

НАХОЖДЕНИЕ МИНИМАЛЬНОГО РАССТОЯНИЯ МЕЖДУ ДВУМЯ ГЛАДКИМИ КРИВЫМИ В ТРЁХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ*

М. Э. Аббасов

abbasov.majid@gmail.com

8 сентября 2016 г.

Аннотация. В докладе [1] рассматривался метод заряженных шариков, который применялся для решения важных задач вычислительной геометрии:

- ортогонального проектирования точки на выпуклое, замкнутое множество, размерность которого совпадала с размерностью пространства,
- поиска минимального расстояния между двумя такими множествами.

В данной работе рассматривается задача поиска минимального расстояния между двумя гладкими кривыми в трехмерном пространстве, часто возникающая в астрономии. Показывается, что и она может быть эффективно решена с помощью той же идеи. Причем, в силу особенностей данной задачи, уравнения движения удается описать так, что задача, в отличие от предыдущих реализаций метода заряженных шариков, перестает быть жесткой [2]. Это дает возможность отказаться от дополнительных "корректирующих" процедур и тем самым ускорить вычисления.

В заключении приводятся численные примеры, иллюстрирующие работу предложенного алгоритма.

1°. Постановка задачи и используемые обозначения. Изложение будет вестись для 3-х мерного евклидова пространства. Рассмотрим в \mathbb{R}^3 кривые

$$r_1(u) = (x_1(u), y_1(u), z_1(u)), \quad r_2(v) = (x_2(v), y_2(v), z_2(v)),$$

где $r_1, r_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ – непрерывно дифференцируемые вектор-функции, скалярных параметров u и v соответственно. Будем искать точки

$$r_1^* = (x_1(u_*), y_1(u_*), z_1(u_*)), \quad r_2^* = (x_2(v_*), y_2(v_*), z_2(v_*)),$$

на которых достигается минимальное расстояние между данными кривыми.

*Семинар по конструктивному негладкому анализу и недифференцируемой оптимизации «CNSA & NDO»: <http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/>

2°. Идейная основа алгоритма и его реализация. Как и прежде, предлагается на одну из кривых поместить положительно заряженный шарик, а на другую – отрицательно заряженный, причем шарики могут двигаться только по соответствующим кривым. Считаем, что движение происходит только под действием силы Кулона и пропорциональной скорости движения силы сопротивления. Последняя обеспечивает диссипацию (рассеивание) энергии, благодаря которой с ростом времени шарики стремятся к точкам r_1^* , r_2^* . Описываем дифференциальные уравнения движения. С помощью перехода к разностной схеме их решения, получим итерационный алгоритм решения данной задачи.

2.1. Уравнения движения. Так как шарики могут двигаться только по кривым, их положение в каждый конкретный момент времени t определяется параметрами u и v наших кривых. То есть координаты шариков есть функции времени $r_1(u(t))$, $r_2(v(t))$. Очевидно, нормальная составляющая силы Кулона для каждого шарика компенсируется нормальной реакцией соответствующей кривой, а потому при составлении уравнений движения нужно учитывать лишь силу вязкого трения, а также касательную составляющую силы Кулона. Последнюю можно получить спроецировав саму силу на касательное направление, которое для первой кривой задается вектором $\tau_1(u) = \frac{\dot{r}_1(u)}{\|\dot{r}_1(u)\|}$, а для

второй – вектором $\tau_2(u) = \frac{\dot{r}_2(u)}{\|\dot{r}_2(u)\|}$. Силы Кулона, действующие на первый и второй шарики, с точностью до некоторой константы¹ равны соответственно $\frac{r_2 - r_1}{\|r_2 - r_1\|^3}$, $-\frac{r_2 - r_1}{\|r_2 - r_1\|^3}$. С помощью второго закона Ньютона уравнения движения можно записать в виде

$$\begin{cases} \frac{d^2 r_1}{dt^2} = p_1 \left\langle \frac{r_2 - r_1}{\|r_2 - r_1\|^3}, \tau_1 \right\rangle \tau_1 - p_2 \frac{dr_1}{dt} \\ \frac{d^2 r_2}{dt^2} = p_1 \left\langle \frac{r_1 - r_2}{\|r_2 - r_1\|^3}, \tau_2 \right\rangle \tau_2 - p_2 \frac{dr_2}{dt} \end{cases} \quad (1)$$

Здесь p_1, p_2 константы. Учитывая, что

$$\frac{d^2 r_1}{dt^2} = \frac{d^2 r_1}{du^2} \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + \frac{d^2 u}{dt^2} \frac{dr_1}{du},$$

$$\frac{d^2 r_2}{dt^2} = \frac{d^2 r_2}{dv^2} \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 + \frac{d^2 v}{dt^2} \frac{dr_2}{dv},$$

