

О ЗАДАЧЕ АХИЕЗЕРА–ЗОЛОТАРЁВА*

В. Н. Малозёмов

malv@math.spbu.ru

Г. Ш. Тамасян

g.tamasyan@spbu.ru

31 марта 2016 г.

1°. Продолжая исследования своего учителя П. Л. Чебышёва, Е. И. Золотарёв в своём знаменитом сочинении [1] поставил и решил четыре новые задачи о функциях, наименее уклоняющихся от нуля. Две первые задачи связаны с алгебраическими полиномами, следующие две — с дробно-рациональными функциями. Нас интересует четвёртая задача Золотарёва. Процитируем её постановку (с точностью до обозначений):

“Найти несократимую рациональную дробь

$$y = \frac{p(t)}{q(t)},$$

у которой одна из целых функций $p(t)$, $q(t)$ будет степени n , а другая — степени не выше n , так, чтобы, во-первых, при значениях t , заключающихся между 1 и $\frac{1}{\varkappa}$, где \varkappa — некоторое данное количество, меньшее единицы, y превосходил единицу, а при значениях, заключённых между -1 и $-\frac{1}{\varkappa}$, y был меньше -1 , во-вторых, чтобы наименьшее отклонение от нуля этой дроби, когда t содержится в тех же пределах, было, по возможности, меньше”.

Обозначим через \mathcal{H}_n^n семейство дробно-рациональных функций $H(t)$, в числителе и знаменателе которых стоят алгебраические полиномы степени не выше n , причём не все коэффициенты знаменателя равны нулю, и пусть

$$\mathfrak{D}_\varkappa = \left[-\frac{1}{\varkappa}, -1\right] \cup \left[1, \frac{1}{\varkappa}\right], \quad \varkappa \in (0, 1).$$

*Семинар по конструктивному негладкому анализу и недифференцируемой оптимизации «CNSA & NDO»: <http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/>

Тогда четвертую задачу Золотарёва можно переформулировать так:

(P1) *минимизировать величину*

$$\varphi(H) = \max_{t \in \mathfrak{D}_\varkappa} |H(t)|$$

по всем функциям H из \mathcal{H}_n^n , удовлетворяющим ограничениям

$$H(t) \geq 1 \text{ при } t \in [1, \frac{1}{\varkappa}]; \quad H(t) \leq -1 \text{ при } t \in [-\frac{1}{\varkappa}, -1]. \quad (1)$$

В 1929 году Н. И. Ахиезер в работе [2] рассмотрел близкую задачу:

(P2) *минимизировать величину*

$$\mu(H) = \max_{t \in \mathfrak{D}_\varkappa} |H(t) - \text{sign}(t)|$$

по всем функциям H из \mathcal{H}_n^n . Ахиезер получил решение этой задачи в эллиптических функциях.

На самом деле, как мы покажем, четвертая задача Золотарёва и задача Ахиезера эквивалентны, так что решение задачи Ахиезера можно легко получить из решения задачи Золотарёва. Вместе с тем, задача Ахиезера формулируется более естественно и у неё отсутствуют дополнительные ограничения на функции H , поэтому её качественное исследование с точки зрения негладкой оптимизации представляется более доступным.

2°. Перейдём к точным формулировкам. Обозначим через φ_n наименьшее значение целевой функции в задаче (P1) и через μ_n — наименьшее значение целевой функции в задаче (P2).

