ограничению задачи (7), поэтому

$$\langle Dx_2, x_2 \rangle \geqslant \langle Dx_0, x_0 \rangle = \mu.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{\big[\langle c, x_1 \rangle\big]^2} \geqslant \mu \quad \text{и} \quad \langle c, x_1 \rangle \leqslant \frac{1}{\sqrt{\mu}}.$$

На основании (8) и (9) заключаем, что x_* — решение задачи (1).

Единственность решения задачи (1) связана с единственностью решения задачи (7).

Отмечу также, что задача 1 имеет элементарное решение, основанное на обобщённом неравенстве Коши–Буняковского. Введём в $\mathbb{R}^n$ обобщённое скалярное произведение

$$\langle x, y\rangle_D = \langle Dx, y\rangle$$

и обобщённую норму $\|x\|_D = \sqrt{\langle x, x\rangle_D} = \sqrt{\langle Dx, x\rangle}$. В книге [1, с. 33] показано, что справедливо неравенство

$$\langle x, y\rangle_D \leqslant \|x\|_D \cdot \|y\|_D, \tag{10}$$

причём при ненулевых x, y неравенство обращается в равенство только тогда, когда

$$\frac{x}{\|x\|_D} = \frac{y}{\|y\|_D}.$$

Воспользуемся этим утверждением для решения задачи 1. Согласно (10) для любого плана x имеем

$$f(x) = \big\langle D(D^{-1}c), x\big\rangle \leqslant \|D^{-1}c\|_D \cdot \|x\|_D = \sqrt{\langle c, D^{-1}c\rangle}.$$

Неравенство выполняется как равенство только тогда, когда

$$\frac{D^{-1}c}{\|D^{-1}c\|_D} = \frac{x}{\|x\|_D}.$$

Отсюда следует, что

$$x = \frac{D^{-1}c}{\sqrt{\langle c, D^{-1}c\rangle}}.$$

Этот вектор является единственным решением задачи (1).

ЗАДАЧА 2. *Найдите глобальное решение вариационной задачи*

$$\begin{gathered} J(x) := \int_0^1 x^2 (x')^2 dt \to \min, \\ x(0) = 1,\ x(1) = \sqrt{2},\ x \in C^1[0,1], \end{gathered} \tag{11}$$

и докажите его единственность.

Решение (А. Петров, 1998 г.). Нам потребуется следующее вспомогательное утверждение.

ЛЕММА. *Для любой непрерывной на отрезке* $[0,1]$ *функции* $y(t)$ *справедливо неравенство*
$$\Big(\int_0^1 y(t)dt\Big)^2 \leqslant \int_0^1 y^2(t)dt. \tag{12}$$
Неравенство выполняется как равенство тогда и только тогда, когда $y(t) \equiv \mathrm{const}$.

Доказательство. При любом вещественном α имеем
$$0 \leqslant \int_0^1 (y-\alpha)^2 dt = \int_0^1 y^2 dt - 2\alpha \int_0^1 y dt + \alpha^2 =$$
$$= \Big(\alpha - \int_0^1 y dt\Big)^2 - \Big(\int_0^1 y dt\Big)^2 + \int_0^1 y^2 dt.$$
Положив $\alpha = \int_0^1 y dt$, придём к требуемому неравенству.

Если неравенство выполняется как равенство, то
$$0 \leqslant \int_0^1 (y-\alpha)^2 dt = \Big(\alpha - \int_0^1 y dt\Big)^2.$$
Положив и здесь $\alpha = \int_0^1 y dt$, получим
$$\int_0^1 (y-\alpha)^2 dt = 0.$$
Отсюда следует, что $y(t) \equiv \alpha$.

