СХОДИМОСТЬ МЕТОДА ГИПОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО СПУСКА В КЛАССИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ*

М. В. Долгополик

maxim.dolgopolik@gmail.com

15 сентября 2016 г.

Аннотация. В докладе обсуждаются вопросы сходимости метода гиподифференциального спуска в простейшей задаче вариационного исчисления [1–3]. Показывается, что метод гиподифференциального спуска для данной задачи совпадает с методом проекции градиента, и приводятся общие теоремы о сходимости данного метода, содержащие оценки скорости сходимости.

1°. Постановка задачи. Рассмотрим классическую задачу вариационного исчисления

$$J(x) = \int_a^b F(x(t), x'(t), t)\, dt \to \inf, \tag{1}$$

$$x(a) = A, \quad x(b) = B, \quad x \in W_2^1[a, b]. \tag{2}$$

Здесь $F(x, z, t)$ — функция трёх переменных, заданная и непрерывно дифференцируема на $\mathbb{R}^2 \times [a, b]$, а $W_2^1[a, b]$ — пространство Соболева на отрезке $[a, b]$ (см., например, [4, 5]). Как обычно, мы будем считать, что пространство $W_2^1[a, b]$ состоит из всех абсолютно непрерывных функций $x \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ таких, что $x' \in L_2[a, b]$.

Следует отметить, что в качестве основного пространства в задаче (1), (2) было выбрано пространство Соболева, поскольку в этом пространстве существенно упрощается анализ сходимости метода гиподифференциального спуска. Кроме того, использование пространства Соболева позволяет при естественных предположениях гарантировать существование оптимального плана задачи (1), (2). Однако, у данного подхода имеются свои ограничения. Для того чтобы гарантировать, что функционал $J(x)$ корректно определён и всюду

*Семинар по конструктивному негладкому анализу и недифференцируемой оптимизации «CNSA & NDO»: `http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/`

конечен (т.е. не принимает значений $+\infty$ и $-\infty$), необходимо налагать *условия роста* на подынтегральную функцию $F(x,z,t)$. Действительно, если, например, $[a,b]=[0,1]$ и $F(x,z,t)=z^4$, то для функции $x(t)=t^{3/4}$, принадлежащей пространству $W_2^1[0,1]$, будет

$$J(x) := \int_0^1 x'(t)^4\,dt = \frac{81}{256}\int_0^1 \frac{1}{t}\,dt = +\infty.$$

Поэтому везде далее мы будем предполагать, что функция $F(x,z,t)$ удовлетворяет следующему условию: для любого $M>0$ существуют $c_1, c_2 > 0$ такие, что

$$|F(x,z,t)| \leqslant c_1|z|^2 + c_2 \quad \forall x \in [-M,M], \quad z \in \mathbb{R}, \quad t \in [a,b].$$

Нетрудно проверить, что при выполнении данного условия функционал $J(x)$ будет определён и конечен для всех $x \in W_2^1[a,b]$.

Поскольку при исследовании метода гиподифференциального спуска нам потребуется рассматривать производную Гато функционала $J(x)$, то помимо условия роста для функции $F(x,z,t)$, нам потребуются также условия роста и для производных этой функции, гарантирующие, что функционал $J(x)$ дифференцируем по Гато. А именно, далее мы будем предполагать, что для любого $M>0$ существуют $d_i>0$, $i \in 1:4$ такие, что для всех $x\in[-M,M]$, $z\in\mathbb{R}$ и $t\in[a,b]$ справедливы неравенства:

$$\Big|F'_x(x,z,t)\Big| \leqslant d_1|z|^2 + d_2, \quad \Big|F'_z(x,z,t)\Big| \leqslant d_3|z| + d_4.$$

Можно проверить, что при выполнении этого условия функционал $J(x)$ дифференцируем по Гато в каждой точке $x \in W_2^1[a,b]$ и его производная Гато имеет вид

$$J'(x;h) = \int_a^b \Big(F'_x(x(t),x'(t),t)h(t) + F'_z(x(t),x'(t),t)h'(t)\Big)\,dt \quad \forall h \in W_2^1[a,b].$$

(см., например, [6], Теорема 4.12).