можем переписать (1) в виде

$$\begin{cases} \ddot{u} \frac{dr_1}{du} + \dot{u}^2 \frac{d^2 r_1}{du^2} + p_2 \dot{u} \frac{dr_1}{du} = p_1 \left\langle \frac{r_2 - r_1}{\|r_2 - r_1\|^3}, \tau_1 \right\rangle \tau_1 \\ \ddot{v} \frac{dr_2}{dv} + \dot{v}^2 \frac{d^2 r_2}{dv^2} + p_2 \dot{v} \frac{dr_2}{dv} = p_1 \left\langle \frac{r_1 - r_2}{\|r_2 - r_1\|^3}, \tau_2 \right\rangle \tau_2 \end{cases} \quad (2)$$

¹зависящей от электрической постоянной и зарядов шаров

Так как $\langle \tau_1, \tau_1 \rangle = 1$, то

$$2 \left\langle \frac{d\tau_1}{du}, \tau_1 \right\rangle = 0.$$

Таким образом, $n_1 = \frac{d\tau_1}{du}$ ортогонально τ_1 . С другой стороны очевидно, что n_1 лежит в соприкасающейся плоскости кривой. Поэтому n_1 есть главная нормаль нашей кривой. Аналогично $n_2 = \frac{d\tau_2}{dv}$ есть главная нормаль второй кривой. Трехгранники Френе для наших кривых определяются векторами:

- касательных $\tau_1(t), \tau_2(t)$;
- главных нормалей $n_1(t), n_2(t)$;
- бинормалей b_1, b_2 (являющихся нормальями соответствующих плоскостей, в которых лежат кривые).

Скалярно умножим теперь уравнения (2) слева и справа на соответствующие касательные направления, вдоль которых и происходит движение².

Получаем

$$\begin{cases} \ddot{u} \left\| \frac{dr_1}{du} \right\| + \dot{u}^2 \left\langle \tau_1, \frac{d^2 r_1}{du^2} \right\rangle + p_2 \dot{u} \left\| \frac{dr_1}{du} \right\| = p_1 \left\langle \frac{r_2 - r_1}{\|r_2 - r_1\|^3}, \tau_1 \right\rangle \\ \ddot{v} \left\| \frac{dr_2}{dv} \right\| + \dot{v}^2 \left\langle \tau_2, \frac{d^2 r_2}{dv^2} \right\rangle + p_2 \dot{v} \left\| \frac{dr_2}{dv} \right\| = p_1 \left\langle \frac{r_1 - r_2}{\|r_2 - r_1\|^3}, \tau_2 \right\rangle \end{cases} \quad (3)$$

Вводя фиктивные переменные $\xi = \dot{u}$, $\eta = \dot{v}$, понижаем порядок системы (3):

$$\begin{cases} \dot{u} = \xi \\ \dot{\xi} = p_1 \left\langle \frac{r_2 - r_1}{\|r_2 - r_1\|^3}, \tau_1 \right\rangle \left\| \frac{dr_1}{du} \right\|^{-1} - p_2 \xi - \left\langle \tau_1, \frac{d^2 r_1}{du^2} \right\rangle \left\| \frac{dr_1}{du} \right\|^{-1} \xi^2 \\ \dot{v} = \eta \\ \dot{\eta} = p_1 \left\langle \frac{r_1 - r_2}{\|r_2 - r_1\|^3}, \tau_2 \right\rangle \left\| \frac{dr_2}{dv} \right\|^{-1} - p_2 \eta - \left\langle \tau_2, \frac{d^2 r_2}{dv^2} \right\rangle \left\| \frac{dr_2}{dv} \right\|^{-1} \eta^2 \end{cases} \quad (4)$$

Применим явный метод Эйлера для решения системы (4) с шагом δ . Предполагая, что заданы u_k, ξ_k, v_k, η_k , получаем алгоритм решения исходной задачи:

$$\begin{cases} u_{k+1} = u_k + \delta \xi_k \\ \xi_{k+1} = \xi_k + \delta \left(\phi_1(u_k, v_k) \left\| \frac{dr_1}{du} \right\|^{-1} - p_2 \xi_k - \psi_1(u_k) \left\| \frac{dr_1}{du} \right\|^{-1} \xi_k^2 \right) \\ v_{k+1} = v_k + \delta \eta_k \\ \eta_{k+1} = \eta_k + \delta \left(\phi_2(u_k, v_k) \left\| \frac{dr_2}{dv} \right\|^{-1} - p_2 \eta_k - \psi_2(v_k) \left\| \frac{dr_2}{dv} \right\|^{-1} \eta_k^2 \right) \end{cases}$$

где

²Домножение на вектор главной нормали приводит к тривиальному решению.