То, что при $y(t) \equiv \mathrm{const}$ неравенство (12) выполняется как равенство, очевидно. Лемма доказана. $\square$

Переходим к решению задачи (11). Возьмём план x и обозначим $y = xx'$. В силу (12) имеем
$$J(x) = \int_0^1 y^2 dt \geqslant \Big(\int_0^1 y dt\Big)^2 = \Big(\int_0^1 xx' dt\Big)^2 = \frac{1}{4}x^2\Big|_0^1 = \frac{1}{4}.$$
По лемме неравенство выполняется как равенство только тогда, когда $xx' \equiv \equiv \frac{1}{2}\alpha$, то есть при $x^2 = \alpha t + \beta$. Учитывая краевые условия, получаем $\beta = 1$, $\alpha = 1$. Таким образом,
$$x^2(t) = t + 1, \quad t \in [0,1].$$
В частности, на отрезке $[0,1]$ функция $x^2(t)$ не обращается в нуль. Значит, и $x(t)$ на отрезке $[0,1]$ не обращается в нуль. В силу краевых условий она должна быть положительной. Получаем
$$x_*(t) = \sqrt{t+1}.$$
Эта функция является единственным решением задачи 2.

Комментарий. Неравенства играют важную роль при решении экстремальных задач. При этом должны быть известны все случаи, когда неравенство выполняется как равенство. Подробнее об этом см. в докладе [2].

ЗАДАЧА 3. *Пусть A — невырожденная матрица порядка n и $B = x_0 y_0^T$, где x_0, y_0 — ненулевые n-мерные векторы. Найдите формулу для обратной матрицы $(A - B)^{-1}$.*

Решение (А. Петров, 1998 г.; А. Проскурников, 2001 г.). Имеем

$$A - B = (E - BA^{-1})A. \tag{13}$$

Далее,

$$(E - BA^{-1})x_0 = x_0 - x_0 y_0^T A^{-1} x_0.$$

Обозначим $\eta = y_0^T A^{-1} x_0 = \langle y_0, A^{-1}x_0 \rangle$. Тогда

$$(E - BA^{-1})x_0 = (1 - \eta)x_0.$$

Если $\eta = 1$, то матрица $E - BA^{-1}$ необратима (вместе с $A - B$ — см. (13)).

Предположим, что $\eta \neq 1$. В этом случае

$$\begin{aligned}(1-\eta)^{-1}(E - BA^{-1})x_0 y_0^T A^{-1} = x_0 y_0^T A^{-1} = BA^{-1} = \\ = E - (E - BA^{-1}).\end{aligned}$$

Получаем

$$(E - BA^{-1})\big(E + (1-\eta)^{-1}BA^{-1}\big) = E.$$

Отсюда следует, что

$$(E - BA^{-1})^{-1} = E + (1-\eta)^{-1}BA^{-1}.$$

В силу (13)

$$(A - B)^{-1} = A^{-1} + (1-\eta)^{-1}A^{-1}BA^{-1}. \tag{14}$$

Комментарий. Формула (14) хорошо известна. Она называется *формулой Шермана–Моррисона*. Её справедливость, когда она записана, легко проверить непосредственно. Однако мне было интересно, как формула (14) *выводится*. А. Петров и А. Проскурников блестяще с этим разобрались.

В дальнейшем мы с А. Петровым и Ф. Монако продолжали заниматься данной темой и опубликовали статью [3].

Рассмотрим частную ситуацию, которая возникает при описании симплекс-метода. У обратимой матрицы A k-й столбец A_k заменяется на столбец C. Как при этом изменится обратная матрица?

Новая матрица имеет вид

$$S = A - (A_k - C)e_k^T,$$

где e_k — k-й орт. В данном случае

$$1 - \eta = 1 - \big\langle e_k, A^{-1}(A_k - C)\big\rangle = \langle e_k, A^{-1}C\rangle.$$

Обозначим $z = A^{-1}C$. Тогда $1 - \eta = z[k]$. Критерием обратимости матрицы S является условие $z[k] \neq 0$. При выполнении этого условия в силу (14) получаем

$$\begin{aligned} S^{-1} = A^{-1} + \big(z[k]\big)^{-1} A^{-1}(A_k - C)e_k^T A^{-1} = \\ = A^{-1} + \big(z[k]\big)^{-1}(e_k - z)e_k^T A^{-1}. \end{aligned} \tag{15}$$

Матричное равенство (15) принимает простой вид, если расписать его по строкам:

$$\begin{gathered} S^{-1}[k, N] = \big(z[k]\big)^{-1} A^{-1}[k, N]; \\ S^{-1}[i, N] = A^{-1}[i, N] - z[i] S^{-1}[k, N], \quad i \in N \setminus \{k\}. \end{gathered}$$

Здесь $N = 1 : n$.