2°. Метод гиподифференциального спуска для классической задачи вариационного исчисления. Опишем, как строится метод гиподифференциального спуска для решения задачи (1), (2). Для этого, следуя идеям В.Ф. Демьянова [1], «перейдём в пространство производных», то есть сделаем замену переменных $x' \to z$. Учитывая граничное условие $x(a)=A$, получим, что

$$x(t) = A + \int_a^t z(\tau)\,d\tau \quad \forall t \in [a,b].$$

Поэтому граничное условие $x(b) = B$ принимает вид

$$\int_a^b z(t)\,dt = B - A.$$

Следовательно, задача (1), (2) преобразуется к виду

$$I(z) = \int_a^b F\Big(A + \int_a^t z(\tau)\,d\tau, z(t), t\Big)\,dt \to \inf, \tag{3}$$

$$\int_a^b z(t)\,dt = B - A, \quad z \in L_2[a,b]. \tag{4}$$

Будем решать данную задачу с помощью теории точных штрафных функций [1]. Для этого введём штрафную функцию

$$\Phi_\lambda(z) = I(z) + \lambda\varphi(z),$$

где $\lambda \geqslant 0$ — штрафной параметр и

$$\varphi(z) = |\varphi_1(z)|, \quad \varphi_1(z) = \int_a^b z(t)\,dt + A - B.$$

Можно показать, что при некоторых дополнительных предположениях штрафная функция $\Phi_\lambda(z)$ является точной, то есть найдётся $\lambda^* \geqslant 0$ такое, что для любого $\lambda \geqslant \lambda^*$ задача (3), (4) эквивалента следующей задаче безусловной минимизации штрафной функции:

$$\Phi_\lambda(z) \to \inf, \quad z \in L_2[a,b]. \tag{5}$$

Поэтому далее мы будем строить численный метод решения задачи (5).

Нетрудно проверить, что штрафная функция $\Phi_\lambda(z)$ является *гиподифференцируемой* [1, 7] в каждой точке пространства $L_2[a,b]$, то есть для любых z, $h \in L_2[a,b]$ справедливо разложение:

$$\Phi_\lambda(z + \alpha h) - \Phi_\lambda(z) = \max_{[a,v] \in \underline{d}\Phi_\lambda(z)} \big(a + \alpha\langle v, h\rangle\big) + o(\alpha),$$

где $o(\alpha)/\alpha \to 0$ при $\alpha \to +0$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в $L_2[a,b]$ и

$$\underline{d}\Phi_\lambda(z) = \mathrm{co}\Big\{\big(0, Q[z] + \lambda \operatorname{sign}\varphi_1(z)\big), \big(-2\lambda\varphi(z), Q[z] - \lambda \operatorname{sign}\varphi_1(z)\big)\Big\},$$

$$Q[z](t) = \int_t^b F'_x\Big(A + \int_a^\tau z(\xi)\,d\xi, z(\tau), \tau\Big)\,d\tau + F'_z\Big(A + \int_a^t z(\tau)\,d\tau, z(t), t\Big).$$

Заметим, что оператор $Q[z]$ является градиентом Гато функционала $I(z)$ в точке z (см. [1]).

Множество $\underline{d}\Phi_\lambda(z)$ называется *гиподифференциалом* функции $\Phi_\lambda(z)$ в точке z, а его элементы называются *гипоградиентами* данной функции в рассматриваемой точке. Необходимое условие минимума штрафной функции $\Phi_\lambda(z)$ можно записать в терминах гиподифференциала данной функции [1, 7]. А именно, если $z^* \in L_2[a,b]$ является точкой локального минимума функционала $\Phi_\lambda(z)$, то

$$(0, \mathbb{O}) \in \underline{d}\Phi_\lambda(z^*). \tag{6}$$

Легко видеть, что данное условие эквивалентно уравнению Эйлера в интегральной форме.

