

# ОБ ОДНОЙ КУБИЧЕСКОЙ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧЕ\*

В. Н. Малозёмов

malv@math.spbu.ru

Г. Ш. Тамасян

g.tamasyan@spbu.ru

11 февраля 2016 г.

**1°.** Квадратичные вариационные задачи изучены детально [1]. При выполнении усиленного условия Лежандра и условия Якоби они сводятся к решению краевой задачи для линейного дифференциального уравнения Штурма–Лиувилля.

При переходе к кубическим вариационным задачам ситуация становится менее определенной.

**2°.** В качестве примера рассмотрим кубическую вариационную задачу вида

$$J(x) := \int_{-1}^1 [(x')^3 + 24tx] dt \rightarrow \text{extr}, \quad (1)$$
$$x(-1) = -1, \quad x(1) = 1, \quad x \in C^1[-1, 1].$$

Покажем, что у этой задачи существует стационарная кривая, которая однако не принадлежит пространству  $C^2[-1, 1]$ ; при этом

$$\inf J(x) = -\infty, \quad \sup J(x) = \infty, \quad (2)$$

где инфимум и супремум берутся по множеству всех планов задачи (1).

Подынтегральную функцию обозначим буквой  $F$ ,

$$F(t, x, x') = (x')^3 + 24tx.$$

---

\*Семинар по конструктивному негладкому анализу и недифференцируемой оптимизации «CNSA & NDO»: <http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/>

Стационарной кривой называется решение уравнение Эйлера

$$F'_x - \frac{d}{dt}F'_{x'} = 0,$$

удовлетворяющее краевым условиям. В данном случае приходим к нелинейной задаче:

$$\frac{d}{dt}(x')^2 = 8t, \quad (3)$$

$$x(-1) = -1, \quad x(1) = 1. \quad (4)$$

Решение уравнения (3) будем искать в виде алгебраического полинома второй степени, поскольку его производная есть полином первой степени, в квадрате — полином второй степени, дифференцирование которого снова приводит к полиному первой степени. Несложные вычисления показывают, что необходимо

$$x(t) = \varepsilon t^2 + c, \quad (5)$$

где  $\varepsilon = \pm 1$  и  $c$  — произвольная вещественная константа.

К сожалению, ни одна кривая вида (5), которые называют экстремальями, не удовлетворяет краевым условиям (4). Стационарную кривую получим, склеивая две различные экстремали. Положим

$$x_*(t) = \begin{cases} t^2 & \text{при } t \in [0, 1], \\ -t^2 & \text{при } t \in [-1, 0]. \end{cases} \quad (6)$$

Имеем  $x'_*(t) = 2|t|$ . Ясно, что функция  $x_*$  принадлежит пространству  $C^1[-1, 1]$ , но не принадлежит  $C^2[-1, 1]$ . Последний факт соответствует теореме Гильберта, так как вторая производная  $F''_{x'x'}$  на функции  $x_*$  в точке  $t = 0$  обращается в ноль.

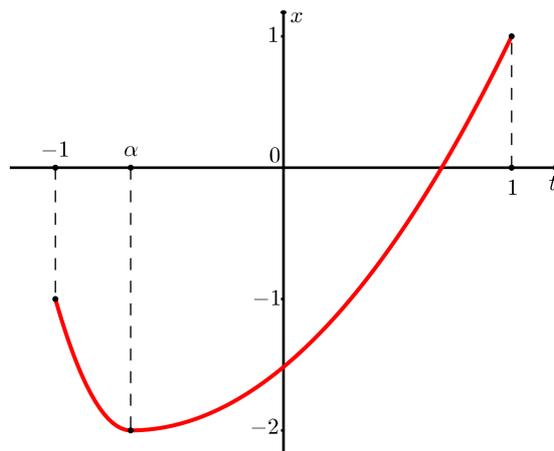
Функция  $x_*$  удовлетворяет уравнению (3) и краевым условиям (4). По определению она является стационарной кривой для вариационной задачи (1).