ТЕОРЕМА. *Задачи (P1) и (P2) эквивалентны в том смысле, что если H^* — решение задачи (P1), то $H_* = \frac{2}{1+\varphi_n} H^*$ — решение задачи (P2), и если H_* — решение задачи (P2), то $H^* = \frac{1}{1-\mu_n} H_*$ — решение задачи (P1). При этом*

$$\mu_n = \frac{\varphi_n - 1}{\varphi_n + 1} \quad \text{и} \quad \varphi_n = \frac{1 + \mu_n}{1 - \mu_n}.$$

Доказательство. Пусть H^* — решение задачи (P1). Значения дроби

$$H_*(t) = \frac{2}{1+\varphi_n} H^*(t)$$

при $t \in [1, \frac{1}{\varkappa}]$ содержатся в промежутке $[\frac{2}{1+\varphi_n}, \frac{2\varphi_n}{1+\varphi_n}]$ и при $t \in [-\frac{1}{\varkappa}, -1]$ содержатся в промежутке $[-\frac{2\varphi_n}{1+\varphi_n}, -\frac{2}{1+\varphi_n}]$. Значения разности $H_*(t) - \text{sign}(t)$ при $t \in \mathfrak{D}_\varkappa$ не выходят за границы отрезка $[\frac{1-\varphi_n}{1+\varphi_n}, \frac{\varphi_n-1}{1+\varphi_n}]$. Значит,

$$\mu_n \leq \mu(H_*) \leq \frac{\varphi_n-1}{\varphi_n+1}. \quad (2)$$

Покажем, что $\mu_n = \frac{\varphi_n - 1}{\varphi_n + 1}$.

Допустим противное $\mu_n < \frac{\varphi_n - 1}{\varphi_n + 1}$. Тогда найдётся дробь $H_0 \in \mathcal{H}_n^n$, у которой $\mu(H_0) < \frac{\varphi_n - 1}{\varphi_n + 1}$. Положим $H_1 = \frac{1}{1 - \mu(H_0)} H_0$. Дробь H_1 принадлежит \mathcal{H}_n^n , удовлетворяет ограничениям (1) и у неё

$$\varphi(H_1) \leq \frac{1 + \mu(H_0)}{1 - \mu(H_0)}.$$

Отметим, что

$$\frac{1 + \mu(H_0)}{1 - \mu(H_0)} = -1 + \frac{2}{1 - \mu(H_0)} < -1 + \frac{2}{1 - \frac{\varphi_n - 1}{\varphi_n + 1}} = \varphi_n,$$

так что $\varphi(H_1) < \varphi_n$. Но это противоречит определению φ_n .

Установлено, что $\mu_n = \frac{\varphi_n - 1}{\varphi_n + 1}$. Из (2) следует, что H_* — решение задачи (P2).

Обратное утверждение доказывается аналогично. Пусть H_* — решение задачи (P2). Дробь $H^* = \frac{1}{1 - \mu_n} H_*$ удовлетворяет ограничениям (1) и

$$\varphi_n \leq \varphi(H^*) \leq \frac{1 + \mu_n}{1 - \mu_n}. \quad (3)$$

Покажем, что $\varphi_n = \frac{1 + \mu_n}{1 - \mu_n}$.

Допустим противное $\varphi_n < \frac{1 + \mu_n}{1 - \mu_n}$. Тогда найдётся дробь $H_0 \in \mathcal{H}_n^n$, удовлетворяющая ограничениям (1), у которой $\varphi(H_0) < \frac{1 + \mu_n}{1 - \mu_n}$. Значения дроби

$$H_1(t) = \frac{2}{1 + \varphi(H_0)} H_0(t)$$

при $t \in [1, \frac{1}{\varkappa}]$ содержатся в промежутке $[\frac{2}{1 + \varphi(H_0)}, \frac{2\varphi(H_0)}{1 + \varphi(H_0)}]$ и при $t \in [-\frac{1}{\varkappa}, -1]$ содержатся в промежутке $[-\frac{2\varphi(H_0)}{1 + \varphi(H_0)}, -\frac{2}{1 + \varphi(H_0)}]$. Значения разности $H_1(t) - \text{sign}(t)$ не выходят за границы отрезка $[\frac{1 - \varphi(H_0)}{1 + \varphi(H_0)}, \frac{\varphi(H_0) - 1}{1 + \varphi(H_0)}]$. Значит,

$$\mu(H_1) \leq \frac{\varphi(H_0) - 1}{\varphi(H_0) + 1}.$$

Отметим, что

$$\frac{\varphi(H_0) - 1}{\varphi(H_0) + 1} = 1 - \frac{2}{\varphi(H_0) + 1} < 1 - \frac{2}{\frac{1 + \mu_n}{1 - \mu_n} + 1} = \mu_n,$$

так что $\mu(H_1) < \mu_n$. Но это противоречит определению μ_n .

