ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ УСЛОВИЯ СОКРАЩЕНИЯ ЭКЗОСТЕРОВ*

М. Э. Аббасов

abbasov.majid@gmail.com

27 октября 2016 г.

Аннотация. Экзостеры — недавно появившееся понятие в недифференцируемой оптимизации, предложенное В. Ф. Демьяновым. Несмотря на новизну, они успели отлично зарекомендовать себя в качестве эффективного инструмента изучения негладких функций. В терминах этих объектов удалось описать условия экстремума, что дало возможность строить новые алгоритмы оптимизации негладких функций. По сути экзостеры это семейства выпуклых компактов, позволяющие представлять главную часть приращения в виде минимакса или максимина линейных функций. Указанные семейства определяются неоднозначно. Работа с меньшим в некотором смысле семейством позволяет уменьшить вычислительные затраты при применении алгоритмов, поэтому возникает важная практическая задача сокращения экзостера. Первой данную проблему изучала В. А. Рощина. Ею были введены определения минимальности семейства по включению и по форме, а также получены необходимые и достаточные условия минимальности, предложена техника сокращения семейств, основанная на этих условиях. В данной работе предлагаются другие условия и процедуры сокращения, имеющие более наглядный геометрический смысл, за счет чего их легче применять.

1°. Подход В. А. Рощиной. Подробно понятие экзостеров обсуждалось в докладе [1]. В этом пункте будут кратко описаны результаты полученные В. А. Рощиной в работах [8–10].

1.1. Определение минимальности. Наиболее простой способ определения минимальности основан на количестве множеств, входящих в экзостер.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем говорить, что верхний (нижний) экзостер $E_1(h)$ положительно однородной (п.о.) функции h меньше другого верхнего (нижнего) экзостера $E_2(h)$ той же функции h по включению, если $E_1(h) \subset E_2(h)$.

*Семинар по конструктивному негладкому анализу и недифференцируемой оптимизации «CNSA & NDO»: `http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/`

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Будем говорить, что верхний (нижний) экзостер $E(h)$ п.о. функции h является минимальным по включению, если не существует другого верхнего (нижнего) экзостера $\widetilde{E}(h)$ функции h такого, что $\widetilde{E}(h) \subset \subset E(h)$.

Однако ясно, что такое определение никак не затрагивает структуру самих множеств, хотя во многих случаях именно она и играет главную роль.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим функцию $h_1 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h_1(x) = |x|$. Очевидно, что

$$E_1^*(h_1) = \{[-2, 1], [-1, 2]\}$$

является верхним экзостером нашей функции. Ни одно из множеств, входящих в $E_1^*(h_1)$ не может быть отброшено, ибо тогда рассматриваемое семейство перестанет быть экзостером h_1. Тем не менее, каждое из множеств из $E_1^*(h_1)$ можно сократить до отрезка $[-1, 1]$, являющегося субдифференциалом h_1. А так как субдифференциал выпуклой функции определяется однозначно [7], то существует единственный верхний экзостер, состоящий из одного множества $E_2^*(h_1) = \{[-1, 1]\}$. Этот экзостер "меньше" $E_1^*(h_1)$.

Приведенный пример демонстрирует необходимость другого определения минимального экзостера, которое отражало бы не только минимальность по включению, но и минимальность по форме самих множеств, входящих в экзостер.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Будем говорить, что верхний (нижний) экзостер $E_1(h)$ п.о. функции h меньше другого верхнего (нижнего) экзостера $E_2(h)$ той же функции h по форме, если

$$\forall \widetilde{C} \in E_1(h)\ \exists C \in E_2(h) \mid \widetilde{C} \subset C.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Будем говорить, что верхний (нижний) экзостер $E(h)$ п.о. функции h является минимальным по форме, если не существует другого верхнего (нижнего) экзостера $\widetilde{E}(h)$ функции h такого, что

$$\forall \widetilde{C} \in \widetilde{E}(h)\ \exists C \in E(h) \mid \widetilde{C} \subset C.$$

Отметим, что экзостер, минимальный по форме, является также минимальным по включению, но обратное, вообще говоря, неверно (см. пример 1). Поэтому необходимые условия минимальности по включению являются также необходимыми условиями минимальности по форме, достаточные же условия минимальности по форме являются также достаточными условиями минимальности по включению.

1.2. Необходимые условия минимальности. Пусть C — произвольное множество из верхнего экзостера. Построим множество

$$M^*(C) = \operatorname{cl}\operatorname{co}\{v_0 \in C \mid \exists g \in \mathbb{S},\ v_0 = \operatorname*{argmax}_{v\in C}\langle v, g\rangle;\ \langle v_0, g\rangle = h(g)\}.$$

Аналогично для произвольного множества из нижнего экзостера строим

$$M_*(C) = \operatorname{cl}\operatorname{co}\{v_0 \in C \mid \exists g \in \mathbb{S},\ v_0 = \operatorname*{argmin}_{v\in C}\langle v, g\rangle;\ \langle v_0, g\rangle = h(g)\}.$$

ЛЕММА 1. *Пусть E^* — верхний экзостер п.о. функции h. Если $M^*(C_0) = \varnothing$ для некоторого $C_0 \in E^*$, то $\widetilde{E}^* = E^* \setminus \{C_0\}$ также является верхним экзостером h.*

Из леммы 1 следует необходимое условие минимальности экзостера по включению.

ТЕОРЕМА 1. *Если E^* — минимальный по включению верхний экзостер п.о. функции h, то для любого $C \in E^*$ $M^*(C) \neq \varnothing$.*

Аналогичные результаты верны и для нижнего экзостера.

ЛЕММА 2. *Пусть E_* — нижний экзостер п.о. функции h. Если $M_*(C_0) = \varnothing$ для некоторого $C_0 \in E_*$, то $\widetilde{E}_* = E_* \setminus \{C_0\}$ также является верхним экзостером h.*

ТЕОРЕМА 2. *Если E_* — минимальный по включению нижний экзостер п.о. функции h, то для любого $C \in E_*$ $M_*(C) \neq \varnothing$.*

ЛЕММА 3. *Пусть E^* — верхний экзостер п.о. функции h. Если для некоторого $C_0 \in E^*$*

$$M^*(C_0) \neq C_0 \text{ и } M^*(C_0) \neq \varnothing,$$

то существует множество $C_1 \subset C_0$, $C_1 \neq C_0$ такое, что $\widetilde{E}^* = (E^* \setminus \{C_0\}) \bigcup \bigcup\{C_1\}$ будет верхним экзостером h, меньшим, чем E_*.