Если в точке $z \in L_2[a,b]$ не выполнено необходимое условие минимума (6), то найдём наименьший по L_2-норме гипоградиент функционала Φ_λ в данной точке, то есть решим задачу

$$a^2 + \langle v, v \rangle \to \inf_{[a,v] \in \underline{d}\Phi_\lambda(z)}.$$

Оптимальный план данной задачи можно легко найти аналитически [2]. В случае когда $\varphi(z) = 0$, оптимальный план имеет вид $(0, G[z])$, где

$$G[z](t) = Q[z](t) - \frac{1}{b-a} \int_a^b Q[z](\tau)\, d\tau \quad \forall t \in [a,b]. \tag{7}$$

Можно показать [7], что направление $v = -G[z]$ является направление спуска функционала $\Phi_\lambda(z)$, то есть $\Phi_\lambda(z + \beta v) < \Phi_\lambda(z)$ для всех достаточно малых $\beta > 0$. Кроме того, заметим, что

$$\int_a^b \big(z(t) - \beta G[z](t)\big)\, dt = \int_a^b z(t)\, dt \quad \forall \beta \in \mathbb{R}.$$

Поэтому, в частности, направление $G[z]$ не выводит из множества планов задачи (3), (4).

Теперь мы можем записать теоретическую схему метода гиподифференциального спуска для минимизации функционала $\Phi_\lambda(z)$.

1) Выберем $z_0 \in L_2[a,b]$ такое, что $\int_a^b z_0(t)\, dt = B - A$.

2) Переход от k-го приближения к $(k+1)$-му осуществляется в следующем порядке ($k \geqslant 0$):

   (a) Вычислим направление спуска $G[z_k]$.

   (b) Найдём $\beta_k \geqslant 0$ такое, что

   $$\min_{\beta \geqslant 0} \Phi_\lambda(z_k - \beta G[z_k]) = \Phi_\lambda(z_k - \beta_k G[z_k]).$$

   (c) Положим $z_{k+1} = z_k - \beta_k G[z_k]$.

Заметим, что в качестве начального приближения в методе гиподифференциального спуска выбирается некоторый план z_0 задачи (3), (4). Поскольку направление $G[z_k]$ не выводит из множества планов данной задачи, то для любого $k \in \mathbb{N}$ точки z_k также будут планами задачи (3), (4) и $\Phi_\lambda(z_k - \beta G[z_k]) = I(z_k - \beta G[z_k])$ для всех $\beta \geqslant 0$.

3°. Сходимость метода гиподифференциального спуска. Перейдём теперь к вопросу сходимости метода гиподифференциального спуска, описанного выше. Данный метод был построен, как метод минимизации негладкой штрафной функции для задачи (3), (4), которая по построению эквивалентна исходной классической задаче вариационного исчисления. Для того чтобы исследовать сходимость метода гиподифференциального спуска необходимо посмотреть на этот метод с другой стороны.

Зафиксируем произвольный план z_0 задачи (3), (4), и введём линейное подпространство

$$Z = \Big\{ z \in L_2[a,b] \Bigm| \int_a^b z(t)\,dt = 0 \Big\}.$$

Ясно, что множество планов задачи (3), (4) совпадает с линейным многообразием $z_0 + Z$. Поэтому задачу (3), (4) можно переписать в следующем виде:

$$I(z) \to \inf, \quad z \in z_0 + Z.$$

Будем решать данную задачу методом проекции градиента. В качестве начального приближения возьмём точку z_0. Для того чтобы совершить один шаг по методу проекции градиента необходимо найти ортогональную проекцию градиента Гато функционала $I(z)$ на линейное подпространство Z. Напомним, что оператор

$$Q[z](t) = \int_t^b F'_x\Big(A + \int_a^\tau z(\xi)\,d\xi, z(\tau), \tau\Big)\,d\tau + F'_z\Big(A + \int_a^t z(\tau)\,d\tau, z(t), t\Big)$$

является градиентом Гато функционала $I(z)$. Кроме того, заметим, что оператор ортогонального проектирования на подпространство Z имеет вид

$$Pr_Z[v](t) = v(t) - \frac{1}{b-a}\int_a^b v(\tau)\,d\tau \quad \forall v \in L_2[a,b].$$

(см. [3], пункт 6). Следовательно, проекция градиента функционала $I[z]$ на подпространство Z совпадает с направлением $G[z]$, используемым на каждой итерации метода гиподифференциального спуска (см. (7)). Таким образом, метод гиподифференциального спуска для классической задачи вариационного исчисления совпадает с методом проекции градиента для функционала $I(z)$ при условии, что в качестве начального приближения в методе гиподифференциального спуска выбирается план задачи (3), (4).