$$\phi_1(u, v) = p_1 \left\langle \frac{r_2(u) - r_1(v)}{\|r_2(v) - r_1(u)\|^3}, \tau_1(u) \right\rangle, \quad \psi_1(u) = \left\langle \frac{d^2 r_1(u)}{du^2}, \tau_1(u) \right\rangle,$$

$$\phi_2(v, v) = p_1 \left\langle \frac{r_1(v) - r_2(u)}{\|r_2(v) - r_1(u)\|^3}, \tau_2(v) \right\rangle, \quad \psi_2(v) = \left\langle \frac{d^2 r_2(v)}{dv^2}, \tau_2(v) \right\rangle.$$

В точках r_1^* , r_2^* , очевидно, касательная составляющая сил Кулона должна равняться нулю, поэтому в качестве критерия остановки можно взять условие

$$|\phi_1(u_k, v_k)| + |\phi_2(u_k, v_k)| \leq \varepsilon, \quad (5)$$

где $\varepsilon > 0$ некоторое малое число.

Замечание 1. Отметим, что решение задачи, вообще говоря, неединственно, поэтому получаемое в ходе применения алгоритма решение зависит от выбора начальных точек.

3°. Численные эксперименты. Приведем численные примеры решения задач по описанному алгоритму. Вычисления везде велись в математическом пакете Matlab 2013a.

3.1. Пример 1. Найдём расстояние между кривыми (см. рис. 1)

$$r_1(u) = (3 \sin u, 5 \cos u, 0); \quad r_2(v) = (3 \sin v, 5 \cos v, 7 - 3.75 \cos v).$$

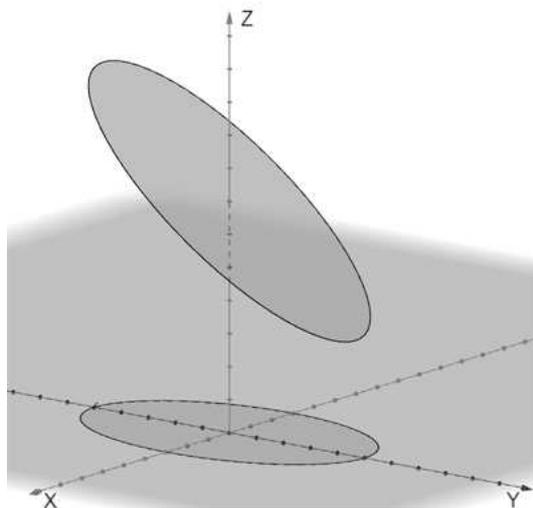


Рис. 1. Кривые из примера 1.

В Табл. 1 приведены результаты вычислений при различных значениях параметров метода p_1 , p_2 , δ .

Таблица 1. Решение задачи из примера 1 при $\varepsilon = 10^{-6}$, $u_0 = 1$, $v_0 = 1$, $\xi_0 = 0$, $\eta_0 = 0$ и различных значениях параметра метода.

p_1	p_2	δ	$criteria^a$	N^b	$\ r_1 - r_1^*\ ^c$	$\ r_2 - r_2^*\ ^c$	t^d
100	2	0.1	$3.27 \cdot 10^{-7}$	212	$2.1 \cdot 10^{-8}$	$4.6 \cdot 10^{-8}$	0.0068
100	10	0.1	$10 \cdot 10^{-7}$	1268	$4.8 \cdot 10^{-7}$	$2.5 \cdot 10^{-7}$	0.0424
100	2	0.01	$10 \cdot 10^{-7}$	1815	$4.3 \cdot 10^{-7}$	$2.5 \cdot 10^{-7}$	0.0596
100	10	0.01	$10 \cdot 10^{-7}$	12732	$4.8 \cdot 10^{-7}$	$2.5 \cdot 10^{-7}$	0.3850
10	2	0.01	$10 \cdot 10^{-7}$	21793	$4.8 \cdot 10^{-6}$	$2.5 \cdot 10^{-6}$	0.6737
10	2	0.1	$10 \cdot 10^{-7}$	2175	$4.8 \cdot 10^{-6}$	$2.5 \cdot 10^{-6}$	0.0717

^aЗначение выражение (5), ^bКоличество итерации, ^cРасстояние от истинного решения, ^dВремя работы алгоритма, с.