Установлено, что $\varphi_n = \frac{1 + \mu_n}{1 - \mu_n}$. Из (3) следует, что H^* — решение задачи (P1).

Теорема доказана. \square

3°. Задачу (P2) будем называть *задачей Ахиезера–Золотарёва*. Как известно [1, 2], эта задача имеет ровно два решения. Одно из них непрерывно на \mathbb{R} (включая интервал $(-1, 1)$), второе имеет полюс при $t = 0$. Нас интересует непрерывное решение. Обозначим его $H_n(t)$.

Н. И. Ахиезер получил для $H_n(t)$ явные формулы, содержащие эллиптические функции. Вывод этих формул основан на тонких фактах теории функций комплексной переменной.

Мы подходим к задаче (P2) как к задаче негладкой оптимизации. С помощью численных методов удаётся найти $H_n(t)$ при $n \leq 6$. Анализ полученных решений показывает, что с увеличением n обусловленность дробей $H_n(t)$ заметно ухудшается.

4°. Согласно теории справедливы следующие утверждения.

1) Дробь $H_n(t)$ можно представить в виде

$$H_n(t) = \frac{ts(t^2)}{g(t^2)},$$

где s и g — алгебраические полиномы, степень которых определяется так:

$$\begin{aligned} \deg(s) = k, \quad \deg(g) \leq k & \quad \text{при } n = 2k + 1, \\ \deg(s) \leq k - 1, \quad \deg(g) = k & \quad \text{при } n = 2k. \end{aligned}$$

2) Дробь $H_n(t)$ обладает полным $(2n + 2)$ -точечным альтернансом. Точнее, существуют $2n + 2$ точки

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\varkappa} = t_{-n} < t_{-n+1} < \dots < t_{-1} < t_0 = -1, \\ 1 = t_1 < t_2 < \dots < t_{n+1} = \frac{1}{\varkappa}, \end{aligned}$$

в которых разность $\Delta_n(t) = H_n(t) - \text{sign}(t)$ достигает наибольшего по модулю значения μ_n с последовательной переменной знака. При этом $t_{-n+k} = -t_{n-k+1}$, $k \in 0 : n$, и $\Delta(t_0) = \mu_n$.

3) Справедливы тождества

$$\begin{aligned} H_n(t) &\equiv H_n\left(\frac{1}{\varkappa t}\right) & \text{при } n = 2k, \\ H_n(t) &\equiv \frac{1 - \mu_n^2}{H_n\left(\frac{1}{\varkappa t}\right)} & \text{при } n = 2k + 1. \end{aligned}$$

4) При всех $j \in 0 : n$ выполняется равенство

$$t_{j+1}t_{n+1-j} = \frac{1}{\varkappa}.$$

В частности, при $n = 2k$ имеем $t_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{\varkappa}}$.

5) При $n \geq 2$ у соседних дробей $H_n(t)$ и $H_{n+1}(t)$ точки альтернанса, принадлежащие интервалу $(1, \frac{1}{\varkappa})$, перемежаются.

Свойство 2) позволяет считать неизвестными только положительные точки альтернанса t_2, \dots, t_n .

5°. Непрерывную на \mathbb{R} дробь наилучшего приближения $H_n(t)$ функции $\text{sign}(t)$ на множестве \mathfrak{D}_\varkappa можно построить, опираясь на её альтернансные свойства. Покажем, как это делается при $n \leq 6$.

Начнём со случая $n = 1$. График дроби $H_1 \in \mathcal{H}_1^1$, обладающей полным четырёхточечным альтернансом, представлен на рис. 1.

