# ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ПО ФРЕШЕ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ФУНКЦИОНАЛА*

М. В. Долгополик

maxim.dolgopolik@gmail.com

3 марта 2016 г.

**Аннотация.** В докладе обсуждается дифференцируемость по Фреше одного нелинейного функционала, возникающего в задачах вариационного исчисления в связи с изучением точных штрафных функций и метода наискорейшего спуска.

**1°. Первый и второй дифференциалы интегрального функционала.** Рассмотрим интегральный функционал вида

$$J(x) = \int_a^b F\big(t, x(t), x'(t)\big)\, dt. \tag{1}$$

Здесь $F(t, y, z)$ — функция трёх переменных, заданная и непрерывная на некотором открытом связном множестве $U \subset \mathbb{R}^3$. Функционал $J(x)$ определён на функциях $x = x(t)$, непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a, b]$, и таких, что параметрическая кривая

$$\Gamma(x) = \Big\{ \big(t, x(t), x'(t)\big) \ \Big|\ t \in [a, b] \Big\}$$

содержится в $U$. Множество таких функций $x$ обозначим через $\Omega^o$ и назовём *естественной областью определения* функционала $J(x)$.

В линейном пространстве $C^1[a, b]$ непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a, b]$ функций введём норму

$$\|x\|_{1,\infty} = \max_{t \in [a,b]} \big|x(t)\big| + \max_{t \in [a,b]} \big|x'(t)\big|.$$

В стандартном курсе вариационного исчисления доказывается справедливость следующих утверждений (см., например, доклад [1]).

*Семинар по конструктивному негладкому анализу и недифференцируемой оптимизации «CNSA & NDO»: `http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/`

**ТЕОРЕМА 1.** *Естественная область определения* $\Omega^o$ *функционала* $J(x)$ *открыта в* $C^1[a,b]$.

**ТЕОРЕМА 2.** *При* $F \in C^1(U)$ *интегральный функционал* $J(x)$ *дифференцируем по Фреше в каждой точке* $x_0$ *своей естественной области определения* $\Omega^o$ *и*

$$dJ(x_0;h) = \int_a^b \Big[F'_x\big(t, x_0(t), x_0'(t)\big)h(t) + F'_{x'}\big(t, x_0(t), x_0'(t)\big)h'(t)\Big]\,dt.$$

*При этом справедливо разложение*

$$J(x_0+h) = J(x_0) + dJ(x_0;h) + o(\|h\|_{1,\infty}),$$

*где* $o(\|h\|_{1,\infty})/\|h\|_{1,\infty} \to 0$ *при* $\|h\|_{1,\infty} \to 0$.

**ТЕОРЕМА 3.** *При* $F \in C^2(U)$ *функционал* $J(x)$ *дважды дифференцируем по Фреше в каждой точке* $x_0$ *своей естественной области определения* $\Omega^o$ *и*

$$d^2J(x_0;h) = \int_a^b \left[F''_{xx}h^2 + 2F''_{xx'}hh' + F''_{x'x'}(h')^2\right]dt,$$

*где*

$$F''_{xx} = F''_{xx}\big(t, x_0(t), x_0'(t)\big), \quad F''_{xx'} = F''_{xx'}\big(t, x_0(t), x_0'(t)\big),$$
$$F''_{x'x'} = F''_{x'x'}\big(t, x_0(t), x_0'(t)\big).$$

*При этом справедливо разложение*

$$J(x_0+h) = J(x_0) + dJ(x_0;h) + \tfrac{1}{2}d^2J(x_0;h) + o(\|h\|^2_{1,\infty}),$$

*где* $o(\|h\|^2_{1,\infty})/\|h\|^2_{1,\infty} \to 0$ *при* $\|h\|_{1,\infty} \to 0$.

**2°. Дифференцируемость по Фреше одного нелинейного функционала.** В книге [2] был разработан альтернативный подход к исследованию задач вариационного исчисления, основанный на применении теории точных штрафных функций. В рамках данного подхода рассматривается интегральный функционал вида

$$I(z) = \int_a^b F\Big(t, A + \int_a^t z(\tau)\,d\tau, z(t)\Big)\,dt,$$

где $A$ — константа, соответствующая граничному условию при $t = a$.

Функционал $I(z)$ получается из интегрального функционала $J(x)$ вида (1) с помощью замены $x' \to z$. Данный переход позволяет преобразовать стандартные граничные условия

$$x(a) = A, \quad x(b) = B$$

в линейное ограничение–равенство вида

$$\int_a^b z(t)\,dt = B - A,$$

которое проще учитывать при построении численных методов [3, 4]. Однако, следует отметить, что аналогичные численные методы можно построить и без перехода от функционала $J(x)$ к функционалу $I(z)$ (см., например, [5]).

В книге [2] и последующих работах по применению точных штрафных функций к задачам вариационного исчисления доказывалась лишь дифференцируемость по Гато функционала $I(z)$. В данном разделе мы покажем, что при естественных предположениях функционал $I(z)$ является дифференцируемым по Фреше, как и функционал $J(x)$.

