УСКОРЕНИЕ СХОДИМОСТИ ИТЕРАТИВНЫХ МЕТОДОВ*

С. Е. Михеев

him2@mail.ru

26 марта 2015 г.

Аннотация. Исследуется повышение качества сходимости итеративных численных методов с помощью принципа минимальности, в котором предлагается использовать всю имеющуюся информацию для улучшения следующего приближения в смысле уменьшения оценки погрешности. В качестве такой информации рассматривается как теоретически получаемая оценка пошаговой погрешности исходного метода A вида $\|A(x)-\alpha\| \leqslant c\|x-\alpha\|^p$, так и получаемая в ходе вычислений оценка погрешности вида $\|x-\alpha\| \leqslant d$, где x — текущая итерация, α — искомое решение, $c>0$, $p \geqslant 1$. Получены расчетные формулы для $p=1$ и $p=2$, когда норма — естественная норма в гильбертовом пространстве. Легко определяемая вычислительная трудоемкость этих формул позволяет априори решить вопрос о целесообразности их применения для повышения качества сходимости.

1°. Принцип минимальности.

1.1. Предварительное описание. Пусть имеется некоторое отображение $A : B \to B$, где B — банахово пространство. Рассматривается метод простой итерации $x^{k+1} = A(x^k)$, $k = 0, 1, \ldots$ поиска неподвижной точки α отображения A. Об A часто бывает известна некоторая дополнительная информация I. Например, такая:

$$\|A(x^k) - \alpha\| \leqslant c\|x^k - \alpha\|, \qquad c < 1. \tag{1}$$

Для ускорения метода простой итерации, а точнее создания нового итеративного процесса с базовым отображением A предлагается

Принцип минимальности (ПМ). Ввести в состав итеративной информации I_k величину $A(x^k)$ и оценку текущей погрешности d_k. Пусть множество элементов, удовлетворяющих этой информации, есть $\mathcal{I}_k$. Следующей

*Семинар по конструктивному негладкому анализу и недифференцируемой оптимизации «CNSA & NDO»: `http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/`

итерацией назначить минимайзер величины $\Delta_k(y) := \max_{z\in\mathcal{I}_k}\|y-z\|$, иными словами,

$$x^{k+1} = \arg\min_{y\in B}\max_{z\in\mathcal{I}_k}\|y-z\|.$$

Итеративный метод, полученный применением принципа минимальности к какому-либо методу простой итерации, будем называть точной релаксацией (ТР) соответствующего метода.

В разновидности банахова пространства — в евклидовом — можно дать простую геометрическую интерпретацию вышеизложенному. Неизвестная неподвижная точка α после вычисления k-й итерации, находится в шаре $S_{x^k}^{d_k}$. После вычисления $k+1$-й итерации согласно базовому алгоритму A, определено еще одно множество, в котором должна находится неподвижная точка. Это $\mathcal{I}_k$ — множество из α, удовлетворяющих (1). Доказано, что $\mathcal{I}_k$ — шар. Таким образом, после вычисления $A(x^k)$ известно, что неподвижная точка должна принадлежать мениску — пересечению двух шаров: $\mathcal{I}_k \cap S_{x^k}^{d_k}$. Принцип минимальности предлагает следующим приближением назначить не $A(x^k)$, а центр шара минимального радиуса, содержащего указанный мениск. Это минимизирует наибольшую возможную погрешность при имеющейся информации.

Иллюстрация. Лучшее пояснение работы Принципа Минимальности можно найти не в в простейшем скалярном, а в гильбертовом пространстве, и на исходном одноточечном итеративном метода — методе простой итерации с оценкой (1), где норма — естественная норма гильбертова пространства: $\|y\| := \sqrt{y^2}$.

Пусть $P := x^{k-1}$, $E := A(x^{k-1})$. Проведем прямую h в гильбертовом пространстве H через P и E. Она — ось симметрии итеративного состояния на k-м шаге. Рассмотрим ситуацию в произвольной двумерной плоскости, содержащей EP. Во всех таких плоскостях в силу изотропности пространства H и в силу симметрии картина будет одинаковой.

Рисунок иллюстрирует случай удаленного расположения E относительно оценочного круга $S_p^{d_{k-1}}$, который изображен красным. Зеленым отмечена граница множества решений неравенства (1) относительно α, оно, как известно, является кругом Аполлония (E не его центр). Для этого круга характерно отношение $EB/PB = c$. Если назначить $x^k = E$, то из оценки (1) извлекается оценка $d_k \leqslant d_{k-1}$. Т.е. α принадлежит кругу $S_E^{cd_k}$, граница которого изображена черным. Однако нетрудно заметить, что решение α может находиться лишь в мениске пересечения круга Аполлония и $S_p^{d_{k-1}}$. Нетрудно заметить, что минимальный шар, содержащий этот мениск, имеет радиус, меньший, чем cd_{k-1}, и центр, отличный от E. Этот центр находится налево от E на пересечении общей хорды этих кругов с осью симметрии. Он отмечен на рисунке вертикальной стрелкой.

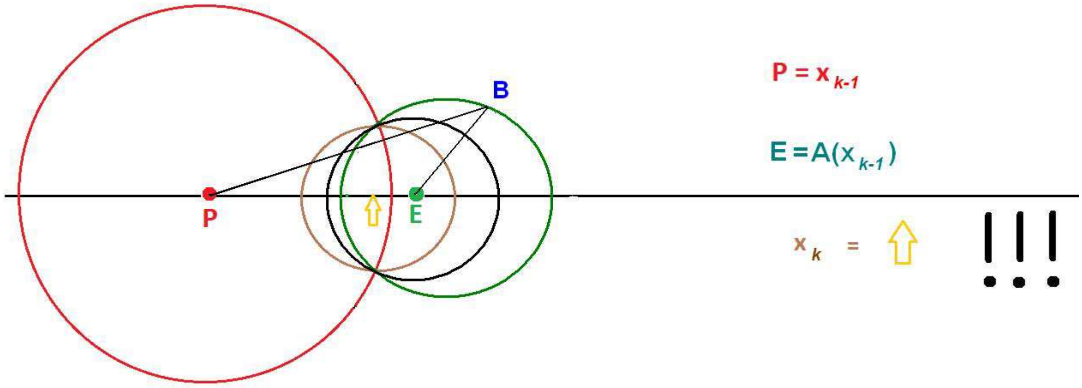

Рис. 1. Оценочные круги на k-й итерации

1.2. Определение принципа минимальности. Большая доля r-точечных итеративных методов поиска некоторого элемента α нормированного пространства B может быть представлена в виде

$$x^{k+1} = \mathcal{A}(X_k), \qquad k = 0, 1, 2, ... \tag{2}$$

где $\mathcal{A}$ — базовый алгоритм, связанный с исходной задачей f из некоторого семейства F, которая входит в него неявным параметром; $X_k := \{x^k, ..., x^{k-r+1}\}$; $\{x^i\}_{1-r}^{\infty}$ — итеративные точки, принадлежащие B; $X_0 \equiv \{x^0, ..., x^{1-r}\}$ — набор начальных точек, выбираемый из каких-то внешних для данного метода соображений.