ЗАДАЧА 4. Пусть A — $(n \times m)$-матрица, $n < m$, b — ненулевой n-мерный вектор. Рассмотрим две экстремальные задачи

$$\begin{gathered} \|\xi\|_\infty \to \min, \\ A\xi = b, \end{gathered} \tag{16}$$

$$\begin{gathered} \|A^T\eta\|_1 \to \min, \\ \langle b, \eta\rangle = 1. \end{gathered} \tag{17}$$

Здесь $\|\xi\|_\infty = \max\limits_{j \in 1:m} \big|\xi[j]\big|$ и $\|y\|_1 = \sum\limits_{j=1}^{m} \big|y[j]\big|$, где $y = A^T\eta$.

Докажите следующее утверждение: *если множество планов задачи* (16) *непусто, то обе задачи* (16) *и* (17) *имеют решения; при этом минимальные значения* μ, ν *их целевых функций связаны соотношением* $\mu \cdot \nu = 1$.

Р е ш е н и е (А. Демьянов, 2002 г.). Прежде всего покажем, что задача (16) имеет решение. Запишем эквивалентную ей задачу линейного программирования:

$$\begin{gathered} \rho \to \min, \\ A\xi = b, \\ -\rho \leqslant \xi[j] \leqslant \rho, \quad j \in 1 : m. \end{gathered} \tag{18}$$

Множество планов задачи (18) непусто $\big($оно содержит вектор (ξ_0, ρ_0), где ξ_0 — план задачи (16) и $\rho_0 = \max\limits_{j \in 1:m} \big|\xi_0[j]\big|\big)$ и целевая функция на множестве планов ограничена снизу нулём. Это гарантирует существование оптимального плана у задачи (18). В силу эквивалентности существует оптимальный план и у задачи (16). Обозначим его ξ_*. По определению

$$\mu = \|\xi_*\|_\infty.$$

Так как $b \neq \mathbb{O}$, то $\mu > 0$.

Теперь обратимся к задаче (17) и запишем эквивалентную ей задачу линейного программирования. Воспользуемся тем, что компоненты $y[j]$ вектора $y = A^T\eta$ допускают представление

$$y[j] = \alpha[j] - \beta[j], \quad \alpha[j] \geqslant 0,\ \beta[j] \geqslant 0,$$

при этом $\big|y[j]\big| = \alpha[j] + \beta[j]$. Получим

$$\begin{gathered} \sum_{j=1}^{m} \big(\alpha[j] + \beta[j]\big) \to \min, \\ -y[j] + \alpha[j] - \beta[j] = 0, \quad j \in 1:m; \\ \alpha[j] \geqslant 0,\ \beta[j] \geqslant 0, \quad j \in 1:m; \\ \langle b, \eta \rangle = 1. \end{gathered} \tag{19}$$

Введём вектор $e = (1, 1, \ldots, 1)$ и перепишем задачу (19) в векторном виде

$$\begin{gathered} \langle e, \alpha + \beta \rangle \to \min, \\ -A^T\eta + \alpha - \beta = \mathbb{O}, \\ \langle b,\eta \rangle \qquad\quad = 1, \\ \alpha \geqslant \mathbb{O},\ \beta \geqslant \mathbb{O}. \end{gathered} \tag{20}$$

Перейдём к двойственной задаче:

$$\begin{gathered} v \to \max, \\ -Au + vb = \mathbb{O}, \\ u \leqslant e,\ -u \leqslant e. \end{gathered} \tag{21}$$

Нетрудно проверить, что вектор $(u_*, v_*) := (\xi_*/\mu, 1/\mu)$ является планом задачи (21) (учесть, что вторая строчка ограничений равносильна условию $\|u\|_\infty \leqslant 1$). Более того, этот план — оптимальный. Действительно, допустим противное. Тогда у задачи (21) существует план (u_0, v_0) с бóльшим значением целевой функции, то есть

$$v_0 > \frac{1}{\mu}.$$

Положим $\hat{\xi} = \frac{1}{v_0} u_0$. Вектор $\hat{\xi}$ удовлетворяет ограничению задачи (16) и

$$\|\hat{\xi}\|_\infty = \frac{1}{v_0}\|u_0\|_\infty \leqslant \frac{1}{v_0} < \mu.$$

Это противоречит определению μ.