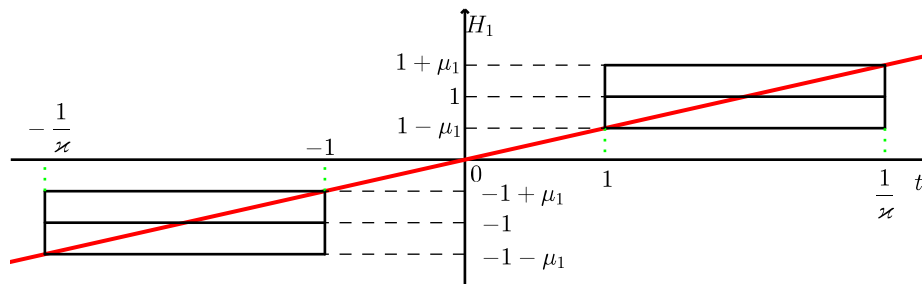


Рис. 1. График дроби $H_1 \in \mathcal{H}_1^1$, обладающей полным альтернансом

Согласно утверждению 1) дробь $H_1(t)$ будем искать в виде

$$H(t) = at.$$

Запишем альтернансные условия

$$H_1(1) - 1 = -\mu_1, \quad H_1\left(\frac{1}{\varkappa}\right) - 1 = \mu_1.$$

Отсюда находим коэффициент a и величину наименьшего уклонения μ_1 :

$$a = \frac{2\varkappa}{1 + \varkappa}, \quad \mu_1 = \frac{1 - \varkappa}{1 + \varkappa}.$$

Переходим к случаю $n = 2$. На рис. 2 изображён график дроби $H_2 \in \mathcal{H}_2^2$, обладающей полным альтернансом.

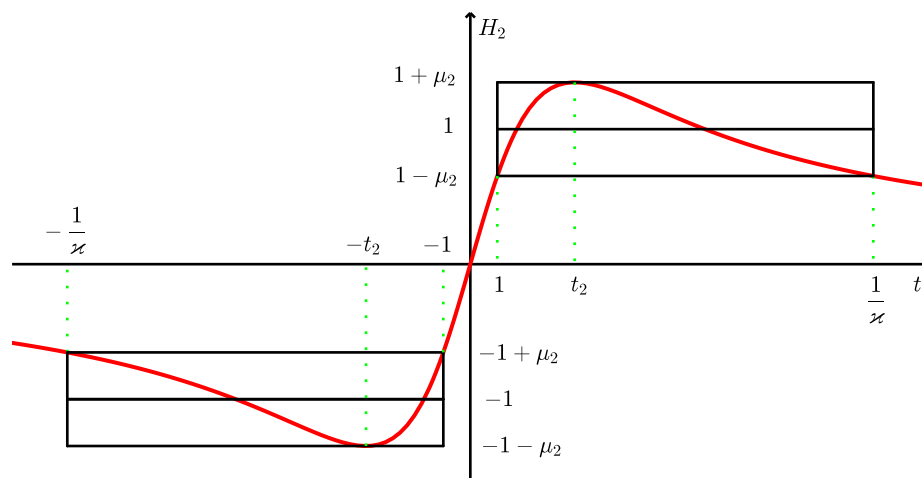


Рис. 2. График дроби $H_2 \in \mathcal{H}_2^2$, обладающей полным альтернансом

Согласно утверждению 1) дробь $H_2(t)$ будем искать в виде

$$H_2(t) = \frac{x_0 t}{t^2 + x_1}.$$

Запишем альтернансные условия

$$H_2(1) - 1 = -\mu_2, \quad H_2(t_2) - 1 = \mu_2, \quad H_2\left(\frac{1}{\varkappa}\right) - 1 = -\mu_2, \\ H_2'(t_2) = 0.$$

Это система уравнений относительно неизвестных x_0, x_1, t_2, μ_2 .