Под сходимостью итераций из (2) понимается существование предела: $\alpha = \lim_{k\to\infty} x^k$. При $r = 1$ итерации (2) именуются методом простых итераций, а элемент α, если в нем непрерывен алгоритм $\mathcal{A}$, — неподвижной точкой алгоритма $\mathcal{A}$.

Когда алгоритм $\mathcal{A}$ корректно связан с исходной задачей f, элемент α, если существует, должен быть решением задачи f.

Согласно (2) алгоритм $\mathcal{A}$ для построения итеративной точки x^{k+1} использует информацию только о наборе X_k. Однако доступной и применяемой часто оказывается еще дополнительная информация I_k, в явном виде не вошедшая в список аргументов алгоритма $\mathcal{A}$, а вычисляемая вспомогательным алгоритмом:

$$I_{k+1} = \mathcal{A}_I(X_k, I_k), \qquad k = 0, 1, ... \,. \tag{3}$$

В качестве примера подобной дополнительной информации можно привести оценку погрешности d_k для k-го приближения:

$$d_k \geqslant \|x^k - \alpha\|. \tag{4}$$

Если она используется для критерия остановки итеративного процесса:

$$d_k \leqslant \varepsilon, \tag{5}$$

где ε — заданный уровень допустимой погрешности приближенного решения, то к вычислениям в (2) добавляются еще вычисления d_k в (3) как одной из составных частей I_k. Если помимо d_k не используется другой информации, то $I_k = \{d_k\}$. И тогда расчетная формула (3) часто редуцируется до (8).

Вместе с тем и базовый алгоритм может зависеть от некоторой, вообще говоря, иной информации. После пополнения ею I_k и сохранения того же обозначения, итеративный метод принимает вид

$$\left.\begin{aligned} x^{k+1} &= \mathcal{A}(X_k, I_k), \\ I_{k+1} &= \mathcal{A}_I(X_k, I_k), \end{aligned}\right\} \qquad k = 0, 1, ... \tag{6}$$

Более того, введем также во все I_k, с сохранением обозначений, ту часть доступной без вычислительных затрат информации, которая непосредственно не использовалась в итерациях (6).

Поясним сказанное примером. Из оценки текущей погрешности и информации о сжимающих свойствах базового алгоритма метода простой итерации:

$$(\forall x \in B) \quad \|\mathcal{A}(x) - \alpha\| \leqslant c\|x - \alpha\|^p, \qquad p \geqslant 1, \tag{7}$$

легко извлекается рекуррентная формула для неулучшаемой согласно имеющейся информации оценки погрешности $(k{+}1)$-го приближения:

$$d_{k+1} = c d_k^p. \tag{8}$$

Однако очевидно, что восстановить (7) по (8) невозможно. Следовательно, в $\{(7), d_k\}$ информации больше, чем в $\{(8), d_k\}$. Поэтому окончательно полагаем

$$I_k := \{(7), d_k\}, \qquad\qquad \mathcal{A}_I(x^k, I_k) := \{(7), c d_k^p\}.$$

Будем также считать, что результат работы базового алгоритма $\mathcal{A}$ не меняется при описанном выше расширении итеративной информации. Потребуем еще, чтобы все I_k, $k = 0, 1, ...$ обладали единым строением Ξ.

Изложим методику, которая позволяет в некоторых случаях предложить на основе базового алгоритма $\mathcal{A}$ иные итерации, сходящиеся лучше, чем процесс (6). Как правило, объем дополнительных к базовому алгоритму вычислений для подобной модификации легко оценивается.

Принцип минимальности (ПМ). *Если итеративная информация I_k еще не содержит оценку погрешности d_k, введем ее туда с сохранением обозначений для информации и ее структуры (I_k, Ξ). Если начальная оценка была неизвестна, назначаем $d_0 := +\infty$.*

Положим $w = \mathcal{A}(X_k, I_k)$.

Если итеративный процесс (6) *имеет теоретическое обоснование сходимости, то набору* X_k, I_k *должно соответствовать содержащее решение* α *некоторое ограниченное множество*

$$\mathcal{I}_k := \mathcal{I}(X_k, I_k) \subset B,$$

а расширенному набору $X_k, w, I_k,$ *— суженное, вообще говоря, множество*

$$\mathcal{I}'_k := \mathcal{I}'(X_k, w, I_k) \subset B. \tag{9}$$

Для построения очередного итеративного набора x^{k+1}, I_{k+1} *нужно использовать набор* X_k, w, I_k *следующим образом. Итеративной точкой* x^{k+1} *назначить минимайзер величины* $\Delta_k(y) := \max_{z\in\mathcal{I}'_k} \|y - z\|$, *т. е. величину*

$$\arg\min_{y\in B} \max_{z\in\mathcal{I}'_k} \|y - z\|, \tag{10}$$

где $\mathcal{I}'_k$ *— множество из* (9). *Очередная итеративная информация* I_{k+1} *должна обладать строением* Ξ, *входящая в нее оценка погрешности есть* $d_{k+1} \equiv \Delta_k(x^{k+1})$, *оставшаяся часть итеративной информации определяется так, чтобы*

$$\mathcal{I}(x^{k+1}, I) \supset \mathcal{I}'_k \implies \mathcal{I}(x^{k+1}, I_{k+1}) \subset \mathcal{I}(x^{k+1}, I),$$

где I *обладает строением* Ξ.

Если минимайзер величины $\Delta_k(y)$ *или очередная итеративная информация не определены единственным образом согласно вышеизложенному, то это следует сделать с привлечением каких-нибудь дополнительных соображений об их выборе.*

Замечание 1. Применение ПМ отменяет применение вспомогательного алгоритма $\mathcal{A}_I$ в итеративном процессе.

Замечание 2. ПМ применим также и к итеративным процессам, не имеющим изначально отличной от X_k итеративной информации ($I_k = \emptyset$). В этих случаях согласно ПМ строение Ξ формируется из одного числа — оценки погрешности текущей итерации: $I_k = d_k$. При этом, если нет оценки погрешности d_0, то можно положить $d_0 = +\infty$. Далее будет показана польза от пополнения итеративной информации оценкой погрешности.