Из леммы 3 следует необходимое условие минимальности экзостера по форме.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть E^* — верхний экзостер п.о. функции h. Если E^* – минимальный по форме верхний экзостер, то*

$$M^*(C) = C, \quad \forall C \in E^*.$$

Аналогичные результаты верны и для нижнего экзостера.

ЛЕММА 4. *Пусть E_* — нижний экзостер п.о. функции h. Если для некоторого $C_0 \in E_*$*

$$M_*(C_0) \neq C_0 \text{ и } M_*(C_0) \neq \varnothing,$$

то существует множество $C_1 \subset C_0$, $C_1 \neq C_0$ такое, что $\widetilde{E}_* = (E_* \setminus \{C_0\}) \bigcup \bigcup \{C_1\}$ будет нижним экзостером h, меньшим, чем E_*.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть E_* — нижний экзостер п.о. функции h. Если E_* – минимальный по форме нижний экзостер, то*

$$M_*(C) = C, \quad \forall C \in E_*.$$

1.3. Достаточные условия минимальности. Пусть $E^*(h)$ — верхний экзостер п.о. функции h. Для каждого $g \in \mathbb{S}$ и $C \in E^*(h)$ положим

$$m_C(g) = \{v_0 \in C \mid v_0 = \operatorname*{argmax}_{v \in C} \langle v, g \rangle;\ \langle v_0, g \rangle = h(g)\}$$

и построим множество

$$\widetilde{M^*}(C) = \operatorname{cl}\operatorname{co}\{m_C(g) \mid g \in \mathbb{S},\ m_C(g) \text{ — одноточечное множество}\}.$$

ТЕОРЕМА 5. *Пусть E^* — верхний экзостер п.о. функции h. Если для некоторого $C_0 \in E^*$ имеем $\widetilde{M^*}(C_0) = C_0$, тогда невозможно заменить C_0 меньшим множеством $C_1 \neq \varnothing$ таким, что и $\widetilde{E}^* = (E^* \setminus \{C_0\}) \bigcup \{C_1\}$ будет являться верхним экзостером h.*

Обозначим

$$n_C(g) = \{v_0 \in C \mid v_0 = \operatorname*{argmin}_{v \in C} \langle v, g \rangle;\ \langle v_0, g \rangle = h(g)\}, \quad \forall g \in \mathbb{S},$$

$$\widetilde{M_*}(C) = \operatorname{cl}\operatorname{co}\{n_C(g) \mid g \in \mathbb{S},\ n_C(g) \text{ — одноточечное множество}\}.$$

Теперь для нижнего экзостера можно сформулировать результат, аналогичный теореме 5.

ТЕОРЕМА 6. *Пусть E_* — нижний экзостер п.о. функции h. Если для некоторого $C_0 \in E_*$ имеем $\widetilde{M_*}(C_0) = C_0$, тогда невозможно заменить C_0 меньшим множеством $C_1 \neq \varnothing$ таким, что и $\widetilde{E}_* = (E_* \setminus \{C_0\}) \bigcup \{C_1\}$ будет являться нижним экзостером h.*

З а м е ч а н и е 1. Вопрос о том, являются или нет условия из теорем 5, 6 необходимыми для минимальности множеств, входящих в верхний или нижний экзостер, остается открытым.

2°. Геометрические условия минимальности. Как видим, необходимые и достаточные условия минимальности различаются для верхнего и нижнего экзостера, и, что усложняет их практическое использование, они довольно сложно поддаются геометрической интерпретации. В данной работе делается попытка преодоления обозначенных трудностей путем описания новых условий, которые имеют наглядную геометрическую интерпретацию.

Для произвольного $g \in \mathbb{R}^n$ и $C \in E^*$ определим опорную гиперплоскость

$$L_{C,g}(x) = \langle x - v_C, g\rangle = 0, \quad v_C = \operatorname*{argmax}_{v\in C}\langle v, g\rangle$$

таким образом, чтобы C находилось в замкнутом отрицательном полупространстве

$$H_-(C,g) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid L_{C,g}(x) \le 0\},$$

порожденным этой гиперплоскостью ($C \subset H_-(C,g)$).

2.1. Минимальность по включению.

ТЕОРЕМА 7. *Пусть E — (верхний или нижний) экзостер п.о. функции $h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и $\widetilde{C} \in E$. Для того чтобы $\widetilde{E} = E \setminus \{\widetilde{C}\}$ был также (соответственно верхним или нижним) экзостером функции h, необходимо и достаточно, чтобы для любого $g \in \mathbb{S}$ нашлось множество $C_g \in \widetilde{E}$ такое, что $C_g \subset H_-(\widetilde{C}, g)$.*

Доказательство для определенности будем вести для верхнего экзостера.

Начнем с необходимости. Пусть и E^*, и $\widetilde{E}^*$ – верхний экзостер п.о. функции h. Выберем и зафиксируем произвольное $g \in \mathbb{S}$. Имеем

$$h(g) = \min_{C\in E^*}\max_{v\in C}\langle v, g\rangle = \min\left\{\min_{C\in\widetilde{E}^*}\max_{v\in C}\langle v, g\rangle, \max_{v\in\widetilde{C}}\langle v, g\rangle\right\} = \min_{C\in\widetilde{E}^*}\max_{v\in C}\langle v, g\rangle. \quad (1)$$

Откуда, используя обозначение C_g для множества, на котором достигается минимум по $\widetilde{E}^*$ в правой части (1), можем записать

$$\max_{v\in\widetilde{C}}\langle v, g\rangle \ge \min_{C\in\widetilde{E}^*}\max_{v\in C}\langle v, g\rangle = \max_{v\in C_g}\langle v, g\rangle.$$