Её решение получить нетрудно

$$x_0 = \frac{4(1 + \varkappa)}{\sqrt{\varkappa}(1 + \sqrt{\varkappa})^2}, \quad x_1 = \frac{1}{\varkappa}, \\ t_2 = \frac{1}{\sqrt{\varkappa}}, \quad \mu_2 = \left(\frac{1 - \sqrt{\varkappa}}{1 + \sqrt{\varkappa}}\right)^2.$$

Формула для t_2 соответствует утверждению 4).

6°. Возьмём $n = 3$. График дроби $H_3 \in \mathcal{H}_3^3$, обладающей полным альтернансом, представлен на рис. 3.

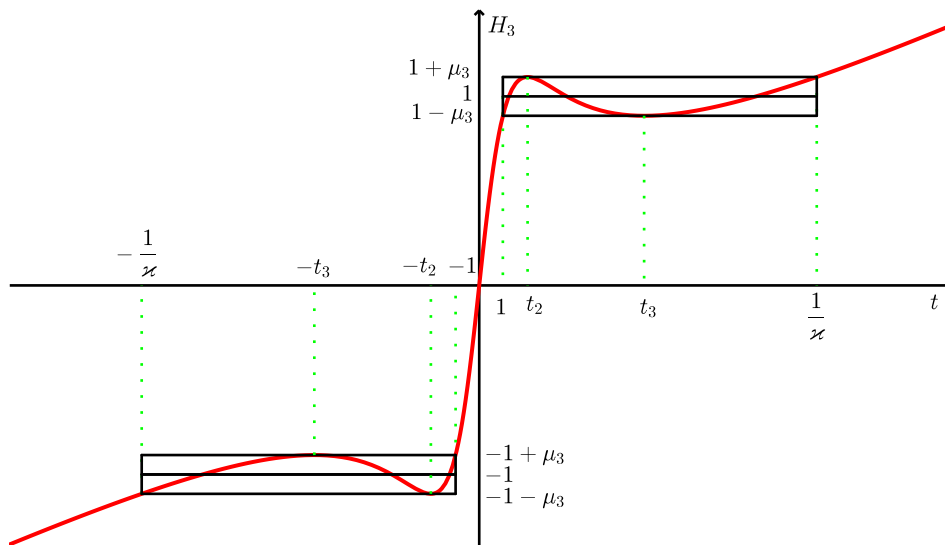


Рис. 3. График дроби $H_3 \in \mathcal{H}_3^3$, обладающей полным альтернансом

Дробь $H_3(t)$ будем искать в виде

$$H_3(t) = \frac{t^3 + x_1 t}{x_2 t^2 + x_3}.$$

Запишем альтернансные условия:

$$\begin{aligned} H_3(1) - 1 = -\mu_3, \quad H_3(t_2) - 1 = \mu_3, \quad H_3(t_3) - 1 = -\mu_3, \quad H_3\left(\frac{1}{\varkappa}\right) - 1 = \mu_3, \\ H_3'(t_2) = 0, \quad H_3'(t_3) = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Имеем систему уравнений 6-го порядка относительно неизвестных $x_1, x_2, x_3, t_2, t_3, \mu_3$.

Преобразуем эту систему. Для этого обозначим

$$H_3(t) = \frac{P_3(t)}{Q_3(t)}.$$

Воспользуемся тем, что

$$H_3'(t) = \frac{P_3'(t) - H_3(t)Q_3'(t)}{Q_3(t)}.$$

Переставив уравнения в (4), запишем

$$\begin{aligned} P_3(1) = (1 - \mu_3)Q_3(1), \quad P_3\left(\frac{1}{\varkappa}\right) = (1 + \mu_3)Q_3\left(\frac{1}{\varkappa}\right), \\ P_3'(t_2) = (1 + \mu_3)Q_3'(t_2), \quad P_3'(t_3) = (1 - \mu_3)Q_3'(t_3); \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} P_3(t_2) = (1 + \mu_3)Q_3(t_2), \\ P_3(t_3) = (1 - \mu_3)Q_3(t_3). \end{aligned} \quad (6)$$

Нелинейную систему (5), (6) будем решать численным методом. Для этого нужно иметь хорошее начальное приближение. В данном случае поступим так:

- возьмём приближённое значение для точки альтернанса $t_2 \in (1, \frac{1}{\sqrt{\varkappa}})$ и положим $t_3 = \frac{1}{t_2\varkappa}$;
- с помощью процедуры `fsolve` из математического пакета MatLab найдём решение системы (5) при фиксированных t_2, t_3 и неизвестных x_1, x_2, x_3, μ_3 .

