НЕУЛУЧШАЕМАЯ ЛОКАЛЬНАЯ КОНСТАНТА ЛИПШИЦА ДЛЯ ВЫПУКЛОЙ ФУНКЦИИ*

М. Э. Аббасов — abbasov.majid@gmail.com

В. Н. Малозёмов — v.malozemov@spbu.ru

22 декабря 2016 г.

Аннотация. Для функций, выпуклых на открытом выпуклом множестве в евклидовом пространстве с чебышевской нормой, установлена липшицева непрерывность с неулучшаемой и легко вычислимой константой Липшица. Аналогичный результат в случае l_1-нормы получен в [1].

1°. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое выпуклое множество и $f(x)$ — функция, выпуклая на U. Обозначим $N = 2^n$ и введём систему векторов $\{h_i\}$, $i \in 1:N$, вида $(\pm 1, \ldots, \pm 1)^T$. Возьмём точку $x_0 \in U$. Выберем число $\beta > 0$ так, чтобы $x_0 + \beta h_i \in U$ при всех $i \in 1:N$.

ТЕОРЕМА. *Для любого вектора x, удовлетворяющего условию $\|x - x_0\|_\infty \leqslant \beta$, выполняется неравенство*

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant L\|x - x_0\|_\infty, \tag{1}$$

где

$$L = \max_{i=1:N} \left| \frac{f(x_0 + \beta h_i) - f(x_0)}{\beta} \right|. \tag{2}$$

2°. Для доказательства теоремы нам потребуется одно вспомогательное утверждение.

С произвольным ненулевым вектором $x = \left(x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}\right)^T$ свяжем подсистему $\left\{h_i^{(x)}\right\}$, $i \in 1:N/2$, системы $\left\{h_i^{(x)}\right\}$, $i \in 1:N$. Для этого выделим индекс $k \in 1:n$, на котором $\|x\|_\infty = \left|x^{(k)}\right|$. Подсистему $\left\{h_i^{(x)}\right\}$ составим из векторов

$$(\pm 1, \ldots, \pm 1, \underbrace{\operatorname{sign} x^{(k)}}_{k\text{-я позиция}}, \pm 1, \ldots, \pm 1)^T.$$

*Семинар по конструктивному негладкому анализу и недифференцируемой оптимизации «CNSA & NDO»: `http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/`

ЛЕММА. *Вектор x допускает представление*

$$x = \sum_{i=1}^{N/2} \lambda_i h_i^{(x)}, \tag{3}$$

где коэффициенты λ_i неотрицательны и

$$\sum_{i=1}^{N/2} \lambda_i = \|x\|_\infty. \tag{4}$$

Доказательство. Обозначим через A матрицу со столбцами $\left\{h_i^{(x)}\right\}$, $i \in$ $\in 1 : N/2$. Покажем, что система $A\lambda = x$ имеет неотрицательное решение λ. По теореме Фаркаша достаточно проверить, что из условия $u^T A \geqslant \mathbb{O}$ следует неравенство $\langle x, u\rangle \geqslant 0$.

Распишем условие $u^T A \geqslant \mathbb{O}$ подробно:

$$u^{(k)} \operatorname{sign} x^{(k)} + \sum_{i \neq k} \left(\pm u^{(i)}\right) \geqslant 0.$$

В частности,

$$u^{(k)} \operatorname{sign} x^{(k)} + \sum_{i \neq k} \left|u^{(i)}\right| \geqslant 0,$$

$$u^{(k)} \operatorname{sign} x^{(k)} - \sum_{i \neq k} \left|u^{(i)}\right| \geqslant 0.$$

Отсюда следует, что $u^{(k)} \operatorname{sign} x^{(k)} \geqslant 0$ и

$$\sum_{i \neq k} \left|u^{(i)}\right| \leqslant u^{(k)} \operatorname{sign} x^{(k)} = \left|u^{(k)}\right|. \tag{5}$$

Обратимся к скалярному произведению $\langle x, u\rangle$. Запишем

$$\begin{aligned}\langle x, u\rangle =& x^{(k)} u^{(k)} + \sum_{i \neq k} x^{(i)} u^{(i)} = \left|x^{(k)}\right| \cdot |u^{(k)}| + \sum_{i \neq k} x^{(i)} u^{(i)} \geqslant \\ &\geqslant \left|x^{(k)}\right| \cdot |u^{(k)}| - \sum_{i \neq k} \left|x^{(k)}\right| \cdot |u^{(i)}| = \left|x^{(k)}\right| \left(|u^{(k)}| - \sum_{i \neq k} |u^i|\right).\end{aligned}$$

Согласно (5), $\langle x, u\rangle \geqslant 0$.