Модификация алгоритма $\mathcal{A}$ с помощью принципа минимальности есть новый алгоритм $\mathcal{M}(X, I, \mathcal{A}(X))$. Его естественно именовать *точной релаксацией* (ТР) алгоритма $\mathcal{A}$, ибо он обеспечивает минимум оценки погрешности следующей итеративной точки в рамках имеющейся информации.

Точные релаксации порождают итеративный процесс

$$\{x^{k+1}, I_{k+1}\} = \mathcal{M}\left(X_k,\, I_k, \mathcal{A}(X_k)\right), \quad k = 0, 1, \dots\ . \tag{11}$$

Здесь начальные точки x^i, $i = \overline{1 - r, ..., 0}$, и начальная итеративная информация I_0 (без d_0) те же, что и для исходного итеративного метода (6). Для прочих индексов $k = 1, 2, \dots$ итеративные точки и итеративные информации, вообще говоря, отличны от тех, что появляются в методе (6). Последнее предложение верно и для оценок погрешностей d_k, $k = 1, 2, ...,$ если они входили в состав итеративной информации метода (6).

Итеративный процесс приближения к искомому элементу α с помощью ТР назовем *методом точных релаксаций.*

2°. Точные релаксации для метода простых итераций. Естественно ожидать, что различия в нормах и в строениях итеративной информации приведут к различиям в вычислительных формулах метода точных релаксаций любого итеративного метода, и в частности метода простых итераций. Добавим конкретности.

K1. В качестве B возьмем предгильбертово (в частности, и евклидово) пространство, а под $\|\cdot\|$ будем понимать естественную норму в нем: $\|x\| := \sqrt{x \cdot x}$.

K2. Итеративная информация — оценка (7) и оценка текущей погрешности d_k. Оценка начальной погрешности $d_0 \geqslant \|x^0 - \alpha\|$ считается заданной. В частности, допустимо $d_0 = +\infty$.

Таким образом, дополнительная информация I_k состоит из постоянной части (оценки (7)) и переменного числа d_k — оценки текущей погрешности (см. (4)).

Тогда, опуская постоянный компонент итеративной информации, (11) принимает [5] вид:

$$(x^{k+1}, d_{k+1}) = \mathcal{M}(x^k,\, d_k, \mathcal{A}(x^k, d_k)), \qquad k = 0, 1, \dots\ . \tag{12}$$

По своему духу предлагаемая модификация $\mathcal{M}$ имеет отдаленное сходство с релаксациями в итеративных методах решения систем линейных уравнений (в основном в модификации методов типа метода Гаусса—Зейделя) как в «чистом виде», так и в составе итеративных методов, требующих решения линейных систем, например в методе Ньютона [10] или в методе сеток [11].

Далее, где возможно, индекс текущей итерации у оценок погрешностей и итеративных точек будет опускаться, а вместо индекса последующей итерации $(k+1)$ будет $*$, т. е.: $x := x^k$, $d := d_k$, $x^* := x^{k+1}$, $d_* := d_{k+1}$.

Когда $c < 1 \ \wedge\ p = 1$, итерации (2) согласно (7) порождают глобально сходящуюся к α последовательность $\{x^k\}_1^\infty$, т. е. сходимость происходит из любой начальной точки пространства B.

Когда $p > 1$, глобальная сходимость метода простой итерации из оценки (7) не следует ни при каком c. Действительно, существование такого $d = d^0$, что $cd^p > d$, очевидно. Ясно также, что и $x = x^0$, удовлетворяющий $\|x - \alpha\| = d$, существует. Из (7) лучше оценки погрешности следующей итерации, чем $d_* < cd^p$, не получить. Таким образом, ситуация $d_* \in (d, cd^p)$ вполне возможна, т. е. погрешность следующей итерации может оказаться больше текущей.

Достаточное условие сжатия метода простой итерации при $p > 1$, связанное с ограничением на начальную погрешность, легко получить из (7):

$$1 > cd^{p-1} \iff d > cd^p > d_*.$$

Нетрудно заметить, что это условие $(1 > cd^{p-1})$ для любого $c > 0$ всегда можно удовлетворить достаточно малым d. Таким образом, метод простой итерации всегда имеет локальную сходимость при $p > 1$ независимо от c.

Оказывается, условия К1 и К2 однозначно определяют очередные итеративные точку x^* и информацию d_* для точной релаксации. Покажем как.

Определим зону Аполлония (о происхождении названия несколько позднее) и оценочный шар:

$$\begin{aligned} S(x, \mathcal{A}) &:= \{\alpha \mid \|\mathcal{A}(x) - \alpha\| \leqslant c\|x - \alpha\|^p\}, \\ S_x^d &:= \{y \mid \|y - x\| \leqslant d\}. \end{aligned} \tag{13}$$

Поскольку решение α должно находиться как в $S(x, \mathcal{A})$, так и в S_x^d, и это единственное условие для формирования $\mathcal{I}'_k$,[1] имеем

$$\mathcal{I}'_k = S(x, \mathcal{A}) \bigcap S_x^d. \tag{14}$$

Согласно принципу минимальности $(k+1)$-й итеративной точкой следует назначить центр минимального шара (т. е. шара минимального радиуса), содержащего множество $\mathcal{I}'_k$. Лучшая оценка погрешности d_* итеративной точки x^* тогда будет равна радиусу минимального шара. Числа, большие чем этот радиус, дали бы больший оценочный шар на следующей итерации. Следовательно, согласно принципу минимальности в $(k+1)$-ю итеративную информацию нужно включить d_*.

Так как минимальный шар единствен для любого множества, привлечения дополнительных соображений, для устранения неединственности в рассматриваемой точной релаксации, не требуется.

[1] Добавление к составу двух условий, определяющих множество $\mathcal{I}'_k$, стандартной оценки: $||\mathcal{A}(x) - \alpha|| \leqslant cd^p$ не сузит множества $\mathcal{I}'_k$, так как она вытекает из этих двух условий.

Отметим, что при $d_0 = +\infty$ будет $S_x^d = B$ и $\mathcal{I}'_k = S(x, \mathcal{A})$. Если зона Аполлония ограничена, то она содержится в некотором минимальном шаре, радиус которого будет оценкой погрешности последующей итерации согласно ТР. В этом случае применение ТР не нуждается в предварительной оценке начальной погрешности. Однако ее наличие, если $d_0 < \infty$, повышает скорость сходимости ТР.

Более того, при $p = 1$, как известно, зона Аполлония является шаром, т. е. всегда ограничена. Тогда, следовательно, предварительные изыскания для применения ТР на основе метода простой итерации можно ограничить лишь установлением факта $c < 1$.

Сходимость, скорость сходимости, текущие погрешности, удобство использования метода точной релаксации естественно сравнивать с такими же характеристиками породившего его метода простой итерации.