З а м е ч а н и е. Следует отметить, что совпадение метода гиподифференциального спуска для минимизации негладкой штрафной функции и метода проекции градиента для решения исходной задачи не обусловлено какими-либо особенностями конкретной задачи, а является общим фактом для всех задач с линейными ограничениями-равенствами [8]. Помимо этого отметим, что метод проекции градиента для решения классической задачи вариационного исчисления был рассмотрен Б.Т. Поляком ещё в начале 60-х годов [9].

Поскольку метод гиподифференциального спуска совпадает с методом проекции градиента, то для исследования сходимости данного метода можно использовать общие теоремы о сходимости градиентных методов для функционалов, определённых на банаховых пространствах [9, 10] (см. также [11], глава XV).

Пусть везде далее $\{z_k\}$, $k \geqslant 0$ — последовательность, построенная по методу гиподифференциального спуска (или, что тоже самое, по методу проекции градиента). Обозначим через $\| \cdot \|_2$ — норму пространства $L_2[a,b]$, а через $\| \cdot \|_\infty$ — равномерную норму на отрезке $[a,b]$ (т.е. стандартную норму пространства $C[a,b]$). Воспользовавшись общими теоремами из [9–11], нетрудно проверить, что справедливы следующие утверждения.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть множество*

$$\Big\{ z \in Z \;\Big|\; I(z + z_0) \leqslant I(z_0) \Big\}$$

ограничено в $L_2[a,b]$, *и оператор* $z \to Q[z]$, *действующий из* $L_2[a,b]$ *в* $L_2[a,b]$, *удовлетворяет условию Липшица на любом ограниченном множестве. Тогда* $\|G[z_k]\|_2 \to 0$ *при* $k \to \infty$.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть множество*

$$\Big\{ z \in Z \;\Big|\; I(z + z_0) \leqslant I(z_0) \Big\} \tag{8}$$

ограничено в $L_2[a,b]$, *и оператор* $z \to Q[z]$ *удовлетворяет условию Липшица на любом ограниченном множестве. Предположим также, что функционал* $I(z)$ *является выпуклым. Тогда существует оптимальный план* z^* *задачи* (3), (4) *и*

$$I(z_k) - I(z^*) = O\left(\frac{1}{k}\right). \tag{9}$$

Обозначим

$$x_k(t) = \int_a^t z_k(\tau)\, d\tau \quad \forall k \geqslant 0.$$

Заметим, что функции x_k являются планами задачи (1), (2).

ТЕОРЕМА 3. *Пусть множество*

$$\left\{ z \in Z \;\middle|\; I(z + z_0) \leqslant I(z_0) \right\}$$

ограничено в $L_2[a,b]$, *и оператор* $z \to Q[z]$ *удовлетворяет условию Липшица на любом ограниченном множестве. Предположим также, что функционал* $I(z)$ *является сильно выпуклым. Тогда существует единственный оптимальный план* z^* *задачи* (3), (4) *и найдутся* $C_1, C_2 > 0$ *и* $q \in (0,1)$ *такие, что*

$$\|z_k - z^*\|_2 \leqslant C_1 q^k, \quad \|x_k - x^*\|_\infty \leqslant C_2 q^k \quad \forall k \geqslant 0.$$

Для того чтобы применять приведённые выше теоремы к конкретным функционалам, необходимо уметь проверять ограниченность множества

$$\left\{ z \in Z \;\middle|\; I(z + z_0) \leqslant I(z_0) \right\},$$

липшицевость отображения $z \to Q[z]$ и выпуклость функционала $I(z)$. Ниже мы приводим простые достаточные условия, гарантирующие выполнение указанных предположений.