Для любого $v \in C_g$ имеем

$$\langle v, g\rangle \le \max_{v\in C_g}\langle v, g\rangle \le \max_{v\in\widetilde{C}}\langle v, g\rangle = \langle v_{\widetilde{C}}, g\rangle,$$

где $v_{\widetilde{C}} = \operatorname*{argmax}_{v\in\widetilde{C}}\langle v, g\rangle$. То есть

$$\langle v - v_{\widetilde{C}}, g\rangle \le 0 \quad \forall v \in C_g,$$

поэтому, в силу произвольности выбора g, получаем

$$C_g \subset H_-(\widetilde{C}, g) \quad \forall g \in \mathbb{S}.$$

Перейдем к доказательству достаточности. Пусть

$$\forall g \in \mathbb{S} \quad \exists C_g \in \widetilde{E}^* \colon C_g \subset H_-(\widetilde{C}, g).$$

Выберем и зафиксируем произвольное $g \in \mathbb{S}$. Тогда для любого $v \in C_g$ будет $\langle v - v_{\widetilde{C}}, g\rangle \leq 0$, то есть

$$\langle v, g\rangle \leq \langle v_{\widetilde{C}}, g\rangle \quad \forall v \in C_g.$$

Очевидно что

$$\max_{v \in C_g} \langle v, g\rangle \leq \max_{v \in \widetilde{C}} \langle v, g\rangle,$$

откуда следует (1), а, значит, и $\widetilde{E}^*$ является верхним экзостером функции h.

Доказательство для нижнего экзостера проводится совершенно аналогично, нужно лишь воспользоваться тем, что для любого $C \in E_*$ и $g \in \mathbb{S}$ справедливо равенство

$$\min_{v \in C} \langle v, g\rangle = -\max_{v \in C} \langle v, -g\rangle.$$

$\square$

Замечание 2. Утверждение теоремы 7 означает, что для «отбрасывания» множества $\widetilde{C}$ необходимо и достаточно, чтобы в замкнутом отрицательном полупространстве произвольной опорной гиперполоскости к любой крайней точке множества $\widetilde{C}$ лежало по крайней мере еще одно множество из E.

Из теоремы 7 следует необходимое и достаточное условие того, что множество, принадлежащее экзостеру, не может быть отброшено.

ТЕОРЕМА 8. *Пусть E — (верхний или нижний) экзостер п.о. функции $h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Для того чтобы $\widetilde{C} \in E$ было невозможно отбросить из (соответственно верхнего или нижнего) экзостера (то есть, чтобы семейство $\widetilde{E} = E \setminus \{\widetilde{C}\}$ не являлось (соответственно верхним или нижним) экзостером функции h), необходимо и достаточно, чтобы нашлось $\widetilde{g} \in \mathbb{S}$ такое, что*

$$\forall C \in \widetilde{E} \quad \exists v(C) \in C \colon v(C) \notin H_-(\widetilde{C}, \widetilde{g}).$$

Отметим, что представленные условия могут быть использованы для "очищения" экзостера от «лишних» множеств.

2.2. Минимальность по форме. Перейдем к вопросам минимальности по форме.

Пусть $E = \{C_\omega \mid \omega \in \Omega\}$, и существует подмножество Θ индексного множества Ω такое, что $\bigcap\limits_{\omega\in\Theta} C_\omega = \widehat{C} \neq \varnothing$. Обозначим $B = \{C_\omega \mid \omega \in \Theta\}$.

ТЕОРЕМА 9. *Пусть E — (верхний или нижний) экзостер п.о. функции $h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и для любого $g \in \mathbb{S}$ найдется $\omega_g \in \Theta$ такое, что $C_{\omega_g} \subset H_-(\widehat{C}, g)$. Тогда семейство $\widetilde{E} = \{E \setminus B\} \bigcup \widehat{C}$ также является (соответсвенно верхним или нижним) экзостером функции h.*

Доказательство для определенности будем вести для верхнего экзостера. Выберем и зафиксируем произвольное $g \in \mathbb{S}$, и пусть

$$\exists \omega_g \in \Theta\colon C_{\omega_g} \subset H_-(\widehat{C}, g). \tag{2}$$

Из (2) следует, что
$$\langle v - \widehat{v}(g), g\rangle \le 0 \quad \forall v \in C_{\omega_g},$$
где $\widehat{v}(g) = \operatorname*{argmax}\limits_{v\in\widehat{C}} \langle v, g\rangle$. То есть для любого v из C_{ω_g} справедливо неравенство $\langle v, g\rangle \le \langle \widehat{v}(g), g\rangle$, из которого получаем

$$\max_{v\in C_{\omega_g}} \langle v, g\rangle \le \langle \widehat{v}(g), g\rangle\,.$$

Но $\widehat{v}(g) \in \widehat{C} = \bigcap\limits_{\omega\in\Theta} C_\omega \subset C_{\omega_g}$, а потому

$$\max_{v\in C_{\omega_g}} \langle v, g\rangle = \langle \widehat{v}(g), g\rangle\,.$$

Таким образом, учитывая, что $\omega_g \in \Theta$, можем записать

$$\min_{\omega\in\Theta}\max_{v\in C_\omega} \langle v, g\rangle \le \max_{v\in C_{\omega_g}} \langle v, g\rangle = \langle \widehat{v}(g), g\rangle = \max_{v\in\widehat{C}} \langle v, g\rangle\,,$$

откуда

$$\begin{aligned} h(g) = \min_{C\in E^*}\max_{v\in C}\langle v, g\rangle &= \min\left\{\min_{C\in E^*\setminus B}\max_{v\in C}\langle v, g\rangle, \min_{C\in B}\max_{v\in C}\langle v, g\rangle\right\} = \\ &= \min\left\{\min_{\omega\in\Omega\setminus\Theta}\max_{v\in C_\omega}\langle v, g\rangle, \min_{\omega\in\Theta}\max_{v\in C_\omega}\langle v, g\rangle\right\} \le \\ &\le \min\left\{\min_{\omega\in\Omega\setminus\Theta}\max_{v\in C_\omega}\langle v, g\rangle, \max_{v\in\widehat{C}}\langle v, g\rangle\right\} = \min_{C\in\widetilde{E}^*}\max_{v\in C}\langle v, g\rangle. \end{aligned} \tag{3}$$