Распространенный подход к исследованию погрешности текущей итерации x в методе простых итераций с использованием оценки (7) заключается в получении оценки d_0 погрешности начального приближения $(||x^0 - \alpha|| \leqslant d_0)$ и последовательном применении вытекающей из (7) формулы $d_{k+1} \leqslant c d_k^p$:

$$d_k \leqslant c^{1+p+p^2+\ldots+p^{k-1}} d_0 = (C d_0)^{p^k} / C, \tag{15}$$

где $C = \sqrt[p-1]{c}$. В линейном случае $(p = 1)$:

$$d_k \leqslant c d_{k-1} \leqslant \ldots \leqslant c^k d_0. \tag{16}$$

Использование такого типа оценок для остановки итеративного процесса по достижении заданной точности фактически превращает метод простых итераций в метод вида (6).

Поведение оценок погрешностей в методе ТР носит совсем иной характер в силу их зависимости от последовательности результатов применения ТР на каждом шаге. То есть априори эти оценки носят вероятностный характер и корректное сравнение их поведений следует проводить привлекая ту или иную статистику. Вместе с тем, согласно принципу минимальности оценки погрешностей итераций метода ТР всегда не больше оценок модифицируемого метода, а в некоторых случаях возможно для погрешности следующей итерации по ТР получить оценку сверху, которая для любой текущей итерации будет строго меньше оценки следующей итерации в исходном алгоритме.

3°. Точные релаксации в скалярном пространстве. Наиболее наглядно проявление метода ТР в скалярном пространстве. Шар S_x^d превращается в сегмент $[x - d,\ x + d]$. Для описания зоны Аполлония введем обозначения:

$$\vec{r} := \mathcal{A}(x) - x, \qquad r := |\vec{r}\,|. \tag{17}$$

3.1. Линейная сходимость ($p = 1$). Таковой сходимостью обладает, например, упрощенный метод Ньютона

$$x^{k+1} = x^k - g'(x^0)g(x^k)$$

решения нелинейного уравнения $g(x) = 0$, где $g : D \subseteq R^1 \to R^1$.

Традиционно считается, что оценка (7) при $p = 1$ имеет ценность, лишь когда $c < 1$. Будем и здесь пока полагать $c < 1$. Тогда в линейном случае зона Аполлония есть сегмент:

$$S(x, \mathcal{A}) := \left[x + \frac{\vec{r}}{1+c},\ x + \frac{\vec{r}}{1-c}\right]. \tag{18}$$

(Здесь допущена небольшая вольность речи: когда $\bar{r} < 0$, то левый конец последнего сегмента становится больше правого.)

Пересечение двух сегментов S_x^d и $S(x, \mathcal{A})$ есть сегмент. Его центр, согласно ТР, назначается следующей итеративной точкой, а половина его длины — оценкой d_{k+1} погрешности точки x^{k+1}.

Вывод расчетных формул для x^* и d_* несложен:

$$x^* = \begin{cases} x + \operatorname{sgn} \vec{r}\left(d + \dfrac{r}{1+c}\right)/2 & \wedge \quad d \leqslant \dfrac{r}{1-c}, \\ x + \dfrac{\vec{r}}{1-c^2} & \wedge \quad d > \dfrac{r}{1-c}, \end{cases} \tag{19}$$

$$d_* = \begin{cases} \left(d - \dfrac{r}{1+c}\right)/2 & \wedge \quad d \leqslant \dfrac{r}{1-c}, \\ \dfrac{rc}{1-c^2} & \wedge \quad d > \dfrac{r}{1-c}. \end{cases} \tag{20}$$

Вторые строки в формулах (19), (20) соответствуют столь большому d, что зона Аполлония $S(x, \mathcal{A})$ целиком содержится в S_x^d. Если неизвестна оценка погрешности начального приближения d_0, то она полагается равной $+\infty$, что приводит на первом шаге к использованию именно вторых строк в формулах (19), (20):

$$x^1 = x + \vec{r}/(1-c^2) \quad \wedge \quad d_1 = rc/(1-c^2).$$

Дополнительные вычислительные затраты на итерацию точной релаксации определяются из формул (19), (20). Это — операция умножения r на $1/(1-c)$, одна операция сравнения, затем, когда $d > r/(1-c)$, две операции умножения: r на $c/(1-c^2)$ и r на $1/(1-c^2)$, а когда $d \leqslant r/(1-c)$ — одно умножение r на $1/(2+2c)$, одно деление d на 2 и два сложения-вычитания. Итого: одна операция сравнения плюс 3-4 арифметических операции.

Из первой строки формул (20) получаем

$$d_* = \Big(d - \frac{r}{1+c}\Big)/2 \leqslant \Big(d - \frac{d-dc}{1+c}\Big)/2 = \frac{dc}{1+c}.$$

Из второй строки:

$$d_* = \frac{rc}{1-c^2} < \frac{dc}{1+c}.$$

Таким образом, всегда

$$d_* \leqslant \frac{dc}{1+c}. \tag{21}$$

Равенство в оценке (21) возможно лишь в редких случаях, когда $\|\mathcal{A}(x) - x\| \equiv r = d - dc$. Поэтому практическая ценность модификации выше, чем коэффициент $c/(1+c)$ в (21) вместо c в (16).

При возрастании c к 1, скорость сходимости метода TP уменьшается. Тем не менее, всегда гарантируется уменьшение оценки погрешности более чем в два раза на шаге.

Примечательно, что если оценка начальной погрешности известна, то метод TP сходится к решению и когда $c = 1$. Тогда зона Аполлония есть полубесконечный интервал, который содержит $\mathcal{A}(x)$ и имеет конечную границу в точке $(\mathcal{A}(x) + x)/2$. Расчетные формулы TP упрощаются до

$$x^* = x + \operatorname{sgn} \vec{r} \Big(d + \vec{r}/2\Big)/2 \quad \wedge \quad d_* = \Big(d - r/2\Big)/2.$$

При этом на каждой итерации будет выполняться $r \leqslant 2d$ и погрешность продолжает уменьшаться более чем в два раза.

3.2. Квадратичная сходимость ($p = 2$). Таковой сходимостью обладает, например, метод Ньютона

$$x^* = x - J^{(-1)}(x)g(x)$$

для решения скалярного уравнения $g(x) = 0$.