ЛЕММА 1 ([6], теорема 4.1)**.** *Предположим, что существуют* $0 \leqslant p < 2$, $\alpha_1 > 0$ *и* $\alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ *такие, что*

$$F(x,z,t) \geqslant \alpha_1 z^2 + \alpha_2 |x|^p + \alpha_3 \quad \forall (x,z,t) \in \mathbb{R}^2 \times [a,b]. \tag{10}$$

Тогда для любого плана z_0 *задачи* (3), (4) *множество*

$$\left\{ z \in Z \;\middle|\; I(z + z_0) \leqslant I(z_0) \right\}$$

ограничено в $L_2[a,b]$.

Доказательство. Зафиксируем произвольное $z \in L_2[a,b]$ и положим $x(t) = A + \int_a^t z(\tau)\,d\tau$. Воспользовавшись неравенством (10), получим

$$F(x(t), z(t), t) \geqslant \alpha_1 z(t)^2 + \alpha_2 |x(t)|^p + \alpha_3 \quad \text{для п.в. } t \in [a,b].$$

Интегрируя данное неравенство по t от a до b, имеем

$$I(z) \geqslant \alpha_1 \big(\|z\|_2\big)^2 - |\alpha_2| \int_a^b |x(t)|^p\,dt + \alpha_3 (b-a).$$

Из определения функции $x(t)$ следует, что

$$|x(t)| \leqslant \big|A\big| + \int_a^b |z(t)|\,dt \quad \forall t \in [a,b].$$

Отсюда, воспользовавшись неравенством Коши-Буняковского, получим

$$\|x\|_\infty \leqslant \big|A\big| + \sqrt{b-a}\|z\|_2. \tag{11}$$

Следовательно

$$I(z) \geqslant \alpha_1\big(\|z\|_2\big)^2 - |\alpha_2|(b-a)\Big(|A| + \sqrt{b-a}\|z\|_2\Big)^p + \alpha_3(b-a).$$

Поскольку $0 \leqslant p < 2$, то из предыдущего неравенства вытекает, что $I(z) \to +\infty$ при $\|z\|_2 \to +\infty$. Поэтому множество $\Big\{z \in Z \;\Big|\; I(z+z_0) \leqslant I(z_0)\Big\}$ ограничено в $L_2[a,b]$. $\square$

ЛЕММА 2. *Пусть для любого $M > 0$ существует $L > 0$ такое, что для любых $t \in [a,b]$, $x_1, x_2 \in [-M, M]$ и $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ справедливы неравенства*

$$\Big|F'_x(x_1, z_1, t) - F'_x(x_2, z_2, t)\Big| \leqslant L|x_1 - x_2| + L|z_1 - z_2|, \tag{12}$$

$$\Big|F'_z(x_1, z_1, t) - F'_z(x_2, z_2, t)\Big| \leqslant L|x_1 - x_2| + L|z_1 - z_2|. \tag{13}$$

Тогда оператор $z \to Q[z]$ удовлетворяет условию Липшица на любом ограниченном подмножестве пространства $L_2[a,b]$.

Доказательство. Пусть $K \subset L_2[a,b]$ — непустое ограниченное множество. Из ограниченности множества K и неравенства (11) следует, что найдётся такое $M > 0$, что

$$\|x\|_\infty \leqslant M \quad \forall x \in \Big\{x \in W_2^1[a,b] \;\Big|\; x(t) = A + \int_a^t z(\tau)\,d\tau,\ z \in K\Big\}.$$

Для данного M найдётся $L > 0$, для которого выполнены неравенства (12) и (13).

Зафиксируем произвольные $z_1, z_2 \in K$ и обозначим $x_i(t) = A + \int_a^t z_i(\tau)\,d\tau$, $i \in \{1,2\}$. Воспользовавшись неравенствами (12) и (13), а также неравенствами Минковского и Коши-Буняковского, получим, что

$$\sqrt{\int_a^b \Big(F'_z(x_1(t), z_1(t), t) - F'_z(x_2(t), z_2(t), t)\Big)^2 dt} \leqslant L\|x_1 - x_2\|_2 + L\|z_1 - z_2\|_2 \tag{14}$$