**3°.** Переходим к доказательству предельных соотношений (2).

Введём параметрическое семейство планов (см. рис. 1)

$$x_\alpha(t) = \begin{cases} \left(\frac{t-\alpha}{1+\alpha}\right)^2 - 2 & \text{при } t \in [-1, \alpha], \\ 3\left(\frac{t-\alpha}{1-\alpha}\right)^2 - 2 & \text{при } t \in [\alpha, 1], \end{cases}$$

где  $\alpha \in (-1, 1)$ .

Рис. 1. График функции  $x_\alpha(t)$ 

Вычислим значение  $J(x_\alpha)$ . Имеем

$$\int_{-1}^{\alpha} (x'_\alpha)^3 dt = \frac{2}{(1+\alpha)^6} (t-\alpha)^4 \Big|_{-1}^{\alpha} = -\frac{2}{(1+\alpha)^2},$$

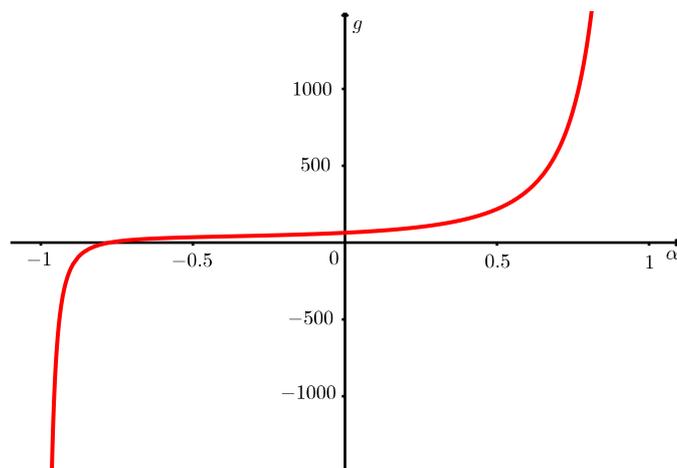
$$\int_{\alpha}^1 (x'_\alpha)^3 dt = \frac{54}{(1-\alpha)^6} (t-\alpha)^4 \Big|_{\alpha}^1 = \frac{54}{(1-\alpha)^2},$$

$$24 \int_{-1}^1 t x_\alpha dt = -4(\alpha^2 + 4\alpha - 3).$$

Значит,

$$J(x_\alpha) = -\frac{2}{(1+\alpha)^2} + \frac{54}{(1-\alpha)^2} - 4(\alpha^2 + 4\alpha - 3).$$

Отсюда очевидным образом следуют предельные соотношения (2) (см. рис. 2).

Рис. 2. График функции  $g(\alpha) = J(x_\alpha)$  на интервале  $(-1, 1)$

4°. Интересно, что получится, если применить метод наискорейшего спуска к решению задачи (1). Напомним описание этого метода [2, 3].

Рассмотрим простейшую вариационную задачу

$$\begin{aligned} J(x) &:= \int_a^b F(t, x(t), x'(t)) dt \rightarrow \inf, \\ x(a) &= A, \quad x(b) = B, \quad x \in C^1[a, b]. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь функция  $F(t, u, v)$  непрерывна вместе с  $\frac{\partial F}{\partial u}$  и  $\frac{\partial F}{\partial v}$  на множестве  $[a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Решение будем искать в виде

$$x(t) = A + \int_a^t z(\tau) d\tau, \quad (8)$$

где  $z \in C[a, b]$ . В этом случае  $x'(t) = z(t)$  на  $[a, b]$  и  $x(a) = A$ .

Перепишем задачу (7) в терминах функции  $z$ :

$$\begin{aligned} f(z) &= \int_a^b F(t, x, z) dt \rightarrow \inf, \\ \varphi(z) &:= A + \int_a^b z(t) dt - B = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Как известно [2, с. 182], функционал  $f$  дифференцируем по Гато, причём его производная Гато в точке  $z$  имеет вид

$$Q(t, z) = \int_t^b \frac{\partial F(\tau, x(\tau), z(\tau))}{\partial x} d\tau + \frac{\partial F(t, x(t), z(t))}{\partial z}.$$

Направление наискорейшего спуска функционала  $f(z)$  при ограничении  $\varphi(z) = 0$  вычисляется по формуле

$$G(t, z) = -\frac{q(t, z)}{\|q(t, z)\|},$$

где

$$q(t, z) = Q(t, z) - \frac{1}{b-a} \int_a^b Q(t, z) dt \quad (10)$$

и  $\|q(t, z)\| = \sqrt{\int_a^b q^2(t, z) dt}$ .