С другой стороны, так как $\widehat{C} \subset C_\omega$ для всех $\omega \in \Theta$, то

$$\max_{v \in \widehat{C}} \langle v, g \rangle \le \max_{v \in C_\omega} \langle v, g \rangle \quad \forall \omega \in \Theta.$$

Значит

$$\max_{v \in \widehat{C}} \langle v, g \rangle \le \min_{\omega \in \Theta} \max_{v \in C_\omega} \langle v, g \rangle.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \min_{C \in \widetilde{E}^*} \max_{v \in C} \langle v, g \rangle &= \min \left\{ \min_{\omega \in \Omega \setminus \Theta} \max_{v \in C_\omega} \langle v, g \rangle, \max_{v \in \widehat{C}} \langle v, g \rangle \right\} \le \\ &\le \min \left\{ \min_{\omega \in \Omega \setminus \Theta} \max_{v \in C_\omega} \langle v, g \rangle, \min_{\omega \in \Theta} \max_{v \in C_\omega} \langle v, g \rangle \right\} = h(g). \end{aligned} \tag{4}$$

Из (3), (4) с учетом произвольности выбора $g \in \mathbb{S}$ получаем окончательно

$$h(g) = \min_{C \in \widetilde{E}^*} \max_{v \in C} \langle v, g \rangle \quad \forall g \in \mathbb{S},$$

что и завершает доказательство.

□

Из теоремы 9 получаем необходимое условие невозможности замены множеств C_ω, $\omega \in \Omega$ в экзостере их пересечением.

ТЕОРЕМА 10. *Для невозможности замены множеств C_ω, $\omega \in \Omega$ в экзостере п.о. функции h их пересечением (т.е. чтобы семейство $\{E \setminus B\} \bigcup \widehat{C}$ не являлось экзостером h) необходимо, чтобы*

$$\exists \widetilde{g} \in \mathbb{S} \colon \forall \omega \in \Theta \quad C_\omega \not\subset H_-(\widehat{C}, \widetilde{g}).$$

То есть должна найтись опорная гиперплоскость множества $\widehat{C}$, для которой нет ни одного множества C_ω, $\omega \in \Omega$, полностью лежащего в замкнутом отрицательном полупространстве этой гиперплоскости.

Перейдем к важному для практических задач случаю. Пусть семейство E состоит из конечного числа выпуклых многогранников.

Выберем произвольное $C \in E$. Обозначим через $v_i(C)$ вершины множества C, где $i \in I_C$, I_C — индексное множество. Очевидно, $C = \operatorname{co}\{v_i(C) \mid i \in I_C\}$. Определим конус

$$\Gamma_{v_i(C)} = \left\{ g \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \max_{v \in C} \langle v, g \rangle = \langle v_i(C), g \rangle \right\}$$

направлений, являющихся нормалями опорных гиперплоскостей к множеству C в точке $v_i(C)$. Очевидно $\bigcup\limits_{i \in I_C} \Gamma_{v_i(C)} = \mathbb{R}^n$. Справедлива

ТЕОРЕМА 11. *Пусть E — (верхний или нижний) экзостер п.о. функции $h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\widetilde{C} = \operatorname{co}\left\{v_i(\widetilde{C}) \;\middle|\; i \in I_{\widetilde{C}}\right\} \in E$, $\widehat{C} = \operatorname{co}\left\{v_i(\widetilde{C}) \;\middle|\; i \in I_{\widetilde{C}} \setminus \{\widehat{i}\}\right\}$. Для того чтобы $\widetilde{E} = \left\{E \setminus \{\widetilde{C}\}\right\} \bigcup \widehat{C}$ был также (соответсвенно верхним или нижним) экзостером функции h, необходимо, чтобы*

$$\forall g \in \Gamma_{v_{\widehat{i}}(\widetilde{C})} \quad \exists C_g \in E, C_g \neq \widetilde{C}\colon C_g \subset H_-(\widetilde{C}, g). \tag{5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о для определенности будем вести для верхнего экзостера.

Пусть и E^*, и $\widetilde{E}^*$ — верхние экзостеры п.о. функции h, но (5) не имеет места. Тогда найдется такое $g_0 \in \Gamma_{v_{\widehat{i}}(\widetilde{C})}$, что

$$\max_{v \in \widetilde{C}} \langle v, g_0 \rangle < \max_{v \in C} \langle v, g_0 \rangle, \quad \forall C \in E^* \setminus \{\widetilde{C}\}.$$

Так как семейство E^* состоит из конечного числа множеств, то найдется $a > 0$ такое, что

$$\max_{v \in \widetilde{C}} \langle v, g_0 \rangle - \max_{v \in C} \langle v, g_0 \rangle < -a, \quad \forall C \in E^* \setminus \{\widetilde{C}\}$$

поэтому, учитывая непрерывность функции максимума, можно без уменьшения общности считать, что

$$\max_{v \in \widetilde{C}} \langle v, g_0 \rangle > \max_{v \in \widehat{C}} \langle v, g_0 \rangle.$$

Следовательно,

$$h(g_0) = \min_{C \in E^*} \max_{v \in C} \langle v, g_0 \rangle = \max_{v \in \widetilde{C}} \langle v, g_0 \rangle > \max_{v \in \widehat{C}} \langle v, g_0 \rangle \geq \min_{C \in \widetilde{E}^*} \max_{v \in C} \langle v, g_0 \rangle,$$

что противоречит тому, что $\widetilde{E}^*$ также является верхним экзостером функции h.