В квадратичном случае границы зоны Аполлония $S(x, \mathcal{A})$ суть вещественные корни следующего уравнения относительно α:

$$|\mathcal{A}(x) - \alpha| = c|x - \alpha|^2.$$

В зависимости от соотношений чисел x, $\mathcal{A}(x)$, c их может быть 2, 3, 4. Поместим начало координат в точку x и направим координатную ось так, чтобы $0 < \mathcal{A}(x) \equiv r$. Тогда для определения координат границ зоны Аполлония имеем уравнение относительно γ:

$$|r - \gamma| = c\gamma^2. \tag{22}$$

Его корни, меньшие r, удовлетворяют уравнению $r-\gamma=c\gamma^2$, всегда имеющему два вещественных корня:

$$\gamma_{0,1}=\frac{-1\mp\sqrt{1+4rc}}{2c}.$$

Они также являются и корнями уравнения (22), ибо, как нетрудно проверить, для любых положительных r, c справедливо неравенство $-1+\sqrt{1+2rc}<2rc$, эквивалентное $\gamma_1<r$. Ну а $\gamma_0<\gamma_1$ очевидно. Следовательно, $\gamma_0,\gamma_1\in\partial S(x,\mathcal{A})$ и легко проверить, что $(\gamma_0,\gamma_1)\not\subset S(x,\mathcal{A})$.

Корни уравнения (22) бóльшие, чем r, определяются аналогично:

$$\gamma-r=c\gamma^2 \implies \gamma_{2,3}=\frac{1\mp\sqrt{1-4rc}}{2c}.$$

Если $1\geqslant 4rc>0$, то аналогично легко проверяется, что $\gamma_2>r$. И очевидно, что $\gamma_3\geqslant\gamma_2$ с достижением равенства при $rc=1/4$. Поэтому вещественные γ_2,γ_3 также являются и корнями уравнения (22), следовательно, $\gamma_2,\gamma_3\in\partial S(x,\mathcal{A})$. Нетрудно проверить, что $(\gamma_2,\gamma_3)\not\subset S(x,\mathcal{A})$. Таким образом, зона Аполлония имеет следующую структуру:

$$S(x,\mathcal{A})=\begin{cases}(-\infty,\gamma_0]\bigcup[\gamma_1,+\infty), & 4rc\geqslant 1,\\ (-\infty,\gamma_0]\bigcup[\gamma_1,\gamma_2]\bigcup[\gamma_3,+\infty), & 4rc\leqslant 1.\end{cases}\tag{23}$$

Здесь в случае реализации равенства $4rc=1$ выполняется $\gamma_2=\gamma_3$ и множество во второй строке совпадает с множеством из первой строки.

Ограничение начальной погрешности $d<1/c$ — обычное требование к оценкам $|\mathcal{A}(x)-\alpha|\leqslant c|x-\alpha|^2$. Тогда, поскольку $|\gamma_0|>1/c$, верно $|\gamma_0|>d$ для всех r. Следовательно, полубесконечный интервал $(-\infty,\gamma_0]$ не участвует в построении множества $\mathcal{I}'_k$. Вместе с тем, $r\leqslant d+cd^2$ и поэтому

$$\gamma_1\leqslant\frac{-1+\sqrt{1+4cd+4c^2d^2}}{2c}=d.$$

Относительно γ_2 и γ_3 величина d может быть расположена произвольно. Таким образом, точная релаксация, когда $4rc\geqslant 1$, а также когда $4rc<1$, в случаях $d\geqslant\gamma_3$ и $d\leqslant\gamma_2$, при произвольном x имеет вид

$$\begin{cases}x^*=x+\dfrac{\gamma_1+d}{2}\operatorname{sgn}\vec{r}=x+\left(\dfrac{d}{2}-\dfrac{1-\sqrt{1+4rc}}{4c}\right)\operatorname{sgn}\vec{r},\\[2ex] d_*=\dfrac{d-\gamma_1}{2}=\dfrac{d}{2}+\dfrac{1-\sqrt{1+4rc}}{4c}.\end{cases}$$

В других случаях, т. е. когда $4rc < 1 \ \wedge \ d \in (\gamma_2, \gamma_3)$:

$$\begin{cases} x^* = x + \dfrac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} \operatorname{sgn} \vec{r} = x + \dfrac{\sqrt{1+4rc} - \sqrt{1-4rc}}{4c} \operatorname{sgn} \vec{r}, \\ \qquad d_* = \dfrac{\gamma_2 - \gamma_1}{2} = \dfrac{2 - \sqrt{1-4rc} - \sqrt{1+4rc}}{4c}. \end{cases}$$

4°. Многомерный случай ($p = 1$)**.** Этот случай имеет общее с некоторыми результатами из дифференциальных игр преследования.

4.1. Связь метода простой итерации с дифференциальными играми. Пусть Преследователь P и Убегающий E — двое игроков-точек — обладают простым движением:

$$||\dot{P}|| \leqslant 1, \qquad ||\dot{E}|| \leqslant c, \qquad c < 1. \tag{24}$$

Точки P и E есть элементы вещественного гильбертова или евклидова пространства B. Под нормой элемента $z \in B$ понимается $\sqrt{z \cdot z}$. Игроки P и E могут в каждый момент времени выбирать произвольное направление скорости своего движения и величину скорости, подчиненную ограничению (24).

Если Убегающий выбирает равномерное прямолинейное движение с максимальной скоростью на всю игру, и Преследователь знает это, а также выбираемую начальную скорость $\dot{E}(0)$ и начальные позиции $E(0) \neq P(0)$, то он может двигаться на *перехват*, т. е. прямолинейно и с максимальной скоростью так, чтобы обеспечить за минимальное время T захват Убегающего, под чем понимается поточечное совпадение игроков в этот момент: $P(T) = E(T) =: Z$. Ясно, что

$$|E(0)Z| = c|P(0)Z|. \tag{25}$$

Такому типу игр посвящено много исследований, в частности в работах [1, 3, 21, 16]. Доказано, что множество захватов образует замкнутую гладкую гиперповерхность, являющуюся границей некоторого односвязного множества, называемого *зоной безопасности* (*или областью достижимости*) [12]. В двумерном пространстве она известна как *круг Аполлония*[2)]. В многомерном пространстве будем называть его *шаром Аполлония.* Сделаем извлечения из упомянутых работ:

[2)] Аполлонию в III в. до н. э. дифференциальные игры еще не были известны. Он исследовал геометрическое место точек, отношение расстояний которых до двух фиксированных точек есть постоянная величина, и доказал, что это окружность.

ЛЕММА 1. *Из двух множеств, на которые разбивается пространство гиперповерхностью захватов, шаром Аполлония, т. е. односвязным и ограниченным, при* $c < 1$ *является множество*

$$S_{E(0),P(0),c} := \{Z \big| |E(0)Z| \leqslant c|P(0)Z|\}. \tag{26}$$

ЛЕММА 2. *Шар (круг) Аполлония* $S_{E(0),P(0),c}$ *есть действительно шар (круг), и его центр находится на прямой, проходящей через* $E(0)$ *и* $P(0)$.