Опишем алгоритм решения задачи (9), который мы будем использовать при расчетах. В качестве начального приближения возьмём произвольную функцию  $z_0 \in C[a, b]$ , удовлетворяющую ограничению  $\varphi(z_0) = 0$ . По формуле (10) вычислим  $q(t, z_0)$ . Если  $q(t, z_0) \equiv 0$  на  $[a, b]$ , то  $z_0$  — стационарная точка. Процесс заканчивается. Иначе переходим к построению  $z_1$ .

Общая  $(k+1)$ -я итерация, перед началом которой имеются  $z_k$  и  $q(t, z_k) \neq 0$ , состоит из следующих шагов:

- находим направление спуска  $G_k(t) = G(t, z_k)$ ;
- вычисляем  $\gamma_k > 0$  как точку минимума функции  $\psi_k(\gamma) = f(z_k + \gamma G_k)$  на полуоси  $(0, +\infty)$ ;
- определяем  $z_{k+1} = z_k + \gamma_k G_k$ .

Если  $q(t, z_{k+1}) \equiv 0$  на  $[a, b]$ , то  $z_{k+1}$  — стационарная точка. Вычисления прекращаются. Иначе переходим к очередной итерации.

Отметим, что все точки последовательности  $z_0, z_1, \dots$  удовлетворяют ограничению задачи (9). Функции вида (8)

$$x_k(t) = A + \int_a^t z_k(\tau) d\tau, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (11)$$

удовлетворяют ограничениям задачи (7) и образуют для неё минимизирующую последовательность.

5°. Воспользуемся описанным алгоритмом для решения задачи (1), заменив в ней операцию «extr» на «inf». Имеем  $a = -1, b = 1, A = -1, B = 1, F(t, u, v) = v^3 + 24tu$  и

$$Q(t, z) = 12(1 - t^2) + 3z^2(t).$$

В качестве начального приближения возьмём функцию  $x_0(t) = t$ . Ей соответствует  $z_0(t) \equiv 1$ . Вычисляем

$$f(z_0) = 18, \quad Q(t, z_0) = -12t^2 + 15, \\ G_0(t) = \sqrt{\frac{5}{128}}(12t^2 - 4).$$

Далее

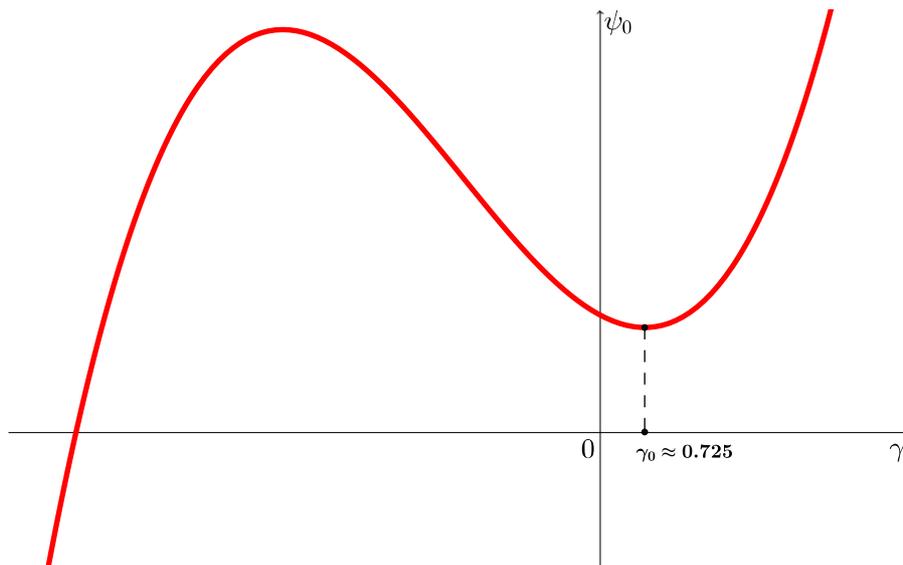
$$\psi_0(\gamma) := f(z_0 + \gamma G_0) = \frac{\sqrt{10}}{7}\gamma^3 + 3\gamma^2 - \frac{8\sqrt{10}}{5}\gamma + 18.$$