3.2. Пример 2. Найдем расстояние между кривыми (см. рис. 2)

$$r_1(u) = (3 \sin u, 5 \cos u, 0); \quad r_2(v) = (6 \sin v - 6, 2 \cos v, -1.5 \cos v).$$

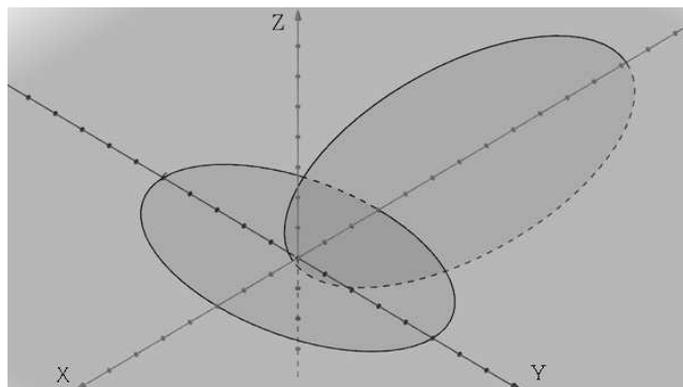


Рис. 2. Кривые из примера 2.

В Табл. 2 приведены результаты вычислений при различных значениях параметров метода p_1 , p_2 , δ .

Таблица 2. Решение задачи из примера 2 при $\varepsilon = 10^{-4}$, $u_0 = 0$, $v_0 = 0$, $\xi_0 = 0$, $\eta_0 = 0$ и различных значениях параметра метода.

p_1	p_2	δ	$criteria^a$	N^b	$\ r_1 - r_1^*\ ^c$	$\ r_2 - r_2^*\ ^c$	t^d
100	10	0.1	$8.2 \cdot 10^{-5}$	114	$2.7 \cdot 10^{-7}$	$15.8 \cdot 10^{-7}$	0.0072
100	20	0.1	$6.2 \cdot 10^{-5}$	201	$4.7 \cdot 10^{-7}$	$7.7 \cdot 10^{-7}$	0.0099
100	20	0.01	$9.9 \cdot 10^{-5}$	2043	$8.5 \cdot 10^{-7}$	$11.7 \cdot 10^{-7}$	0.0628
200	20	0.1	$1.8 \cdot 10^{-5}$	93	$0.1 \cdot 10^{-7}$	$1.3 \cdot 10^{-7}$	0.0030

^aЗначение выражение (5), ^bКоличество итерации, ^cРасстояние от истинного решения, ^dВремя работы алгоритма, с.

3.3. Пример 3. Найдем расстояние между винтовой линией

$$r_1(u) = (\sin u, \cos u, u)$$

и окружностью (см. рис. 3)

$$r_2(v) = (3 \sin v, 3 \cos v, 0).$$

В Табл. 3 приведены результаты вычислений при различных значениях параметров метода p_1, p_2, δ .

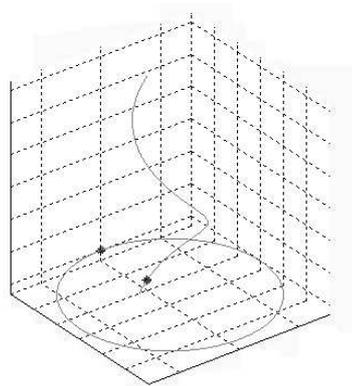


Рис. 3. Кривые из примера 3 с изображением точек, на которых достигается минимальное расстояние.

Таблица 3. Решение задачи из примера 3 при $\varepsilon = 10^{-4}$, $u_0 = 1$, $v_0 = 1$, $\xi_0 = 0$, $\eta_0 = 0$ и различных значениях параметра метода.

p_1	p_2	δ	$criteria^a$	N^b	$\ r_1 - r_1^*\ ^c$	$\ r_2 - r_2^*\ ^c$	t^d
10	1	0.3	$7.4 \cdot 10^{-5}$	295	$17.25 \cdot 10^{-5}$	$43.74 \cdot 10^{-5}$	0.0422
100	10	0.1	$9.9 \cdot 10^{-5}$	1151	$2.89 \cdot 10^{-5}$	$7.88 \cdot 10^{-5}$	0.0401
100	20	0.1	$9.96 \cdot 10^{-5}$	2319	$2.9 \cdot 10^{-5}$	$7.91 \cdot 10^{-5}$	0.0748
200	20	0.1	$9.8 \cdot 10^{-5}$	1231	$1.43 \cdot 10^{-5}$	$3.89 \cdot 10^{-5}$	0.0422

^aЗначение выражение (5), ^bКоличество итерации, ^cРасстояние от истинного решения, ^dВремя работы алгоритма, с.

4°. Благодарности. Автор выражает признательность д.ф.-м.н., профессору В.Н. Малозёмову за помощь в постановке задачи и полезные замечания.

Работа выполнена при поддержке Санкт-Петербургского Государственного Университета в рамках гранта 9.38.205.2014, а также при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №16-31-00056 мол_а.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аббасов М. Э. *Метод заряженных шариков* // Семинар «CNSA & NDO». Избранные доклады. 21 мая 2015 г. (<http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/rep15.shtml#0521>)
2. Хайрер Э., Ваннер Г. *Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи*. М.: Мир, 1999. 685 с.