ЛЕММА 3. *Если* P *имеет текущую информацию о* $\dot{E}(t)\ \forall t \geqslant 0$ *и выбирает свою скорость* $\dot{P}(t)\ \forall t \geqslant 0$, *как скорость движения на перехват при прямолинейной стратегии Убегающего, начинающейся с момента* t, *т. е.* $\dot{E}(\tau) = \dot{E}(t)\ \forall \tau \geqslant t$, *то захват Убегающего произойдет внутри шара Аполлония.*

Возвращаемся к численным методам. При $p = 1$ зона Аполлония (13) принимает вид

$$S(x, \mathcal{A}) := \{\alpha \mid \|\mathcal{A}(x) - \alpha\| \leqslant c\|x - \alpha\|\}. \tag{27}$$

Сопоставлением x и $P(0)$, $\mathcal{A}(x)$ и $E(0)$, α и Z доказывается равенство границы шара Аполлония $S_{E(0),P(0),c}$, т. е. множества точек Z, удовлетворяющих (25), множеству $\{\alpha \Big| \|\mathcal{A}(x) - \alpha\| = c\|x - \alpha\|\}$. Таким образом, в силу леммы 2 зона Аполлония $S(x, \mathcal{A})$ есть шар Аполлония, центр которого лежит на прямой ℓ, проходящей через x и $\mathcal{A}(x)$.

ЛЕММА 4. *Если итерация* x *не является неподвижной точкой алгоритма* $\mathcal{A}$, *то* $x \notin S(x, \mathcal{A})$.

Доказательство. Иначе, положив в (27) переменную α равной $x \in S(x, \mathcal{A})$, получили бы $\|\mathcal{A}(x) - x\| \leqslant 0$, т. е. $\mathcal{A}(x) = x$, т. е. итерация x суть неподвижная точка алгоритма $\mathcal{A}$. $\square$

Из леммы 4, очевидно, следует, что если α — искомое решение, то

$$x \neq \alpha \implies S(x, \mathcal{A}) \not\supset S_x^d. \tag{28}$$

ЛЕММА 5. *Если сегмент* s *круга* S_x^d, *отсекаемый хордой* Q, *не содержит центра* x *круга* S_x^d, *то* s *содержится в круге* $S_C^{|Q|/2}$ *с центром* C *в середине хорды* Q, *которая для* $S_C^{|Q|/2}$ *является диаметром.*

Ограничимся только схемой доказательства, оставив без внимания очевидное, но требующее для проверки громоздких выкладок.

Введем полярную систему координат. Полюс разместим в x, а полярную ось проведем через C. В силу симметрии и условия леммы, концы хорды имеют полярные углы $\pm\varphi_{\mathrm{Q}}$ и $\varphi_{\mathrm{Q}} \in (0, \pi/2)$, а все углы точек дуги сегмента лежат в $[-\varphi_{\mathrm{Q}}, \varphi_{\mathrm{Q}}]$. Согласно теореме косинусов квадрат расстояния ρ от C до любой точки $\sigma := (d, \varphi)$ дуги сегмента есть

$$\rho(\varphi) \equiv |\sigma x|^2 = |Cx|^2 + d^2 - 2\cos\varphi. \tag{29}$$

Так как $\cos\varphi > \cos\varphi_{\mathrm{Q}}$ $\forall \varphi \in (-\varphi_{\mathrm{Q}}, \varphi_{\mathrm{Q}})$, максимум $\rho(\varphi)$, равный $|Q|/2$, достигается на крайних точках дуги. Поэтому вся дуга лежит в шаре $S_C^{|Q|/2}$, значит и весь сегмент s в $S_{\mathrm{C}}^{|\mathrm{Q}|/2}$.

Найдем диаметр и центр минимального по величине[3)] диаметра шара S, содержащего пересечение оценочных множеств, т. е. пересечение шара $S_x^d := \{z \,\big|\, ||z - x|| \leqslant d\}$ с шаром Аполлония $S(x, \mathcal{A})$. (Оно, конечно, не пусто, если обе оценки истинны.)

В силу симметрии ситуации относительно прямой ℓ центр шара S должен лежать на этой прямой. Для нахождения этого центра и радиуса (т. е. величин x^* и d_*) рассмотрим содержащую ℓ произвольную двумерную плоскость. В ней сечения исследуемых трех шаров имеют вид кругов, диаметры которых равны соответственно диаметрам этих трех шаров. В силу (28), если $\mathcal{A}(x) \neq x$, то либо $S(x, \mathcal{A}) \subset S_x^d$, либо круги $S(x, \mathcal{A})$, S_x^d имеют общую хорду $Q \perp \ell$. Ясно, что $Q_\ell := Q \cap \ell$ является серединой (центром) хорды Q.

Проведем в круге Аполлония диаметр D перпендикулярно прямой ℓ. И затем,

1) когда этот диаметр принадлежит кругу S_x^d, следует положить $S = S(x, \mathcal{A})$, ибо нет меньшего круга, который бы содержал D;

2) когда $D \not\subset S_x^d$, найдем общую хорду Q кругов $S(x, \mathcal{A})$ и S_x^d.

ТЕОРЕМА 1. *Если* $D \not\subset S_x^d$, *то*
1) центры шаров S_x^d, $S(x, \mathcal{A})$ *лежат на прямой* ℓ *по разные стороны от* Q_ℓ;
2) шар, в котором Q *суть диаметр, является минимальным шаром, содержащим* $S_x^d \bigcap S(x, \mathcal{A})$.

[3)] В русском языке слово «диаметр» может иметь смысл отрезка и смысл величины этого отрезка. Различение происходит обычно по контексту. Далее в этой работе распознавать значения этого термина также предлагается в основном по контексту. Однако в обозначениях будет разница: D и $|D|$.

Доказательство. Достаточно проверить утверждения теоремы в произвольном двумерном сечении пространства, содержащем прямую ℓ.