Напомним, что $F(t, y, z)$ — функциях трёх переменных, заданная и непрерывная на некотором открытом связном множестве $U \subset \mathbb{R}^3$. Функционал $I(z)$ определён на функциях $z = z(t)$, непрерывных на отрезке $[a, b]$, и таких, что параметрическая кривая

$$\Gamma_0(z) = \left\{ \Big( t, A + \int_a^t z(\tau)\,d\tau, z(t) \Big) \;\Big|\; t \in [a, b] \right\}$$

содержится в $U$. Множество таких функций $z$ обозначим через $Z^o$ и назовём *естественной областью определения* функционала $I(z)$. Отметим, что если функции $x$ и $z$ связаны соотношением $x(t) = A + \int_a^t z(\tau)\,d\tau$, то $\Gamma(x) = \Gamma_0(z)$.

В линейном пространстве $C[a, b]$ непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций введём норму

$$\|z\|_\infty = \max_{t \in [a,b]} \big|z(t)\big|.$$

Определим также линейный интегральный оператор

$$\big(Tz\big)(t) = \int_a^t z(\tau)\,d\tau.$$

Нам потребуется следующее вспомогательное утверждение.

**ЛЕММА 1.** *Оператор $T$ является линейным непрерывным оператором из $C[a, b]$ в $C^1[a, b]$. При этом $\|T\| \leqslant (b - a + 1)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ясно, что для любого $z \in C[a,b]$ будет $Tz \in C^1[a,b]$. Поскольку

$$\|Tz\|_{1,\infty} = \max_{t\in[a,b]} \Big| \int_a^t z(\tau)\,d\tau \Big| + \max_{t\in[a,b]} \big|z(t)\big| \leqslant (b-a+1)\|z\|_\infty,$$

то оператор $T$ непрерывен и $\|T\| \leqslant (b-a+1)$. □

Покажем, что естественная область определения функционала $I(z)$ открыта в $C[a,b]$. Для этого зафиксируем функцию $z_0 \in Z^o$ и докажем, что найдётся $\delta > 0$ такое, что $z_0 + h \in Z^o$ для любого $h \in C[a,b]$, удовлетворяющего неравенству $\|h\|_\infty < \delta$.

Определим $x_0(t) = A + \int_a^t z_0(\tau)\,d\tau$. Как было отмечено выше, $\Gamma(x_0) = \Gamma_0(z_0)$. Поэтому $x_0 \in \Omega^o$. Следовательно, по теореме 1 найдётся $r > 0$ такое, что для любого $\eta \in C^1[a,b]$, удовлетворяющего неравенству $\|\eta\|_{1,\infty} < r$, будет $x_0 + \eta \in \Omega^o$.

Положим $\delta = r/(b-a+1)$. Тогда для любой функции $h \in C[a,b]$ такой, что $\|h\|_\infty < \delta$ будет $\|Th\|_{1,\infty} < r$ и $x_0 + Th \in \Omega^o$, то есть $\Gamma(x_0 + Th) \subset U$. Заметим, что $\Gamma_0(z_0 + h) = \Gamma(x_0 + Th)$. Поэтому $z_0 + h \in Z^o$. Значит, множество $Z^o$ открыто в $C[a,b]$.

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

**ТЕОРЕМА 4.** *Естественная область определения $Z^o$ функционала $I(z)$ открыта в $C[a,b]$.*

Докажем теперь дифференцируемость по Фреше функционала $I(z)$.

**ТЕОРЕМА 5.** *При $F \in C^1(U)$ интегральный функционал $I(z)$ дифференцируем по Фреше в каждой точке $z_0$ своей естественной области определения $Z^o$ и*

$$dI(z_0;h) = \int_a^b Q(z_0,t)h(t)\,dt,$$

*где*

$$Q(z,t) = \int_t^b F'_x\Big(\tau, A + \int_a^\tau z(\xi)\,d\xi, z(\tau)\Big)\,d\tau + F'_{x'}\Big(t, A + \int_a^t z(\tau)\,d\tau, z(t)\Big).$$

*При этом справедливо разложение*

$$I(z_0 + h) = I(z_0) + dI(z_0;h) + o(\|h\|_\infty),$$

*где $o(\|h\|_\infty)/\|h\|_\infty \to 0$ при $\|h\|_\infty \to 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем функцию $z_0 \in Z^o$ и положим

$$x_0(t) = A + \int_a^t z_0(\tau)\,d\tau.$$

Выберем произвольное $\varepsilon > 0$. По теореме 2 существует $\delta > 0$ такое, что для любого $v \in C^1[a, b]$, удовлетворяющего неравенству $0 < \|v\|_{1,\infty} < \delta$, будет

$$\frac{1}{\|v\|_{1,\infty}}\Big|J(x_0 + v) - J(x_0) - dJ(x_0; v)\Big| < \varepsilon.$$