График этой функции изображён на рис. 3. Единственным положительным корнем функции  $\psi'_0(\gamma)$  является

$$\gamma_0 = \frac{\sqrt{10}}{30} \left( \sqrt{777} - 21 \right) \approx 0.725.$$

Для первого приближения  $z_1$  получаем представление

$$z_1(t) := z_0(t) + \gamma_0 G_0(t) = \frac{\sqrt{777}-21}{4}t^2 + \frac{33-\sqrt{777}}{12}.$$

Рис. 3. График функции  $\psi_0(\gamma)$ 

Переходим к построению  $z_2$ . Вычисляем

$$f(z_1) = 39 - \frac{37}{45}\sqrt{777} \approx 16.081,$$

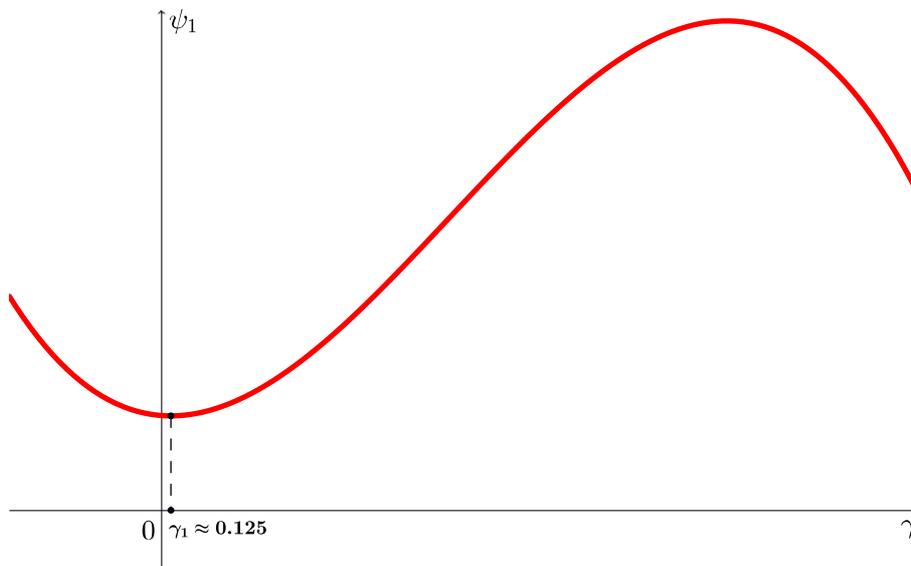
$$Q(t, z_1) = \frac{29 - \sqrt{777}}{64}(504t^4 - 432t^2 + 407 + 11\sqrt{777}),$$

$$G_1(t) = \frac{3(29 - \sqrt{777})}{16\sqrt{809 - 29\sqrt{777}}}(35t^4 - 30t^2 + 3).$$

Далее,

$$\psi_1(\gamma) := f(z_1 + \gamma G_1) \approx -0.343\gamma^3 + 3.893\gamma^2 - 0.955\gamma + 16.081.$$

График этой функции изображён на рис. 4.

Рис. 4. График функции  $\psi_1(\gamma)$

Старший коэффициент у полинома  $\psi_1(\gamma)$  отрицательный, поэтому

$$\inf_{\gamma>0} \psi_1(\gamma) = -\infty.$$

Отсюда следует, что рассматриваемая кубическая вариационная задача (1) не имеет решения.

Можно ограничиться локальным минимумом функции  $\psi_1$ , который достигается в точке  $\gamma_1 \approx 0.125$ , и положить  $z_2 = z_1 + \gamma_1 G_1$ . Если и в дальнейшем на этапе поиска величины шага спуска ограничиваться информацией о локальном минимуме, то получим сходящуюся последовательность  $\{z_k\}$ .