1. Пусть точка $C_{\mathcal{A}} \in \ell$ есть центр круга $S(x, \mathcal{A})$. Параметризуем прямую ℓ: $C(t) := C_{\mathcal{A}} - \dfrac{C_{\mathcal{A}} - x}{\|C_{\mathcal{A}} - x\|} t$. Восстановим перпендикуляр к ℓ в $C(t)$. Допустим, он пересекает границу круга Аполлония в точке $Y(t)$. По теореме Пифагора

$$\|x - Y(t)\|^2 = \left(\sqrt{|D|^2/4 - t^2}\right)^2 + \left(\|C_{\mathcal{A}} - x)\| - t\right)^2 =$$

$$= |D|^2/4 + (C_{\mathcal{A}} - x)^2 - 2\|C_{\mathcal{A}} - x\|t.$$

Следовательно, $\|x - Y(t)\|$ монотонно убывает до 0 с ростом t от 0. Но $D \not\subset S_x^d$ означает, что концы диаметра D, как самые удаленные от x, не принадлежат кругу S_x^d, т. е. $\|x - Y(0)\| > d$, что при $t < 0$ влечет $\|x - Y(t)\| > d$. Поэтому $Y(t)$ при $t \leqslant 0$ не может быть концом хорды Q, и, следовательно, $(\nexists t < 0)\ Q_\ell = C(t)$. То есть $C_{\mathcal{A}}$, равный $C(0)$, не может находиться между $x = C(\|C_{\mathcal{A}} - x\|)$ и Q_ℓ. По лемме 4 $x \notin S(x, \mathcal{A})$, следовательно, x не может быть между $C_{\mathcal{A}}$ и Q_ℓ (тогда бы выполнялось $\|C_{\mathcal{A}} - x\| \leqslant \|C_{\mathcal{A}} - Q_\ell\| < < D/2$, что влечет $x \in S(x, \mathcal{A})$). Остается одна возможность: Q_ℓ — между $C_{\mathcal{A}}$ и x.

2. Поскольку центры кругов S_x^d и $S(x, \mathcal{A})$ находятся по разные стороны от их общей хорды Q, их пересечение состоит из объединения двух сегментов, отсекаемых хордой Q от этих кругов. Причем ни один из таких сегментов не содержит центра круга, от которого он отсечен, поэтому каждый из сегментов находится в круге, для которого Q — диаметр (лемма 5). Следовательно, и объединение этих сегментов также лежит в этом круге. $\square$

Перейдем к вычислительным формулам для центра и радиуса шара S.

4.2. Вывод расчетных формул. Пусть

$$\vec{r} := \mathcal{A}(x) - x, \quad r := ||\vec{r}||. \tag{30}$$

Используя оценку (27), имеем

$$r \leqslant \|x - \alpha\| + \|\mathcal{A}(x) - \alpha\| \leqslant d + dc. \tag{31}$$

Найдем параметры круга Аполлония: величину его диаметра D и центр O. Согласно теореме 1.7 поиск сводится к одномерному на прямой ℓ, проходящей через x и $\mathcal{A}(x)$. Там $S(x, \mathcal{A})$ имеет вид (18). Поэтому

$$O = x + \frac{\vec{r}}{1 - c^2} = \frac{\mathcal{A}(x) - xc^2}{1 - c^2}, \tag{32}$$

$$|D| = \frac{r}{1-c} - \frac{r}{1+c} = \frac{2cr}{1-c^2}. \tag{33}$$

Рассмотрим диаметр D круга Аполлония, перпендикулярный ℓ. На перпендикуляре к прямой ℓ, восстановленном в центре O, точки, более близкие к центру, ближе также и к итерации x. Следовательно, чтобы проверить будет ли диаметр D принадлежать шару S_x^d, достаточно проверить будут ли его концы в шаре S_x^d, что эквивалентно соотношению

$$\sqrt{(O-x)^2 + |D|^2/4} \leqslant d.$$

Найдем r, которое обеспечивает здесь равенство:

$$(O-x)^2 + \frac{D^2}{4} \equiv \frac{r^2}{(1-c^2)^2} + \frac{c^2r^2}{(1-c^2)^2} = d^2.$$

Отсюда искомое значение r есть

$$\hat{r} = (1-c^2)\sqrt{\frac{d^2}{1+c^2}} = \frac{d(1-c^2)}{\sqrt{1+c^2}}. \tag{34}$$

В силу формул (32), (33) выражения $(O-x)^2$ и D^2 растут с ростом величины r, поэтому $\bar{D} \subset S_x^d \iff r \leqslant \hat{r}$.

Случай $r \leqslant \hat{r}$. Точная релаксация и оценка ее погрешности определяются по формулам:

$$x^* = O = x + \frac{\vec{r}}{1-c^2}, \tag{35}$$

$$d_* = \frac{D}{2} = \frac{cr}{1-c^2}. \tag{36}$$

Случай $r > \hat{r}$. Пусть z — расстояние между центрами круга Аполлония и общей хорды Q. Вначале найдем центр $x^* = x + h\vec{r}/r$ общей хорды, где расстояние

$$h \in (0, r) \overset{(31)}{\subset} (0, d + cd)$$

от этого центра до x удовлетворяет системе

$$\begin{cases} h + z = ||O - x||, \\ D^2/4 - z^2 = d^2 - h^2 \equiv d_*^2 \end{cases}$$

Преобразуем эту систему с помощью формул (32) и (33):

$$\begin{cases} h + z = \dfrac{r}{1-c^2}, \\ (h-z)\dfrac{r}{1-c^2} = d^2 - \dfrac{D^2}{4} = d^2 - \dfrac{c^2r^2}{(1-c^2)^2}. \end{cases}$$

Отсюда

$$h = \frac{1}{2}\left(\frac{r}{1-c^2} + \frac{d^2(1-c^2)}{r} - \frac{c^2 r}{1-c^2}\right) = \frac{1}{2}\left(r + \frac{d^2(1-c^2)}{r}\right), \qquad (37)$$

$$x^* = x + \vec{r}\left(\frac{1}{2} + \frac{d^2(1-c^2)}{2r^2}\right). \qquad (38)$$

Половина длины хорды Q есть

$$d_* = \frac{1}{2}|Q| = \sqrt{d^2 - h^2}. \qquad (39)$$

Итак, расчетные формулы в первом случае будут (35) и (36), во втором — (37)–(39).

Оценим оценку d_* через оценку d.

ТЕОРЕМА 2.

$$\max_{r \leqslant \hat{r}} d_*(r) = d_*(\hat{r}) = \frac{dc}{\sqrt{1+c^2}}. \qquad (40)$$

$$\max_{r > \hat{r}} d_*(r) = d_*(\check{r}) = cd. \qquad (41)$$

Доказательство. Утверждение (40) немедленно следует из вычислительных формул (34) и (36) [4].