□

Условие (5) не является достаточными для того, чтобы семейство $\widetilde{E}$ было экзостером функции h. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим функцию

$$h(g_1, g_2) = \min\left\{-x_1, x_1, \max\left\{x_2, -x_2\right\}\right\}.$$

Верхний экзостер имеет вид $E^* = \{C_1, C_2, C_3\}$, где $C_1 = \{(-1, 0)\}$, $C_2 = \{(1, 0)\}$, $C_3 = \operatorname{co}\{(0, -1), (0, 1)\}$. Для вершины $v_2(C_3) = (0, 1)$ множества C_3 имеем $\Gamma_{v_2(C_3)} = \{(g_1, g_2) \in \mathbb{R}^2 \mid g_2 > 0\}$, поэтому условие (5) выполнено. Однако $\widetilde{E}^* = \left\{C_1, C_2, \widehat{C}_3\right\}$, где $\widehat{C}_3 = \{(0, -1)\}$ верхним экзостером функции h не является. Действительно, для $\bar{g} = (0, 1)$ имеем

$$h(\bar{g}) = \min_{C \in E^*} \max_{v \in C} \langle v, \bar{g} \rangle = 0,$$

в то время как

$$\min_{C \in \widetilde{E}^*} \max_{v \in C} \langle v, \bar{g} \rangle = -1.$$

Из теоремы 11 следует достаточное условие невозможности сокращения множества из экзостера путем отбрасывания некоторых его вершин.

ТЕОРЕМА 12. *Пусть E — (верхний или нижний) экзостер п.о. функции $h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Для того чтобы множество $\widetilde{C} \in E$ невозможно было заменить на меньшее за счет отбрасывания некоторых его вершин, достаточно, чтобы для любой вершины $v_i(\widetilde{C})$ этого множества нашлось $g_i(C) \in \Gamma_{v_i(\widetilde{C})}$ такое, что*

$$\forall C \in E, C \neq \widetilde{C}\colon \exists v(g_i(C)) \in C\colon v(g_i(C)) \notin H_-(\widetilde{C}, g).$$

Иными словами, для любой вершины множества $\widetilde{C}$ должна найтись содержащая ее опорная гиперплоскость, такая, чтобы в замкнутом отрицательном полупространстве этой гиперплоскости не лежало целиком ни одно другое множество из экзостера кроме $\widetilde{C}$.

ТЕОРЕМА 13. *Пусть E — (верхний или нижний) экзостер п.о. функции $h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\widetilde{C} = \operatorname{co}\left\{v_i(\widetilde{C}) \;\middle|\; i \in I_{\widetilde{C}}\right\} \in E$, $\widehat{C} = \operatorname{co}\left\{v_i(\widetilde{C}) \;\middle|\; i \in I_{\widetilde{C}} \setminus \{\widehat{i}\}\right\}$. Для того чтобы $\widetilde{E} = \left\{E \setminus \{\widetilde{C}\}\right\} \bigcup \widehat{C}$ был также (соответсвенно верхним или нижним) экзостером функции h, достаточно, чтобы*

$$\forall g \in \Gamma_{v_{\widehat{i}}(\widetilde{C})} \quad \exists C_g \in E, C_g \neq \widetilde{C}, \exists u \in \mathbb{R}^n\colon \begin{cases} \langle v-u, g\rangle \geq 0 & v \in \widetilde{C} \\ \langle v-u, g\rangle \leq 0 & v \in C_g \end{cases} \tag{6}$$

Доказательство. Из определения конуса $\Gamma_{v_{\widehat{i}}(\widetilde{C})}$ следует, что если $g \notin$ $\notin \Gamma_{v_{\widehat{i}}(\widetilde{C})}$, то $\max\limits_{v\in\widetilde{C}}\langle v, g\rangle$ достигается на вершине множества $\widetilde{C}$, отличной от $v_{\widehat{i}}$. В этом случае

$$\max_{v\in\widetilde{C}}\langle v, g\rangle = \max_{v\in\widehat{C}}\langle v, g\rangle,$$

откуда

$$h(g) = \min_{C\in E}\max_{v\in C}\langle v, g\rangle = \min_{C\in\widetilde{E}}\max_{v\in C}\langle v, g\rangle \quad \forall g \in \mathbb{S},\ g \notin \Gamma_{v_{\widehat{i}}(\widetilde{C})}.$$

Перейдем теперь к направлениям $g \in \Gamma_{v_{\widehat{i}}(\widetilde{C})}$. Из (6) следует, что для любого $v \in \widetilde{C}$ будет

$$\langle v, g\rangle \geq \langle u, g\rangle. \tag{7}$$

Но $\widehat{C} \subset \widetilde{C}$, поэтому (7) выполняется и для любого $v \in \widehat{C}$. С другой стороны из (6) получаем

$$\langle v, g\rangle \leq \langle u, g\rangle \quad \forall v \in C_g. \tag{8}$$

Таким образом, с учетом (7) и (8) можем записать

$$\max_{v\in C_g}\langle v, g\rangle \leq \langle u, g\rangle \leq \max_{v\in\widehat{C}}\langle v, g\rangle \leq \max_{v\in\widetilde{C}}\langle v, g\rangle.$$

Значит

$$h(g)=\min_{C\in E}\max_{v\in C}\langle v,g\rangle=\min_{C\in E\setminus\{\widetilde{C}\}}\max_{v\in C}\langle v,g\rangle=$$
$$\min_{C\in \widetilde{E}\setminus\{\widehat{C}\}}\max_{v\in C}\langle v,g\rangle=\min_{C\in \widetilde{E}}\max_{v\in C}\langle v,g\rangle,$$

что и завершает доказательство. □

З а м е ч а н и е 3. Теорема 13, по сути, означает, что для отбрасывания вершины $v_{\widehat{i}}$ из множества $\widetilde{C}$, достаточно, чтобы для любой опорной гиперплоскости к $\widetilde{C}$, проходящей через $v_{\widehat{i}}$, нашлась гиперплоскость, параллельная этой опорной гиперплоскости такая, что она разделяет $\widetilde{C}$ и какое-то другое множество из E так, чтобы множество $\widetilde{C}$ находилось в положительном полупространстве, порожденным этой гиперплоскостью.

Из теоремы 13 и замечания 3 следует необходимое условие невозможности сокращения множеств из экзостера путем отбрасывания некоторых его вершин.