и

$$\begin{aligned}\Big|\int_t^b \Big(F'_x(x_1(\tau), z_1(\tau), \tau) - F'_x(x_2(\tau), z_2(\tau), \tau)\Big)\,d\tau\Big| \leqslant \\ \leqslant \int_a^b \Big|F'_x(x_1(t), z_1(t), t) - F'_x(x_2(t), z_2(t), t)\Big|\,dt \leqslant \\ \leqslant L\int_a^b |x_1(t) - x_2(t)|\,dt + L\int_a^b |z_1(t) - z_2(t)|\,dt \leqslant \\ \leqslant L\sqrt{b-a}\|x_1 - x_2\|_2 + L\sqrt{b-a}\|z_1 - z_2\|_2.\end{aligned} \tag{15}$$

Напомним, что

$$Q[z](t) = \int_t^b F'_x\Big(A + \int_a^\tau z(\xi)\,d\xi, z(\tau), \tau\Big)\,d\tau + F'_z\Big(A + \int_a^t z(\tau)\,d\tau, z(t), t\Big).$$

Применяя неравенство Минковского и неравенства (14), (15), имеем

$$\begin{aligned}
&\|Q[z_1] - Q[z_2]\|_2 \leqslant \\
&\leqslant \sqrt{\int_a^b \left(\int_t^b \Big[F'_x(x_1(\tau), z_1(\tau), \tau) - F'_x(x_2(\tau), z_2(\tau), \tau)\Big]\,d\tau\right)^2 dt} + \\
&\quad + \sqrt{\int_a^b \Big(F'_z(x_1(t), z_1(t), t) - F'_z(x_2(t), z_2(t), t)\Big)^2 dt} \leqslant \\
&\qquad \leqslant L\big(b - a + \sqrt{b-a}\big)\Big(\|x_1 - x_2\|_2 + \|z_1 - z_2\|_2\Big).
\end{aligned}$$

С помощью неравенства Коши–Буняковского нетрудно показать, что

$$\|x_1 - x_2\|_2 \leqslant (b-a)\|z_1 - z_2\|_2,$$

откуда

$$\big\|Q[z_1] - Q[z_2]\big\|_2 \leqslant L\big(b - a + \sqrt{b-a}\big)(b - a + 1)\|z_1 - z_2\|_2.$$

Следовательно, оператор $Q[z]$ удовлетворяет условию Липшица на множестве K. $\square$

ЛЕММА 3. *Пусть функция $F(x, z, t)$ дважды непрерывно дифференцируема, и пусть существует $\mu_0 > 0$ такое, что для любых $(x, z, t) \in \mathbb{R}^2 \times [a, b]$ и $h_1, h_2 \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство*

$$F''_{xx}(x, z, t)h_1^2 + 2F''_{xz}(x, z, t)h_1h_2 + F''_{zz}(x, z, t)h_2^2 \geqslant \mu_0 h_2^2 \tag{16}$$

(в частности, достаточно предполагать, что для любого $t \in [a, b]$ функция $(x, z) \to F(x, z, t)$ сильно выпукла с константой сильной выпуклости $\mu \geqslant \mu_0$). Предположим также, что для любого $M > 0$ найдутся $\alpha_i > 0$, $i \in 1:5$ такие, что для любых $x \in [-M, M]$, $z \in \mathbb{R}$ и $t \in [a, b]$ справедливы неравенства

$$\big|F''_{xx}(x, z, t)\big| \leqslant \alpha_1 z^2 + \alpha_2, \quad \big|F''_{xz}(x, z, t)\big| \leqslant \alpha_3|z| + \alpha_4, \quad \big|F''_{zz}(x, z, t)\big| \leqslant \alpha_5. \tag{17}$$

Тогда функционал $I(z)$ является сильно выпуклым.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для краткости мы приведём лишь общую идею доказательства. Воспользовавшись неравенствами (17) и теоремой Лебега о мажорируемой сходимости, можно показать, что функционал $I(z)$ является дважды дифференцируемым по Гато в каждой точке $z \in L_2[a,b]$ и его вторая производная Гато имеет вид

$$I''[z](h,h) = \int_a^b \Big[F''_{xx}(t)\Big(\int_a^t h(\tau)\,d\tau\Big)^2 + 2F''_{xz}(t)\Big(\int_a^t h(\tau)\,d\tau\Big)h(t) + F''_{zz}(t)h(t)^2\Big]\,dt,$$