В случае $r > \hat{r}$ наибольшее значение оценки d_*, как видно из (39), соответствует наименьшему значению h. С помощью формулы (37), где задается h, легко устанавливается, что $h(r)$ строго выпукла и стремится к $+\infty$ при $r \to +0$ и $r \to +\infty$. Поэтому существует единственный абсолютный минимум, который соответствует корню производной:

$$0 = h'_r = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{d^2(1-c^2)}{r^2}\right),$$

находимому без труда: $\check{r} := d\sqrt{1-c^2}$. Очевидно, что $\check{r} > \hat{r}$ и

$$d + cd = d\sqrt{1+c}\,\sqrt{1+c} \;>\; d\sqrt{1+c}\,\sqrt{1-c} = \check{r}.$$

Следовательно, если $r = \check{r}$, то ограничение (31) не будет нарушено и реализуется случай $r > \hat{r}$. Поэтому

$$h_{\min} := h(\check{r}) = \frac{d\sqrt{1-c^2}}{2} + \frac{d^2(1-c^2)}{2d\sqrt{1-c^2}} \equiv d\sqrt{1-c^2},$$

$$d_* \leqslant \sqrt{d^2 - h_{\min}^2} = c\,d. \qquad (42)$$

$\square$

Таким образом, когда $||\mathcal{A}(x) - x|| = d\sqrt{1-c^2}$, точная релаксация не заменяет значение $\mathcal{A}(x)$ иным и, естественно, дает оценку погрешности следующей итерации ту же (cd), что и базовый алгоритм. Во всех прочих случаях она обеспечивает $d_* \leqslant sd$ с $s < c$. Величина s на каждой итерации своя, при желании ее можно извлечь как функцию некоторого параметра δ из формулы (36) или из формул (37), (39), полагая $\delta = r/d$:

$$s \overset{(36)}{=} \frac{c\delta}{1-c^2}, \qquad\qquad \delta \in \left(0, \frac{1-c^2}{\sqrt{1+c^2}}\right],$$

$$s \overset{(39)}{=} \sqrt{1-(h/d)^2} \overset{(37)}{=} \sqrt{1-\frac{1}{4}\left(\delta+\frac{1-c^2}{\delta}\right)^2},$$

$$\delta \in \left(\frac{1-c^2}{\sqrt{1+c^2}}, 1+c\right].$$

При $r = \widehat{r} \equiv d(1-c^2)/\sqrt{1+c^2}$ (36) даст $d_* = dc/\sqrt{1+c^2}$. Вычислив $h(\hat{r})$ в силу (37), а затем d_* в силу (39), также получим $dc/\sqrt{1+c^2}$. Таким образом, формулы (36), (37), (39) определяют непрерывную функцию $d_*(r)$, $r \in [0, d+dc]$.

Объединяя (30) с (34), (35) с (38) и (36) с (37), (39), получим **сводные формулы для точной релаксации $\mathcal{M}$:**

$$\vec{r} := \mathcal{A}(x) - x, \quad r := \|\vec{r}\|, \quad \widehat{r} = d(1-c^2)/\sqrt{1+c^2}, \tag{43}$$

$$x^* := \begin{cases} x + \vec{r}(1/2 + d^2(1-c^2)/2r^2) & \wedge \quad \hat{r} < r, \\ x + \dfrac{\vec{r}}{1-c^2} & \wedge \quad \hat{r} \geqslant r, \end{cases} \tag{44}$$

$$d_* := \begin{cases} \sqrt{d^2 - (r + d^2(1-c^2)/r)^2/4} & \wedge \quad \hat{r} < r, \\ \dfrac{cr}{1-c^2} & \wedge \quad \hat{r} \geqslant r\,. \end{cases} \tag{45}$$

4.3. Вычислительная трудоемкость точной релаксации. С вычислительной точки зрения экономнее использовать последовательность $\{d_k^2\}$ вместо $\{d_k\}$. Тогда вычислительные затраты на один шаг точной релаксации есть:

1) вычитание в пространстве B: $\vec{r} = \mathcal{A}(x^*) - x$;

2) вычисление скалярного квадрата $r^2 = \vec{r}^{\,2}$;

3) умножение d^2 на $(1-c^2)^2(1+c^2)^{-1}$ (т. е. вычисление $\hat{r}^2$);

4) умножение элемента пространства на число и сложение элементов согласно формуле (35) либо, и тогда еще 3 арифметические операции, согласно формуле (38);

5) одно умножение в (36) либо одно умножение (h^2) и одно вычитание в (39) для вычисления d_*^2.

Итого: $2 \div 6$ арифметических операций и (что существеннее) вычитание элементов + вычисление скалярного произведения + сложение элементов + умножение элемента на число.

5°. Дальнейшие перспективы. 1. Осталось неисследованным применение принципа минимальности к итеративным методам, действующих в банаховых пространствах, в частности с широко применяемыми нормами $\|\cdot\|_\infty$ и $\|\cdot\|_1$.

2. Получены [13] расчетные формулы для многоточечных методов в скалярном случае (в этом докладе они не приводятся). Открыт вопрос о подобных формулах в многомерных пространствах.

3. Сам Принцип Минимальности возможно обобщить на улучшение последующего приближения в статистическом смысле после принятия некоторых разумных гипотез о распределении искомого решения. Некоторое продвижение в этом направление сделано в [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Айзекс Р.* Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 479 с.

2. *Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. Н.* Численные методы. М.: Наука, 1987. 598 с.

3. *Михеев С. Е.* Сходимость дискретного метода Чебышева и метода Мюллера // Вопросы механики и процессов управления. СПб.: изд. СПбГУ, 1992. Вып. 15. С. 89–99.

4. *Михеев С. Е.* Релаксационное ускорение на основе областей достижимости // Вестн. С.-Петерб. ун-та. 1999. Сер. 1, вып. 3 (№ 15). С. 29–35.

5. *Михеев С. Е.* Нелинейные методы в оптимизации. СПб.: изд. СПбГУ, 2001. 276 с.

6. *Михеев С. Е.* Эффективность релаксационного ускорения // Николай Ефимович Кирин (сборник статей). СПб.: АССПИН, 2003. С. 183–197.

7. *Михеев С. Е.* Зоны безопасности в играх с линией жизни // Вестн. С.-Петерб. ун-та. 2003. Сер. 1, вып. 3 (№ 17). С. 69–78.

8. *Михеев С. Е.* Метод точных релаксаций // Вычислительные технологии. Т. 11, № 6. 2006. С. 71–86.

9. *Михеев С. Е.* Глобализация некоторых итеративных методов решения скалярных уравнений // Вестн. С.-Петерб. ун-та. 2008. Сер. 10, вып. 1. С. 43–52.

10. *Ортега Дж., Рейнболдт В.* Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. М.: Мир, 1975. 558 с.

11. *Хейгеман Л., Янг Д.* Прикладные итерационные методы. М., 1986. 446 с.

12. *Miheev S. E.* Contraction of attainability domains in a game of pursuit // Game Theory and Applications / eds L. Petrosjan, V. Mazalov. Nova Science Pbl., N. Y. 1996. Vol. 2, P. 193–207.

13. *Miheev, Serge E.* Exact relaxation of multi point iterative methods in scalar case. Emission Electronics (ICEE), 2014 2nd International Conference on DOI: 10.1109/ Emission.2014.6893970.