ТЕОРЕМА 14. *Пусть E — (верхний или нижний) экзостер п.о. функции $h\colon \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. Для того чтобы множество $\widetilde{C}\in E$ невозможно было заменить на меньшее за счет отбрасывания некоторых его вершин, необходимо, чтобы для любой вершины $v_i(\widetilde{C})$ этого множества нашлось $g_i(C)\in\Gamma_{v_i(\widetilde{C})}$ такое, что ни одна гиперплоскость с нормалью $g_i(C)$ не разделяе $\widetilde{C}$ и какого-то другого множества из E так, чтобы множество $\widetilde{C}$ находилось в положительном полупространстве, порожденным этой гиперплоскостью.*

3°. Примеры.

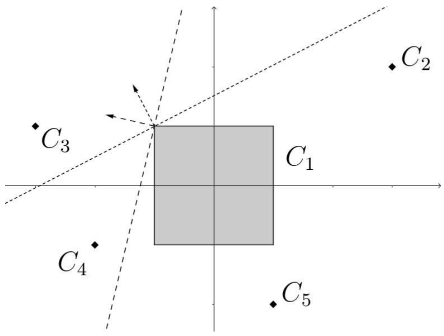
ПРИМЕР 2. Рассмотрим функцию $h\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$,

$$h(g_1,g_2)=\min\big\{\max\{g_1+g_2,g_1-g_2,-g_1+g_2,-g_1-g_2\};$$
$$3g_1+2g_2;g_1-2g_2;-3g_1+g_2;-2g_1-g_2\big\}.$$

Очевидно, верхний экзостер для нее имеет вид $E^*=\{C_1,C_2,C_3,C_4,C_5\}$, где

$$C_1=\operatorname{co}\{(1,1),(1,-1),(-1,1),(-1,-1)\},\ C_2=\{(3,2)\},$$
$$C_3=\{(1,-2)\},\ C_4=\{(-3,1)\},\ C_5=\{(-2,-1)\}.$$

На рис. 1 а) изображено семейство E^*, а также несколько опорных гиперплоскостей к множеству C_1, проходящих через вершину $(-1,1)$. Очевидно, что для любой такой гиперплоскости найдется множество из верхнего экзостера,



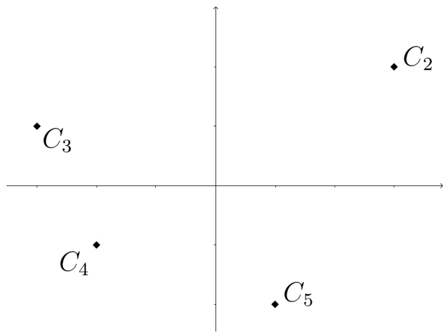


Рис. 1. Верхний экзостер E^* (а) и сокращенный верхний экзостер $\widetilde{E}^*$ (б) функции h из примера 2.

которое так же как и C_1 будет лежать в замкнутом отрицательном ее полупространстве (в данном случае таким множеством гарантированно будет C_5). Аналогична ситуация и с другими вершинами множества C_1, что по теореме 7 и замечанию 2 означает, что множество C_1 может быть «отброшено», поэтому в качестве верхнего экзостера можно взять $\widetilde{E}^* = \{C_2, C_3, C_4, C_5\}$ (рис. 1 б)), следовательно,

$$h(g_1, g_2) = \min\left\{3g_1 + 2g_2; g_1 - 2g_2; -3g_1 + g_2; -2g_1 - g_2\right\}.$$

ПРИМЕР 3. Рассмотрим функцию $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$h(g_1, g_2) = \min\left\{\max_{v \in \mathbb{S}} \langle v, g\rangle ; g_1 + g_2; g_1 - g_2; -g_1 + g_2; -g_1 - g_2\right\}.$$

Очевидно, верхний экзостер для нее имеет вид $E^* = \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5\}$, где

$$C_1 = \operatorname{co}\left\{(g_1, g_2) \in \mathbb{R}^2 \middle|\ g_1^2 + g_2^2 \le 1\right\},\ C_2 = \{(1,1)\},$$
$$C_3 = \{(1,-1)\},\ C_4 = \{(-1,1)\},\ C_5 = \{(-1,-1)\}.$$

Из рис. 2 а), на котором изображено семейство E^*, понятно, что любая опорная гиперплоскость к множеству C_1 содержит в своем замкнутом отрицательном полупространстве одно из множеств C_i, $i = 2 : 5$. Это означает выполнение условий теоремы 7 и замечания 2, а, значит, множество C_1 может быть «отброшено». Поэтому в качестве верхнего экзостера можно взять $\widetilde{E}^* = \{C_2, C_3, C_4, C_5\}$ (рис. 2 б)). Таким образом,

$$h(g_1, g_2) = \min\left\{g_1 + g_2; g_1 - g_2; -g_1 + g_2; -g_1 - g_2\right\}.$$

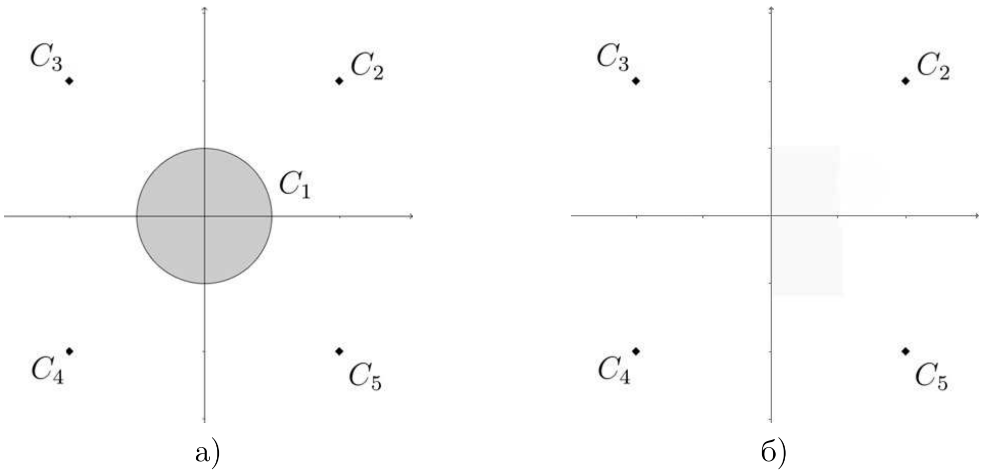


Рис. 2. Верхний экзостер E^* (а) и сокращенный верхний экзостер $\widetilde{E}^*$ (б) функции h из примера 3.