Поэтому для любого $h \in C[a, b]$ такого, что $0 < \|h\|_\infty < \delta/(b - a + 1)$, справедливо неравенство

$$\frac{1}{\|Th\|_{1,\infty}}\Big|J(x_0 + Th) - J(x_0) - dJ(x_0; Th)\Big| < \varepsilon.$$

Отсюда, учитывая, что $\|Th\|_{1,\infty} \geqslant \|h\|_\infty$ и $J(x_0 + Th) = I(z_0 + h)$, получаем, что

$$\frac{1}{\|h\|_\infty}\Big|I(z_0 + h) - I(z_0) - dJ(x_0; Th)\Big| < \varepsilon,$$

для любого $h \in C[a, b]$, удовлетворяющего неравенству $0 < \|h\|_\infty < \delta/(b-a+1)$. Таким образом, справедливо разложение

$$I(z_0 + h) = I(z_0) + dJ(x_0; Th) + o(\|h\|_\infty),$$

где $o(\|h\|_\infty)/\|h\|_\infty \to 0$ при $\|h\|_\infty \to 0$.

По теореме 2 имеем

$$dJ(x_0; Th) = \int_a^b \Big[F'_x\big(t, x_0(t), x'_0(t)\big) \cdot \int_a^t h(\tau)d\tau + F'_{x'}\big(t, x_0(t), x'_0(t)\big)h(t)\Big]\, dt. \quad (2)$$

Проинтегрируем первое слагаемое по частям. Обозначим

$$u(t) = \int_t^b F'_x\big(\tau, x_0(\tau), x'_0(\tau)\big)d\tau.$$

Тогда

$$\int_a^b \Big[F'_x\big(t, x_0(t), x'_0(t)\big) \cdot \int_a^t h(\tau)d\tau\Big]\, dt = \int_a^b \Big[\big(-u'(t)\big) \cdot \int_a^t h(\tau)d\tau\Big]\, dt =$$
$$= \Big(\big(-u(t)\big) \cdot \int_a^t h(\tau)d\tau\Big)\Big|_a^b + \int_a^b u(t)h(t)\, dt = \int_a^b u(t)h(t)\, dt.$$

Теперь формула (2) принимает вид

$$dJ(x_0; Th) = \int_a^b \left[\int_t^b F'_x\big(\tau, x_0(\tau), x'_0(\tau)\big)d\tau + F'_{x'}\big(t, x_0(t), x'_0(t)\big)\right]h(t)\, dt =$$
$$= \int_a^b Q(z_0, t)h(t)\, dt =: dI(z_0; h),$$

что и требовалось доказать. □

Рассуждая аналогичным образом и используя теорему 3, нетрудно проверить, что справедливо следующее утверждение.

**ТЕОРЕМА 6.** *При $F \in C^2(U)$ функционал $I(z)$ дважды дифференцируем по Фреше в каждой точке $z_0$ своей естественной области определения $Z^o$ и*

$$d^2I(z_0;h) = d^2J(x_0;Th) = \int_a^b \left[F''_{xx}(Th)^2 + 2F''_{xx'}(Th)h + F''_{x'x'}h^2\right] dt,$$

*где*

$$F''_{xx} = F''_{xx}\big(t, x_0(t), z_0(t)\big), \quad F''_{xx'} = F''_{xx'}\big(t, x_0(t), z_0(t)\big),$$
$$F''_{x'x'} = F''_{x'x'}\big(t, x_0(t), z_0(t)\big)$$

*и $x_0(t) = A + Tz_0$. При этом справедливо разложение*

$$I(z_0 + h) = I(z_0) + dI(z_0;h) + \tfrac{1}{2}d^2I(z_0;h) + o(\|h\|_\infty^2),$$

*где $o(\|h\|_\infty^2)/\|h\|_\infty^2 \to 0$ при $\|h\|_\infty \to 0$.*

## ЛИТЕРАТУРА


1. Малозёмов В.Н. *Первый и второй дифференциалы интегрального функционала* [Электронный ресурс] // Семинар «DHA & CAGD» [Офиц. сайт]. Избранные доклады. 5.12.2013. URL: `http://dha.spb.ru/PDF/diffIntFunc.pdf` (дата обращения: 3.03.2016).

2. Демьянов В.Ф. *Условия экстремума и вариационное исчисление.* М.: Высш. шк., 2004. 335 с.

3. Тамасян Г.Ш. *Гиподифференциальный спуск в вариационных задачах* [Электронный ресурс] // Семинар «CNSA & NDO» [Офиц. сайт]. Избранные доклады. 25.09.2014. URL: `http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/pdf/2014/Gipodiff_Descent_In_Variational_Problems.pdf` (дата обращения: 3.03.2016).

4. Малозёмов В.Н., Тамасян Г.Ш. *Об одной кубической вариационной задаче* [Электронный ресурс] // Семинар «CNSA & NDO» [Офиц. сайт]. Избранные доклады. 11.02.2016. URL: `http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/pdf/2016/Cub_VarProblem_11feb2016.pdf` (дата обращения: 3.03.2016).

5. Поляк Б.Т. *Градиентные методы минимизации функционалов* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1963, том 3, № 4, С. 643–653.