Таким образом, задача (21) имеет решение и максимальное значение её целевой функции равно $1/\mu$. По первой теореме двойственности в линейном программировании задача (20) также имеет решение и минимальное значение её целевой функции равно $1/\mu$. Наконец, в силу эквивалентности задача (17) имеет решение и минимальное значение её целевой функции равно $1/\mu$. По определению

$$v = \frac{1}{\mu},$$

так что $\mu \cdot \nu = 1$.

Комментарий. На лекциях я рассматривал «симметричную» пару экстремальных задач

$$\begin{array}{c} \|\xi\|_1 \to \min, \\ A\xi = b \end{array} \qquad \text{и} \qquad \begin{array}{c} \|A^T\eta\|_\infty \to \min, \\ \langle b, \eta\rangle = 1. \end{array}$$

Соответствующие результаты представлены в [4].

ЗАДАЧА 5. *Пусть $u(t)$ — непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция и*

$$C_0^n[a,b] = \left\{h \in C^n[a,b] \mid h^{(k)}(a) = h^{(k)}(b) = 0 \ \ \forall k \in 1 : n-1\right\}.$$

Докажите, что при выполнении условия

$$\int_a^b u(t)h^{(n)}(t)dt = 0 \quad \forall h \in C_0^n[a,b] \tag{22}$$

функция $u(t)$ является алгебраическим полиномом степени не выше $n-1$.

Решение (Д. Петров, 1999 г.). Положим

$$u_0(t) = u(t); \quad u_k(t) = \int_a^t u_{k-1}(\tau)d\tau, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Введём интерполяционный полином Эрмита $p_{2n-1}(t)$, исходя из условий

$$p_{2n-1}^{(k)}(a) = u_n^{(k)}(a); \quad p_{2n-1}^{(k)}(b) = u_n^{(k)}(b), \quad k \in 0 : n-1.$$

Рассмотрим функцию $\hat{h}(t) = u_n(t) - p_{2n-1}(t)$. Очевидно, что $\hat{h} \in C_0^n[a,b]$. При этом

$$\hat{h}^{(n)}(t) = u(t) - p_{2n-1}^{(n)}(t). \tag{23}$$

Полином $g_{n-1}(k) = p_{2n-1}^{(n)}(t)$ имеет степень не выше $n-1$ и

$$\int_a^b g_{n-1}(t)\hat{h}^{(n)}(t)dt = 0. \tag{24}$$

Формула (24) проверяется интегрированием по частям:

$$\int_a^b g_{n-1}\hat{h}^{(n)}dt = -\int_a^b g'_{n-1}\hat{h}^{(n-1)}dt = \ldots = (-1)^n \int_a^b g_{n-1}^{(n)}\hat{h}\ dt = 0.$$

На основании (22)–(24) получаем

$$\int_a^b \big[u(t) - g_{n-1}(t)\big]^2 dt = \int_a^b \big[u(t) - g_{n-1}(t)\big]\hat{h}^{(n)}(t)dt =$$
$$= \int_a^b u(t)\hat{h}^{(n)}(t)dt - \int_a^b g_{n-1}(t)\hat{h}^{(n)}(t)dt = 0.$$

Отсюда следует, что $u(t) \equiv g_{n-1}(t)$ на $[a,b]$, то есть функция $u(t)$ на отрезке $[a,b]$ совпадает с алгебраическим полиномом $g_{n-1}(t)$ степени не выше $n-1$.

К о м м е н т а р и й. Это замечательное решение побудило меня на лекциях при доказательстве основной леммы вариационного исчисления использовать линейную интерполяцию.

ЗАДАЧА 6. *Рассмотрим вариационную задачу*

$$J(x) := \int_{-1}^1 x^2(1-x')^2 dt \to \inf,$$
$$x(-1) = 0, \quad x(1) = 1, \quad x \in C^1[-1,1].$$

Найдите инфимум функционала $J(x)$ на множестве планов и докажите, что этот инфимум не достигается.