ПРИМЕР 4. Рассмотрим функцию $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

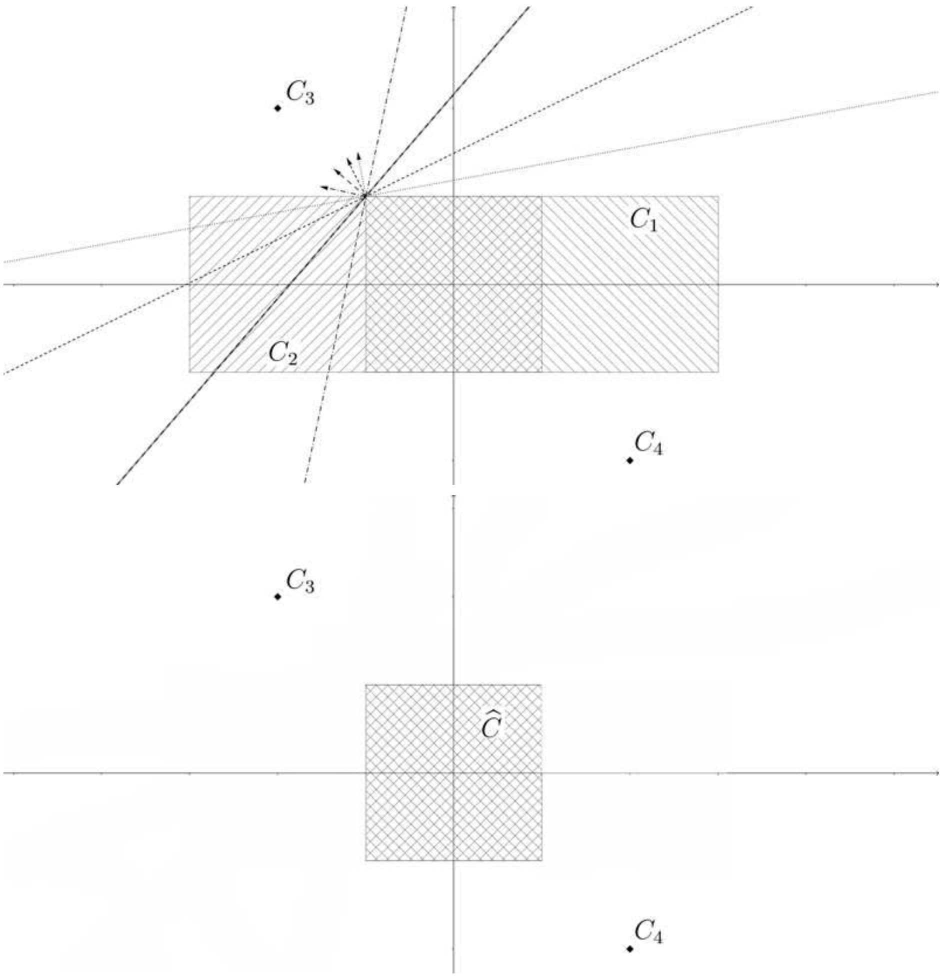
$$\begin{aligned} h(g_1, g_2) = \min \{ & \max \{-g_1 + g_2, -g_1 - g_2, 3g_1 + g_2, 3g_1 - g_2\}; \\ & \max \{g_1 + g_2, g_1 - g_2, -3g_1 + g_2, -3g_1 - g_2\}; \\ & \qquad -2g_1 + 2g_2; 2g_1 - 2g_2\}. \end{aligned}$$

Очевидно, верхний экзостер для нее имеет вид $E^* = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$, где

$$\begin{aligned} C_1 &= \operatorname{co}\{(-1,1), (-1,-1), (3,1), (3,-1)\}, \\ C_2 &= \operatorname{co}\{(1,1), (1,-1), (-3,1), (-3,-1)\}, \\ C_3 &= \{(-2,2)\}, C_4 = \{(2,-2)\}. \end{aligned}$$

Рассмотрим множество $\widehat{C} = C_1 \bigcap C_2 = \operatorname{co}\{(-1,1), (-1,-1), (1,1), (1,-1)\}$. На рис. 3 а) изображено семейство E^*, и показаны несколько опорных гиперплоскостей к множеству $\widehat{C}$, проходящих через вершину $(-1,1)$. Понятно, что в замкнутом отрицательном полупространстве такой гиперплоскости помимо самого множества $\widehat{C}$ будет всегда находится и множество C_1. Для опорных гиперплоскостей, проходящих через $(-1,-1)$ таким множеством также будет C_1, а для опорных гиперплоскостей, проходящих через $(1,-1)$ и $(1,1)$ – C_2. По теореме 9 можем заменить множества C_1, C_2 на множество $\widehat{C}$. Таким образом, меньший по форме экзостер будет иметь вид $\widetilde{E}^* = \left\{C_3, C_4, \widehat{C}\right\}$ (см. рис. 3 б)). Следовательно

$$\begin{aligned} h(g_1, g_2) = \min \{ & \max \{-g_1 + g_2, -g_1 - g_2, g_1 + g_2, g_1 - g_2\}; \\ & \qquad -2g_1 + 2g_2; 2g_1 - 2g_2\}. \end{aligned}$$



а)

б)

Рис. 3. Верхний экзостер E^* (а) и сокращенный верхний экзостер $\widetilde{E}^*$ (б) функции h из примера 4.