В таблице приведены результаты расчетов для первых пяти приближений. Напомним, что стационарная кривая  $x_*(t)$  определяется формулой (6). При этом  $z_*(t) = 2|t|$ . Функции  $x_k$  и  $z_k$  связаны соотношением (11).

Таблица. Результаты расчетов

$k$	$f(z_k)$	$\ q(t, z_k)\ $	$\ z_* - z_k\ $	$\max_{-1 \leq t \leq 1}  x_*(t) - x_k(t) $
0	18	5.060	0.816	0.250
1	16.081	0.955	0.214	0.053
2	16.022	0.437	0.132	0.033
3	16.008	0.248	0.090	0.020
4	16.004	0.151	0.069	0.015
5	16.002	0.086	0.057	0.012

На рисунках 5 и 6 изображены графики функций  $z_k$  и  $x_k$  при  $k$ , равном 0, 1, 5, и графики предельных функций  $z_*$  и  $x_*$ .

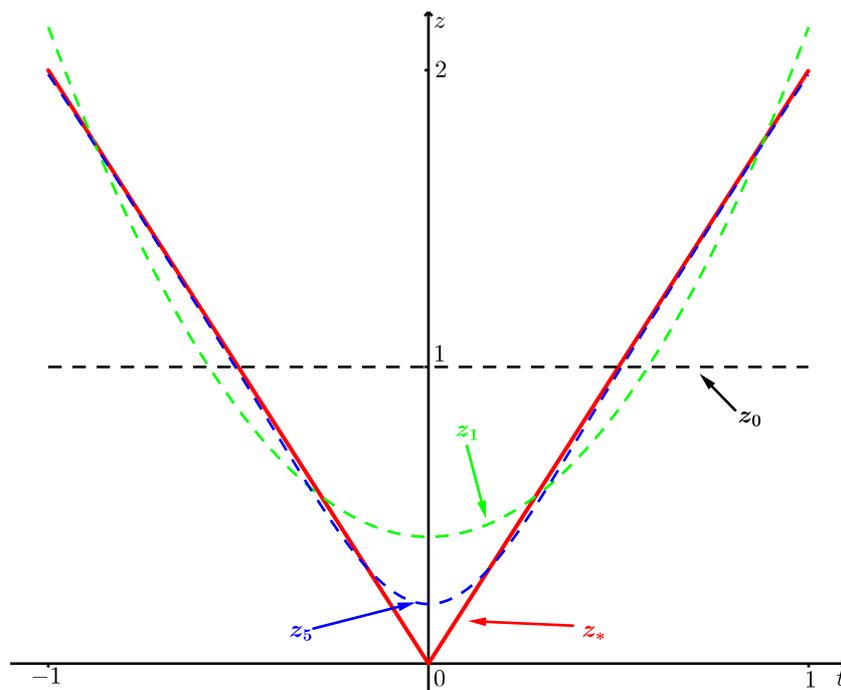
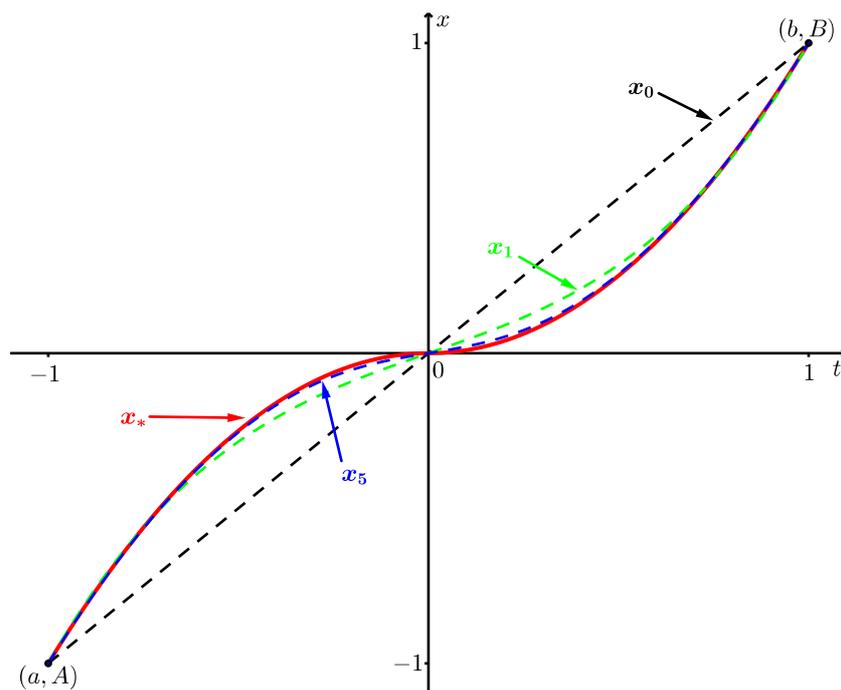