Установлено, что система $A\lambda = x$ имеет неотрицательное решение λ. Это значит, что справедливо представление (3) с неотрицательными коэффициентами λ_i. Равенство (4) тоже выполняется, поскольку

$$\|x\|_\infty = \left|x^{(k)}\right| = x^{(k)} \operatorname{sign} x^{(k)} = \sum_{i=1}^{N/2} \lambda_i \left(\operatorname{sign} x^{(k)}\right)^2 = \sum_{i=1}^{N/2} \lambda_i.$$

Лемма доказана. $\square$

3°. Пусть $f(x)$ — функция, выпуклая на открытом выпуклом множестве $U \subset \mathbb{R}^n$. Возьмём точку $x_0 \in U$ и число $\beta > 0$ такое, что $x_0 + \beta h_i \in U$ при всех $i \in 1 : N$.

Зафиксируем точку x, отличную от x_0 и удовлетворяющую неравенству $\|x - x_0\| \leqslant \beta$. Обозначим $u = x - x_0$. Согласно лемме ненулевой вектор u допускает представление

$$u = \sum_{i=1}^{N/2} \lambda_i h_i^{(u)}, \tag{6}$$

где коэффициенты λ_i неотрицательны и

$$\sum_{i=1}^{N/2} \lambda_i = \|u\|_\infty.$$

Введём новые коэффициенты $\alpha_i = \lambda_i / \beta$ и перепишем (6) в виде

$$u = \sum_{i=1}^{N/2} \alpha_i \left(\beta h_i^{(u)}\right). \tag{7}$$

Здесь α_i неотрицательны и

$$\sum_{i=1}^{N/2} \alpha_i = \frac{\|x - x_0\|_\infty}{\beta} \leqslant 1.$$

Из (7) следует, что

$$x = x_0 + \sum_{i=1}^{N/2} \alpha_i \left(\beta h_i^{(u)}\right) = \left(1 - \sum_{i=1}^{N/2} \alpha_i\right) x_0 + \sum_{i=1}^{N/2} \alpha_i \left(x_0 + \beta h_i^{(u)}\right).$$

В этом разложении вектора x по векторам x_0, $x_0 + \beta h_1^{(u)}$, $\ldots$, $x_0 + \beta h_{N/2}^{(u)}$, принадлежащим множеству U, коэффициенты неотрицательны и в сумме равны единице. Значит, $x \in U$. По неравенству Йенсена получаем

$$f(x) - f(x_0) \leqslant \sum_{i=1}^{N/2} \lambda_i \frac{f\bigl(x_0 + \beta h_i^{(u)}\bigr) - f(x_0)}{\beta} \leqslant L \sum_{i=1}^{N/2} \lambda_i = L\|x - x_0\|_\infty. \tag{8}$$

Теперь оценим $f(x_0) - f(x)$. Введём вектор $y = 2x_0 - x$. В силу (7) имеем

$$y - x_0 = x_0 - x = \sum_{i=1}^{N/2} \alpha_i \left(-\beta h_i^{(u)}\right).$$

Перепишем это равенство в эквивалентном виде

$$y = \left(1 - \sum_{i=1}^{N/2} \alpha_i\right) x_0 + \sum_{i=1}^{N/2} \alpha_i \left(x_0 - \beta h_i^{(u)}\right).$$

Отсюда следует, что $y \in U$. По неравенству Йенсена

$$f(y) - f(x_0) \leqslant \sum_{i=1}^{N/2} \lambda_i \frac{f\bigl(x_0 - \beta h_i^{(u)}\bigr) - f(x_0)}{\beta} \leqslant L \sum_{i=1}^{N/2} \lambda_i = L\|x - x_0\|_\infty. \tag{9}$$

Отметим, что $x_0 = \frac{1}{2}\,(x + y)$. В силу выпуклости функции f

$$f(x_0) \leqslant \frac{1}{2}\,[f(y) + f(x)],$$

так что

$$f(y) \geqslant 2f(x_0) - f(x). \tag{10}$$

Объединив (9) и (10), придём к неравенству

$$f(x_0) - f(x) \leqslant L\|x - x_0\|_\infty. \tag{11}$$

На основании (8) и (11) заключаем, что справедливо требуемое неравенство (1) с константой L вида (2).

Теорема доказана. □

Замечание 1. Константа Липшица L в неравенстве (1) неулучшаема. Это следует из того, что при $f(x) = \|x\|_\infty$, $x_0 = \mathbb{O}$ и произвольном $\beta > 0$ неравенство (1) выполняется как равенство.

Замечание 2. Если $f(x_0 + \beta h_i) = f(x_0)$ при $i \in 1 : N$, то $f(x) = f(x_0)$ для всех x, удовлетворяющих условию $\|x - x_0\|_\infty \leqslant \beta$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Малоземов В. Н., Плоткин А. В. *Липшицева непрерывность выпуклой функции* // Семинар «CNSA & NDO». Избранные доклады. 24 ноября 2016 г. (`http://www.apmath.spbu/cnsa/reps16.shtml#1124b`)