ЛИПШИЦЕВА НЕПРЕРЫВНОСТЬ ВЫПУКЛОЙ ФУНКЦИИ*

В. Н. Малозёмов — v.malozemov@spbu.ru

А. В. Плоткин — avplotkin@gmail.com

24 ноября 2016 г.

Аннотация. Для функций, выпуклых на открытом выпуклом множестве, установлена липшицева непрерывность с неулучшаемой константой Липшица.

Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое выпуклое множество и $f(x)$ — выпуклая на U функция. Возьмём точку $x_0 \in U$. Выберем число $\beta > 0$ так, чтобы $x_0 \pm \beta e_k \in U$ при всех $k \in 1:n$. Здесь e_k — единичные орты.

ТЕОРЕМА. *Справедливо неравенство*

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant L \left\| x - x_0 \right\|_1 \tag{1}$$

при условии, что $\left\| x - x_0 \right\|_1 \leqslant \beta$. *Константа* L *определяется формулой*

$$L = \max_{k \in 1:n} \left| \frac{f(x_0 \pm \beta e_k) - f(x_0)}{\beta} \right|. \tag{2}$$

Доказательство. Обозначим $h_k = \beta e_k$. Любой вектор $x \in \mathbb{R}^n$ допускает представление

$$x = x_0 + \sum_{k=1}^{n} w_k h_k. \tag{3}$$

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} w_k &= u_k - v_k, \\ |w_k| &= u_k + v_k. \end{aligned}$$

Получим

$$u_k = \tfrac{1}{2}\left(|w_k| + w_k\right), \quad v_k = \tfrac{1}{2}(|w_k| - w_k).$$

Очевидно, что числа u_k, v_k неотрицательные. При этом

$$\left|(x - x_0)_k\right| = \beta|w_k| = \beta(u_k + v_k).$$

*Семинар по конструктивному негладкому анализу и недифференцируемой оптимизации «CNSA & NDO»: `http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/`

Как следствие,

$$\|x - x_0\|_1 = \beta \sum_{k=1}^{n} (u_k + v_k). \tag{4}$$

Перепишем формулу (3) в виде

$$x - x_0 = \sum_{k=1}^{n} u_k h_k + \sum_{k=1}^{n} v_k (-h_k).$$

Обозначим $u_{n+k} = v_k$, $h_{n+k} = -h_k$. Тогда

$$x - x_0 = \sum_{k=1}^{2n} u_k h_k, \tag{5}$$

где все коэффициенты u_k неотрицательные.

Зафиксируем точку x, удовлетворяющую условию $\|x - x_0\|_1 \leqslant \beta$. Согласно (4),

$$\sum_{k=1}^{2n} u_k = \sum_{k=1}^{n} (u_k + v_k) \leqslant 1. \tag{6}$$

Из (5) следует, что

$$x = \left(1 - \sum_{k=1}^{2n} u_k\right) x_0 + \sum_{k=1}^{2n} u_k (x_0 + h_k).$$

Все коэффициенты в этом представлении неотрицательны и в сумме равны единице, а точки x_0, $x_0 + h_1, \ldots, x_0 + h_{2n}$ принадлежат выпуклому множеству U. По неравенству Йенсена для выпуклых функций

$$f(x) - f(x_0) \leqslant \sum_{k=1}^{2n} u_k \big[f(x_0 + h_k) - f(x_0)\big] \leqslant L\beta \sum_{k=1}^{2n} u_k,$$

где константа L определяется формулой (2). В силу (6) и (4)

$$\beta \sum_{k=1}^{2n} u_k = \beta \sum_{k=1}^{n} (u_k + v_k) = \|x - x_0\|_1 , \tag{7}$$

так что

$$f(x) - f(x_0) \leqslant L \|x - x_0\|_1 . \tag{8}$$

Оценим разность $f(x_0) - f(x)$. Введём точку $y = 2x_0 - x$. Имеем

$$y - x_0 = x_0 - x = \sum_{k=1}^{n} u_k (-h_k) + \sum_{k=1}^{n} v_k h_k.$$

Положив $v_{n+k} = u_k$ при $k \in 1\!:\!n$, запишем

$$y - x_0 = \sum_{k=1}^{2n} v_k h_k.$$

При этом согласно (6)

$$\sum_{k=1}^{2n} v_k = \sum_{k=1}^{n} (v_k + u_k) \leqslant 1. \tag{9}$$

Как и раньше, воспользуемся представлением

$$y = \left(1 - \sum_{k=1}^{2n} v_k\right) x_0 + \sum_{k=1}^{2n} v_k (x_0 + h_k)$$

и неравенством Йенсена для выпуклых функций. Получим

$$f(y) - f(x_0) \leqslant \sum_{k=1}^{2n} v_k \big[f(x_0 + h_k) - f(x_0)\big] \leqslant L\beta \sum_{k=1}^{2n} v_k.$$

Из (6), (9) и (7), в частности, следует, что

$$\beta \sum_{k=1}^{2n} v_k = \beta \sum_{k=1}^{2n} u_k = \|x - x_0\|_1 .$$

Значит,

$$f(y) - f(x_0) \leqslant L \, \|x - x_0\|_1 . \tag{10}$$

Теперь отметим, что $x_0 = \frac{1}{2}(y + x)$. В силу выпуклости функции f

$$f(x_0) \leqslant \tfrac{1}{2}\big[f(y) + f(x)\big],$$

так что

$$f(y) \geqslant 2f(x_0) - f(x). \tag{11}$$

Объединив (10) и (11), придём к неравенству

$$f(x_0) - f(x) \leqslant L \, \|x - x_0\|_1 . \tag{12}$$

Из (8) и (12) следует (1). Теорема доказана. $\square$

Эта теорема является усилением результата из книги [1, с. 61].

Отметим, что для выпуклой на $\mathbb{R}^n$ функции $f(x) = \|x\|_1$ при $x_0 = \mathbb{O}$ и произвольном $\beta > 0$ неравенство (1) выполняется как равенство (с $L = 1$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Пшеничный Б. Н. *Выпуклый анализ и экстремальные задачи.* М.: Наука, 1980. 320 с.