Рис. 5. Графики функций  $z_k$  и  $z_*$

Рис. 6. Графики функций  $x_k$  и  $x_*$ 

Функция  $x_5$  имеет вид

$$\begin{aligned}
 x_5(t) \approx & 0.192203 t + 1.739081 t^3 - 2.853252 t^5 + 5.459985 t^7 - 8.941935 t^9 + \\
 & + 12.372540 t^{11} - 14.610029 t^{13} + 14.640463 t^{15} - 12.266217 t^{17} + \\
 & + 8.470679 t^{19} - 4.748481 t^{21} + 2.121426 t^{23} - 0.736246 t^{25} + \\
 & + 0.190414 t^{27} - 0.034208 t^{29} + 0.003763 t^{31} - 0.000189 t^{33}.
 \end{aligned}$$

**6°.** В заключение отметим, что функция  $q(t, z)$  является ортогональной проекцией производной Гато  $Q(t, z)$  на подпространство пространства  $C[a, b]$ , определяемое условием

$$\int_a^b z(t) dt = 0. \quad (12)$$

Это следует из приведённой ниже леммы.

Пусть  $z_0(t)$  — произвольная непрерывная на отрезке  $[a, b]$  функция. Рассмотрим экстремальную задачу: *минимизировать функционал*

$$\int_a^b [z(t) - z_0(t)]^2 dt$$

по всем функциям  $z \in C[a, b]$ , удовлетворяющим ограничению (12).

**ЛЕММА.** *Данная задача имеет единственное решение*

$$z_*(t) = z_0(t) - c_0, \quad (13)$$

где  $c_0 = \frac{1}{b-a} \int_a^b z_0(t) dt$ .

**Доказательство.** Для любого плана  $z$  в силу (12) и определения  $c_0$  имеем

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_a^b [z - (z_0 - c_0)]^2 dt = \int_a^b [(z - z_0) + c_0]^2 dt = \\ &= \int_a^b (z - z_0)^2 dt - 2 \int_a^b z_0 c_0 dt + \int_a^b c_0^2 dt = \int_a^b (z - z_0)^2 dt - (b - a)c_0^2. \end{aligned}$$

Значит,

$$\int_a^b (z - z_0)^2 dt \geq (b - a)c_0^2.$$

Равенство достигается только при  $z = z_0 - c_0$ . Лемма доказана.  $\square$

## ДОБАВЛЕНИЕ 1

### Экстремальное свойство коэффициентов Фурье

Это добавление навеяно леммой из п. 6°.

Пусть в пространстве  $L_2[a, b]$  заданы функция  $x_0$  и ортонормированная система  $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ . Рассмотрим экстремальную задачу:

$$\text{минимизировать} \quad \int_a^b [x - x_0]^2 dt$$

по всем функциям  $x$  из  $L_2[a, b]$ , удовлетворяющим условиям

$$\int_a^b x \xi_k dt = 0, \quad k \in 1 : n. \quad (14)$$

**ТЕОРЕМА 1.** *Данная задача имеет единственное решение*

$$x_* = x_0 - \sum_{k=1}^n c_k \xi_k,$$

где  $c_k = \int_a^b x_0 \xi_k dt$  — коэффициенты Фурье функции  $x_0$ .