В результате получим начальное приближение для полной системы (5), (6). После этого решаем полную систему с помощью той же процедуры `fsolve`.

ПРИМЕР 1. Пусть $n = 3$ и $\varkappa = \frac{1}{100}$. Возьмём

$$t_2 := \frac{1}{\sqrt[4]{\varkappa}} \approx 3.16, \quad t_3 = \frac{1}{\varkappa t_2} \approx 31.6.$$

Решая систему (5) при фиксированных t_2, t_3 и начальном приближении $x_1 = x_2 = x_3 = 1, \mu_3 = \frac{1}{2}$, получаем

$$x_1 = 642.40, \quad x_2 = 81.954, \quad x_3 = 833.62, \\ \mu_3 = 0.2972.$$

Построено начальное приближение для полной системы. Теперь находим решение полной системы (5), (6). Результаты вычислений:

$$x_1 = 764.19, \quad x_2 = 80.913, \quad x_3 = 1058.8, \\ \mu_3 = 0.3286, \quad t_2 = 3.7506, \quad t_3 = 26.662.$$

Отметим, что длина отрезка $[1, \frac{1}{\varkappa}]$ равна 99.

7°. Рассмотрим случай $n = 4$. На рис. 4 изображён график дроби $H_4 \in \mathcal{H}_4^4$, обладающей полным 10-точечным альтернансом.

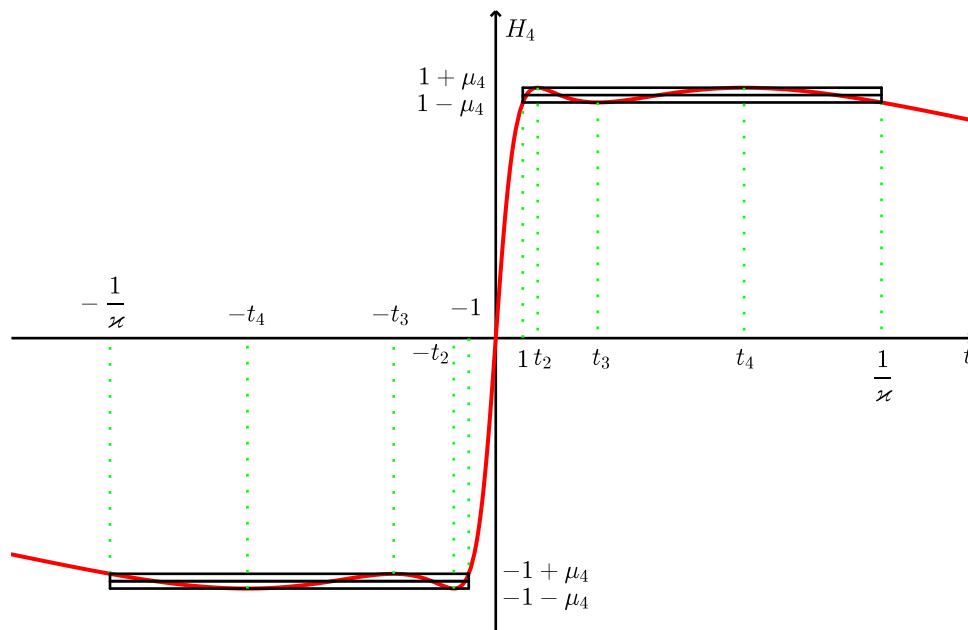


Рис. 4. График дроби $H_4 \in \mathcal{H}_4^4$, обладающей полным альтернансом

Дробь $H_4(t)$ будем искать в виде

$$H_4(t) = \frac{x_0 t^3 + x_1 t}{t^4 + x_2 t^2 + x_3}.$$

Запишем альтернансные условия:

$$\begin{aligned} H_4(1) - 1 &= -\mu_4, & H_4\left(\frac{1}{\varkappa}\right) - 1 &= -\mu_4, \\ H_4(t_2) - 1 &= \mu_4, & H_4(t_3) - 1 &= -\mu_4, & H_4(t_4) - 1 &= \mu_4, \\ H_4'(t_2) &= 0, & H_4'(t_3) &= 0, & H_4'(t_4) &= 0. \end{aligned}$$

Разобьём эти условия на две группы

$$\begin{aligned} H_4(1) &= 1 - \mu_4, & H_4\left(\frac{1}{\varkappa}\right) &= 1 - \mu_4, \\ H_4'(t_2) &= 0, & H_4'(t_3) &= 0, & H_4'(t_4) &= 0; \end{aligned} \quad (7)$$

$$H_4(t_2) = 1 + \mu_4, \quad H_4(t_3) = 1 - \mu_4, \quad H_4(t_4) = 1 + \mu_4. \quad (8)$$

Выберем начальное приближение для точки альтернанса t_2 и положим $t_3 = \frac{1}{\sqrt{\varkappa}}$, $t_4 = \frac{1}{\varkappa t_2}$ (см. утверждение 4)). При фиксированных t_2, t_3, t_4 решаем систему (7), выбрав подходящее начальное приближение для x_0, x_1, x_2, x_3 и μ_4 . Это даёт начальное приближение для полной системы (7), (8), Остаётся воспользоваться процедурой `fsolve`.

ПРИМЕР 2. Пусть $n = 4$ и $\varkappa = \frac{1}{100}$. Возьмём

$$t_2 = 3, \quad t_3 = \frac{1}{\sqrt{\varkappa}} = 10, \quad t_4 = \frac{1}{\varkappa t_2} = \frac{100}{3}.$$

Решая систему (7) при фиксированных t_2, t_3, t_4 и начальном приближении $x_j = 100$ при $j \in 0 : 3$ и $\mu_4 = \frac{1}{2}\mu_3$, получаем

$$\begin{aligned} x_0 &= 104.75, & x_1 &= 14\,690, & x_2 &= 2\,517.6, & x_3 &= 14\,919, \\ \mu_4 &= 0.1515. \end{aligned}$$

Построено начальное приближение для полной системы. Теперь находим решение полной системы (7), (8). Результаты вычислений:

$$\begin{aligned} x_0 &= 103.15, & x_1 &= 10\,315, & x_2 &= 2\,220.0, & x_3 &= 10\,000, \\ \mu_4 &= 0.1475, & t_2 &= 2.3476, & t_3 &= 10, & t_4 &= 42.597. \end{aligned}$$

8°. Будем называть *числом обусловленности* дроби $H \in \mathcal{H}_n^n$, у которой один из коэффициентов равен единице, величину

$$\delta(H) = \frac{|x_s|}{\varphi(H)},$$

где x_s — наибольший по модулю коэффициент $H(t)$ и $\varphi(H)$ — наименьшее отклонение от нуля этой дроби на \mathfrak{D}_\varkappa . При больших $\delta(H)$ вычисление значений $H(t)$ на \mathfrak{D}_\varkappa становится неустойчивым. Это нужно иметь в виду при переходе к $n > 4$.

Из примеров 1 и 2 следует, что $\delta(H_3) \approx 3 \cdot 10^3$, $\delta(H_4) \approx 7 \cdot 10^4$.