Р е ш е н и е (А. Герасимов, 1999 г.; И. Анисимова, 2004 г.). Очевидно, что $J(x) \geqslant 0$ на всех планах x. На функции

$$x_*(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \in [-1,0], \\ t & \text{при } t \in [0,1] \end{cases}$$

выполняется равенство $J(x_*) = 0$. Но x_* не принадлежит пространству $C^1[-1,1]$. Эта функция является решением исходной задачи в более широком пространстве кусочно гладких функций.

Покажем, что на $C^1[-1,1]$ задача не имеет решения. Введём последовательность функций

$$x_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \in [-1, -\frac{1}{n}], \\ \frac{1}{4n}(nt+1)^2 & \text{при } t \in [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}], \\ t & \text{при } t \in [\frac{1}{n}, 1]. \end{cases}$$

Полином $p_2(t) = \frac{1}{4n}(nt+1)^2$ удовлетворяет условиям

$$p_2(-\tfrac{1}{n}) = 0, \quad p_2'(-\tfrac{1}{n}) = 0,$$
$$p_2(\tfrac{1}{n}) = \tfrac{1}{n}, \quad p_2'(\tfrac{1}{n}) = 1.$$

Значит, функции x_n принадлежат $C^1[-1,1]$ при всех натуральных n. Кроме того, все $x_n(t)$ удовлетворяют граничным условиям. Вычислим значения функционала J на планах x_n:

$$J(x_n) = \int_{-1}^{1} x_n^2(t)\big[1 - x_n'(t)\big]^2 dt =$$
$$= \frac{1}{64n^2}\int_{-1/n}^{1/n}(nt+1)^4(nt-1)^2 dt = \frac{1}{64n^3}\int_{-1}^{1}(u+1)^4(u-1)^2 dt.$$

Очевидно, что $J(x_n) \to 0$ при $n \to \infty$. Приходим к следующему выводу: инфимум $J(x)$ на функциях $x \in C^1[-1,1]$, удовлетворяющих граничным условиям $x(-1) = 0$, $x(1) = 1$, равен нулю. Покажем, что этот инфимум не достигается.

Предположим, что $J(x_0) = 0$ на некотором плане x_0. Тогда

$$x_0(t)\big[1 - x_0'(t)\big] \equiv 0 \quad \text{на } [-1,1]. \tag{25}$$

По теореме о среднем

$$1 = x_0(1) - x_0(-1) = 2x_0'(\xi),$$

где $\xi \in (-1,1)$. Получаем $x_0'(\xi) = \frac{1}{2}$. В некоторой окрестности точки ξ будут выполняться неравенства $\frac{1}{4} < x_0'(t) < \frac{3}{4}$. Согласно (25) в той же окрестности $x_0(t) \equiv 0$. Отсюда, в частности, следует, что $x_0'(\xi) = 0$. Это противоречит равенству $x_0'(\xi) = \frac{1}{2}$.

Противоречие убеждает нас в том, что инфимум функционала $J(x)$ на множестве планов не достигается.

К о м м е н т а р и й. Если вариационная задача не имеет решения, то можно попытаться расширить основное пространство, на котором определён функционал, так, чтобы обеспечить существование решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Малозёмов В. Н. *Линейная алгебра без определителей. Квадратичная функция.* СПб.: Изд-во СПбГУ, 1997. 80 с.

2. Малозёмов В. Н. *Неравенства и экстремальные задачи* // Семинар «CNSA & NDO». Избранные доклады. 4 сентября 2014 г. (`http://apmath.spbu.ru/cnsa/reps14.shtml#0904`)

3. Малозёмов В. Н., Монако М. Ф., Петров А. В. *Формулы Фробениуса, Шермана-Моррисона и близкие вопросы.* // Журн. вычисл. мат. и матем. физ. 2002. Т. 42. № 10. С. 1459–1465.

4. Малозёмов В. Н. *Конечномерная проблема моментов* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 11 сентября 2010 г. (`http://dha.spb.ru/reps10.shtml#0911`)