Доказательство. Обозначим

$$p_0 = \sum_{k=1}^n c_k \xi_k.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \int_a^b x_0 p_0 dt &= \sum_{k=1}^n c_k \int_a^b x_0 \xi_k dt = \sum_{k=1}^n c_k^2, \\ \int_a^b p_0^2 dt &= \sum_{k,j=1}^n c_k c_j \int_a^b \xi_k \xi_j dt = \sum_{k=1}^n c_k^2. \end{aligned} \tag{15}$$

Возьмём произвольную функцию  $x \in L_2[a, b]$ , удовлетворяющую условиям (14). Для неё в силу (15)

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_a^b [x - (x_0 - p_0)]^2 dt = \int_a^b [(x - x_0) + p_0]^2 dt = \\ &= \int_a^b [x - x_0]^2 dt - 2 \int_a^b x_0 p_0 dt + \int_a^b p_0^2 dt = \int_a^b [x - x_0]^2 dt - \sum_{k=1}^n c_k^2. \end{aligned}$$

Остаётся переписать полученное неравенство в виде

$$\int_a^b [x - x_0]^2 dt \geq \sum_{k=1}^n c_k^2$$

и отметить, что неравенство выполняется как равенство только тогда, когда  $x = x_0 - p_0$ .

Теорема доказана.  $\square$

## ДОБАВЛЕНИЕ 2

### Эквивалентные определения стационарной кривой

Напомним, что стационарной кривой для простейшей вариационной задачи (7) называется план этой задачи, удовлетворяющий уравнению Эйлера. Можно дать эквивалентное определение стационарной кривой в терминах функции  $q(t, z)$  вида (10).

**ТЕОРЕМА 2.** *Для того чтобы план  $x_*$  задачи (7) был стационарной кривой, необходимо и достаточно, чтобы для производной  $z_* = x_*'$  выполнялось соотношение*

$$q(t, z_*) \equiv 0 \quad \text{на} \quad [a, b]. \tag{16}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть план  $x_*$  является стационарной кривой. Проинтегрировав уравнение Эйлера по отрезку  $[t, b]$ , получим

$$\int_t^b F'_x(\tau, x_*(\tau), z_*(\tau)) d\tau - F'_{x'}(b, x_*(b), z_*(b)) + F'_{x'}(t, x_*(t), z_*(t)) = 0$$

или

$$Q(t, z_*) \equiv \text{const} \quad \text{на} \quad [a, b].$$

Теперь тождество (16) следует из определения (10) функции  $q$ .

Достаточность. Пусть  $x_*$  — план задачи (7) и  $z_* = x'_*$ . Тогда

$$x_*(t) = A + \int_a^t z_*(\tau) d\tau.$$

Продифференцируем тождество (16). Получим

$$-F'_x(t, x_*(t), x'_*(t)) + \frac{d}{dt} F'_{x'}(t, x_*(t), x'_*(t)) \equiv 0 \quad \text{на} \quad [a, b].$$

Это означает, что  $x_*$  удовлетворяет уравнению Эйлера. По условию  $x_*$  — план, так что кривая  $x_*$  является стационарной.

Теорема доказана. □

**Замечание.** В п. 4° основного текста мы неявно пользовались следующим утверждением: *если функция  $z$  принадлежит  $C[a, b]$ , удовлетворяет ограничению задачи (9) и  $q(t, z) \equiv 0$  на  $[a, b]$ , то функция  $x$  вида (8) является стационарной кривой для задачи (7)*. Справедливость этого утверждения следует из теоремы 2, если учесть, что  $x$  — план задачи (7).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Малоземов В. Н. *Квадратичные вариационные задачи* // Вестник молодых ученых. Прикл. мат. и мех. 2000. № 3. С. 12–22.
2. Демьянов В. Ф. *Условия экстремума и вариационное исчисление*. М.: Высшая школа, 2005. 335 с.
3. Долгополик М. В., Тамасян Г. Ш. *Об эквивалентности методов наискорейшего и гиподифференциального спусков в некоторых задачах условной оптимизации* // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14, вып. 4, ч. 2, с. 532–542.