Возьмём $n = 5$. Дробь наилучшего приближения будем искать в виде

$$H_5(t) = \frac{t^5 + x_1 t^3 + x_2 t}{x_3 t^4 + x_4 t^2 + x_5}.$$

Запишем альтернансные условия

$$\begin{cases} H_5(1) - 1 = -\mu_5, & H_5(\frac{1}{\varkappa}) - 1 = \mu_5, \\ H_5'(t_j) = 0, & j \in 2 : 5; \end{cases} \quad (9)$$

$$H_5(t_j) - 1 = (-1)^j \mu_5, \quad j \in 2 : 5. \quad (10)$$

Выберем начальное приближение для t_2 и t_3 , исходя из того, что точки альтернанса дробей $H_4(t)$ и $H_5(t)$ перемежаются. Положим $t_4 = \frac{1}{\varkappa t_3}$, $t_5 = \frac{1}{\varkappa t_2}$. После этого будем действовать по общей схеме. Решив систему (9) при фиксированных t_2, \dots, t_5 , найдём начальное приближение для полной системы (9), (10). С помощью процедуры `fsolve` решим полную систему.

ПРИМЕР 3. Пусть $n = 5$ и $\varkappa = \frac{1}{100}$. В п. 7° были указаны точки альтернанса дроби $H_4(t)$. В силу перемежаемости точек альтернанса у соседних дробей наилучшего приближения, при $n = 5$ в качестве начального приближения возьмём $t_2 = 2$, $t_3 = 6$. Далее вычисляем

$$t_4 = \frac{1}{\varkappa t_3} = \frac{100}{6}, \quad t_5 = \frac{1}{\varkappa t_2} = 50.$$

При фиксированных t_2, \dots, t_5 решаем систему (9). И здесь требуется начальное приближение. Положим

$$x_j = 100 \quad \text{при} \quad j \in 1 : 5, \quad \mu_5 = \frac{1}{2} \mu_4 \approx 0.07.$$

С помощью процедуры `fsolve` находим решение системы (9):

$$x_1 = 4\,648.60, \quad x_2 = 165\,899, \quad x_3 = 132.156, \quad x_4 = 50\,825.2, \quad x_5 = 132\,148, \\ \mu_5 = 0.0685.$$

Получено начальное приближение для полной системы (9), (10). Вновь используя процедуру `fsolve`, приходим к окончательному результату:

$$x_1 = 4\,436.97, \quad x_2 = 130\,944, \quad x_3 = 131.222, \quad x_4 = 44\,453.8, \quad x_5 = 100\,212, \\ \mu_5 = 0.0650, \quad t_2 = 1.8079, \quad t_3 = 5.5341, \quad t_4 = 18.0695, \quad t_5 = 55.3106.$$

При этом $\delta(H_5) \approx 2 \cdot 10^6$.

9°. В заключение приведём результаты вычислений при $n = 6$ и $\varkappa = \frac{1}{100}$. Дробь наилучшего приближения имеет вид

$$H_6(t) = \frac{x_0 t^5 + x_1 t^3 + x_2 t}{t^6 + x_3 t^4 + x_4 t^2 + x_5},$$

где

$$\begin{aligned} x_0 &= 157.204, & x_1 &= 122\,191, & x_2 &= 1\,572\,038, \\ x_3 &= 7\,368.31, & x_4 &= 736\,831, & x_5 &= 10^6. \end{aligned}$$

Величина наилучшего приближения и точки альтернанса принимают следующие значения: $\mu_6 = 0.0285$,

$$t_2 = 1.5414, \quad t_3 = 3.7506, \quad t_4 = 10, \quad t_5 = 26.662, \quad t_6 = 64.878.$$

При этом $\delta(H_6) \approx 5 \cdot 10^7$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Золотарёв Е. И. *Полное собрание сочинений*. Вып. второй. Л.: Изд-во АН СССР. 1932. С. 1–59.
2. Ахиезер Н. И. *Об одной задаче Е. И. Золотарёва* // Известия АН СССР. Отдел физ.-мат. наук. 1929. Вып. 10. С. 919–931.