где

$$F''_{xx}(t) = F''_{xx}\big(x(t), z(t), t\big), \quad F''_{xz}(t) = F''_{xz}\big(x(t), z(t), t\big),$$
$$F''_{zz}(t) = F''_{zz}\big(x(t), z(t), t\big).$$

и $x(t) = A + \int_a^t z(\tau)\,d\tau$. Теперь применяя неравенство (16), получим, что

$$I''[z](h,h) \geqslant \mu_0(\|h\|_2)^2 \quad \forall z, h \in L_2[a,b],$$

откуда заключаем, что функционал $I(z)$ является сильно выпуклым. □

Приведём простой пример функционала, удовлетворяющего всем указанным выше условиям. Пусть

$$J(x) = \int_a^b \Big(\gamma(t)x'(t)^2 + \omega(t)x'(t) + f(x(t), t)\Big)\,dt,$$

где функции $\gamma(t)$ и $\omega(t)$ непрерывны и $\gamma(t) > 0$ на $[a,b]$, а функция $f(x,t)$ дважды непрерывно дифференцируема и выпукла по x при каждом $t \in [a,b]$. Нетрудно проверить, что для этого функционала выполнены все предположения лемм 1–3. Поэтому с помощью теоремы 3 можно заключить, что в данном случае существует единственный оптимальный план x^* исходной задачи, и для любого начального приближения $z_0 \in L_2[a,b]$, удовлетворяющего ограничению $\int_a^b z_0(t)\,dt = B - A$, найдутся $C_1, C_2 > 0$ и $q \in (0,1)$ такие, что

$$\|z_k - z^*\|_2 \leqslant C_1 q^k, \quad \|x_k - x^*\|_\infty \leqslant C_2 q^k \quad \forall k \geqslant 0,$$

где $z^* = dx^*/dt$, то есть метод гиподифференциального спуска сходится со скоростью геометрической прогрессии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Демьянов В.Ф. *Условия экстремума и вариационное исчисление.* М.: Высш. шк., 2004. 335 с.

2. Тамасян Г.Ш. *Гиподифференциальный спуск в вариационных задачах* [Электронный ресурс] // Семинар «CNSA & NDO». Избранные доклады. 25.09.2014. URL: `http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/pdf/2014/Gipodiff_Descent_In_Variational_Problems.pdf` (дата обращения: 20.09.2016).

3. Малозёмов В.Н., Тамасян Г.Ш. *Об одной кубической вариационной задаче* [Электронный ресурс] // Семинар «CNSA & NDO». Избранные доклады. 11.02.2016. URL: `http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/pdf/2016/Cub_VarProblem_11feb2016.pdf` (дата обращения: 20.09.2016).

4. Осмоловский В.Г. *Нелинейная задача Штурма–Лиувилля: Учебное пособие.* СПб.: Издательство С.-Пб. университета, 2003. 257 с.

5. Leoni G. *A first course in Sobolev spaces.* Providence, RI: American Mathematical Society, 2009. 607 p.

6. Dacorogna B. *Direct methods in the calculus of variations.* New York: Springer Science+Business Media, 2008. 622 p.

7. Демьянов В.Ф., Долгополик М.В. *Кодифференцируемые функции в банаховых пространствах: методы и приложения к задачам вариационного исчисления* // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 10. Прикл. матем. Информ. Проц. упр., 2013, вып. 3, с. 48–66.

8. Долгополик М.В., Тамасян Г.Ш. *Об эквивалентности методов наискорейшего и гиподифференциального спусков в некоторых задачах условной оптимизации* // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика, 2014, том 14, вып. 4(2), с. 532–542.

9. Поляк Б.Т. *Градиентные методы минимизации функционалов* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1963, том 3, № 4, с. 643–653.

10. Любич Ю.И., Майстровский Г.Д. *Общая теория релаксационных процессов для выпуклых функционалов* // УМН, 1970, том 25, вып. 1(151), с. 57–112.

11. Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ.* СПб.: Невский Диалект; БХВ-Петербург, 2004. 816 с.

12. Adams R.A. *Sobolev spaces.* New York: Academic Press, 1975. 286 p.