Отметим, что все примеры, рассмотренные в [10], могут быть решены с помощью предлагающихся геометрических условий сокращения экзостеров. Для иллюстрации этого приведем

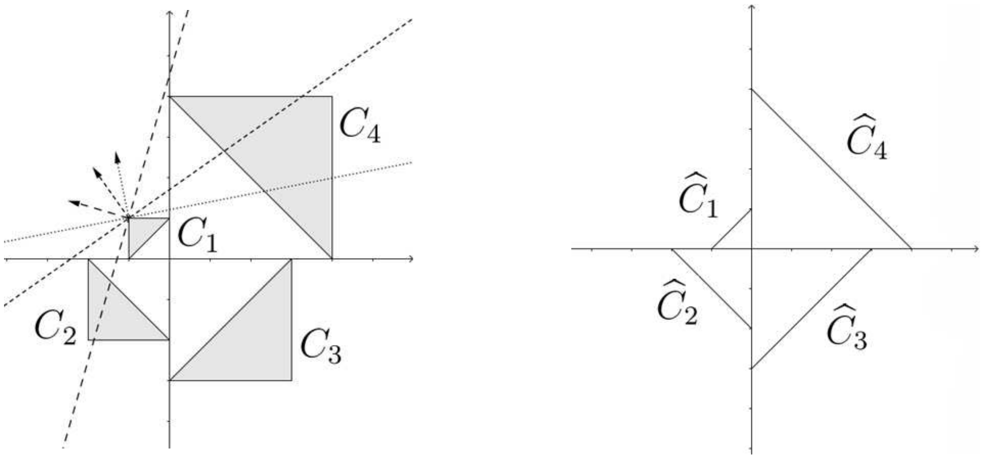
ПРИМЕР 5. Пусть п.о. функция h имеет верхний экзостер E^*, состоящий из всех единичных шаров, касающихся начала координат. Очевидно здесь выполняются условия теоремы 9, и после процедуры сокращения получим семейство $\overline{E}^* = \{\{0\}\}$, являющееся, очевидно, минимальным экзостером.

ПРИМЕР 6. Рассмотрим функцию $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$h(g_1, g_2) = \min \Big\{ \max\{-g_1, g_2, -g_1 + g_2\}\,;\max\{-2g_1, -2g_2, -2g_1 - 2g_2\}\,; \\ \max\{3g_1, -3g_2, 3g_1 - 3g_2\}\,;\max\{4g_1, 4g_2, 4g_1 + 4g_2\} \Big\}.$$

Очевидно, верхний экзостер для нее имеет вид $E^* = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$, где

$$C_1 = \operatorname{co}\{(-1,0),(0,1),(-1,1)\}\,,\ C_2 = \operatorname{co}\{(-2,0),(0,-2),(-2,-2)\}\,,$$
$$C_3 = \operatorname{co}\{(3,0),(0,-3),(3,-3)\}\,,\ C_4 = \operatorname{co}\{(4,0),(0,4),(4,4)\}\,.$$



а) б)

Рис. 4. Верхний экзостер E^* (а) и сокращенный верхний экзостер $\widetilde{E}^*$ (б) функции h из примера 6.

Для любой опорной гиперплоскости множества C_1 (на рис. 4 а) изображено несколько таких гиперплоскостей), проходящей через вершину $(-1,1)$ можно построить параллельную ей гиперплоскость, проходящую через начало координат, которая будет разделять C_1 и C_3. Точно так же любая гиперплоскость, проходящая через начало координат, параллельно к опорной к C_2 гиперплоскости, проходящей через вершину $(-2,-2)$, будет разделять C_2 и C_4. Аналогична ситуация с вершинами $(3,-3)$, $(4,4)$ множеств C_3, C_4 соответственно. Таким образом, по теореме 13 и замечанию 3 указанные вершины могут быть отброшены (см. рис. 4 б). Следовательно,

$$h(g_1,g_2) = \min\big\{\max\{-g_1, g_2\}\,; \max\{-2g_1, -2g_2\}\,;$$
$$\max\{3g_1, -3g_2\}\,; \max\{4g_1, 4g_2\}\big\}.$$

4°. Выводы. Отметим, что предложенные условия минимальности экзостера по включению являются одновременно и необходимыми, и достаточными. В этом их преимущество по сравнению с предложенными ранее. Так как в случае их различия, при невыполнении достаточного условия и выполнении необходимого, невозможно сделать однозначное заключение о том, является экзостер минимальным по включению или нет. Кроме того, предложенные результаты дают возможность построения меньшего (по включению или форме) экзостера, или позволяют сделать заключение о невозможности такого сокращения. Процедура сокращения имеет достаточно простую геометрическую интерпретацию, что, по крайней мере, в двумерном случае делает их применение простым и наглядным.

Также отметим, что предложенные результаты являются более общими, чем предложенные в [8–10] так как в ряде случаев позволяют сокращать экзостеры тогда, когда техника предложенная в работах В.А. Рощиной не работает.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аббасов М.Э. *Экзостеры: исчисление, условия экстремума, сравнение с квазидифференциалами* // Семинар «CNSA & NDO». Избранные доклады. 17 ноября 2016 г. (`http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/reps16.shtml#1117`)

2. Demyanov V.F. *Exhausters of a positively homogeneous function.* Optimization. Vol. 45, 1999. pp. 13-29.

3. Demyanov V.F.*Exhausters and Convexificators — New Tools in Nonsmooth Analysis*. In: V. Demyanov and A. Rubinov (Eds.) Quasidifferentiability and related topics. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000. pp. 85–137.

4. Castellani M. *A Dual Representation for Proper Positively Homogeneous Functions*. Journal of Global Optimization, Volume 16, Number 4, 2000. pp. 393–400.

5. Abbasov M.E., Demyanov V.F. *Proper and adjoint exhausters in Nonsmooth analysis: Optimality conditions*. Journal of Global Optimization, 56, 2013. pp. 569—585.

6. Demyanov V.F., Roschina V.A. *Optimality conditions in terms of upper and lower exhausters*. Optimization, 55, 2006. pp. 525—540.

7. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. – 472 с.

8. Roschina V.A. *Reducing Exhausters*, J. Optim. Theory Appl. 2008. Vol. 136, No. 2, pp. 261–273.

9. Roschina V.A. *On conditions for minimality of exhausters*, J. Convex Anal. 2008. Vol. 15, No. 4, pp. 859–868.

10. Roschina V.A. *Topics in Optimization: Solving Second-Order Conic Systems with Finite Precision; Calculus of Generalized Subdifferentials for Nonsmooth Functions Supervisor - Prof. Felipe Cucker*. City University of Hong Kong, 2009. 229 p.