НАИЛУЧШЕЕ ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИИ НА ОТРЕЗКЕ*

М. А. Кольцов

kolmax94@gmail.com

24 ноября 2016 г.

1°. Постановка задачи. Часто значение какой-либо функции известно лишь в заданных точках с некоторой точностью. То есть, вместо самой функции известна лишь таблица её значений на сетке. Например, раньше широко применялись таблицы тригонометрических функций, таблицы логарифмов. В статистике особенно важны и до сих пор используются таблицы функций нескольких стандартных распределений.

Естественным образом возникает желание заменить большую таблицу каким-либо более кратким представлением функции, дающим, тем не менее, такую же точность приближения. Одним из способов добиться этого являются наилучшие дробно-рациональные приближения.

Будем рассматривать приближающие функции $H : [a, b] \to \mathbb{R}$ вида

$$H(x, y, t) = \frac{C(x, t)}{D(y, t)} = \frac{\sum_{i=0}^{n} x[i]u_i(t)}{\sum_{j=0}^{m} y[j]v_j(t)}.$$

где u_i и v_j — два набора базисных функций. Среди функций $H(x, y, t)$ будем искать наилучшее приближение к непрерывной функции $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ в смысле C-нормы на $[a, b]$. Следовательно, требуется решить задачу минимизации

$$\eta(x, y) := \max_{t\in[a,b]} \big|H(x, y, t) - f(t)\big| \to \inf_{x,y}.$$

Введём ограничения

$$\begin{aligned} &\|y\|_\infty = 1 \\ &D(y, t) > 0 \text{ на } [a, b]. \end{aligned} \tag{1}$$

*Семинар по конструктивному негладкому анализу и недифференцируемой оптимизации «CNSA & NDO»: `http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/`

2°. Метод дифференциальной коррекции. Выберем на отрезке $[a,b]$ сетку $T = \{t_0, t_1, \ldots, t_q\}$, в узлах которой значение функции $f(t)$ известно (например, из таблицы). Задачу (1) на множестве T будем решать с помощью итерационного процесса, который называется методом дифференциальной коррекции (см. [1, стр. 144]).

Пусть на шаге k имеется план $\{x_k, y_k\}$, удовлетворяющий условиям (1), и пусть $\eta_k = \eta(x_k, y_k)$. Рассмотрим вспомогательную задачу

$$\Delta_k(x,y) := \max_{t\in T} \frac{\bigl|C(x,t) - f(t)D(y,t)\bigr| - \eta_k D(y,t)}{D(y_k,t)} \to \inf_{x,y} \tag{2}$$

при единственном ограничении

$$\|y\|_\infty = 1.$$

Обозначим через $\{x_k^*, y_k^*\}$ решение этой вспомогательной задачи. Возможны два случая:

1) $\Delta_k(x_k^*, y_k^*) = 0$. Тогда пара x_k, y_k является решением исходной задачи;

2) $\Delta_k(x_k^*, y_k^*) < 0$. Положим $x_{k+1} = x_k^*, y_{k+1} = y_k^*$ и перейдём к следующему шагу.

Задача (2) эквивалентна задаче линейного программирования

$$\begin{aligned} w &\to \inf \\ D(y_k,t_i)w + C(x,t_i) + \bigl(\eta_k - f(t_i)\bigr)D(y,t_i) &\geqslant 0, \quad i \in 0:q; \\ D(y_k,t_i)w - C(x,t_i) + \bigl(\eta_k - f(t_i)\bigr)D(y,t_i) &\geqslant 0, \quad i \in 0:q; \\ -1 \leqslant y[j] &\leqslant 1, \quad j \in 0:m. \end{aligned}$$

Значит, нахождение наилучшего дробно-рационального приближения на сетке сводится к решению последовательности задач линейного программирования.

На практике вычисления останавливаются, когда $|\Delta_k(x_k, y_k)| < \varepsilon$, где ε — заданная точность. Полученная на последнем шаге дробь $H(x_k, y_k, t)$ будет хорошим приближением для $f(t)$ *в точках множества* T.

Если есть возможность вычислять значения функции f и её производной в произвольных точках отрезка $[a,b]$, и если дробь наилучшего приближения обладает полным альтернансом, то можно воспользоваться методом выравнивания максимумов (см. [2]) и получить решение задачи наилучшего приближения на всём отрезке.

В случае приближения алгебраическими дробями, то есть при $u_i(t) = t^i$, $v_j(t) = t^j$, полный альтернанс состоит из $n + m + 2$ точек. Это означает, что на отрезке $[a,b]$ существуют $n + m + 2$ точки, в которых разность $r(t) = H(x,y,t) - f(t)$, где $H(x,y,t)$ — дробь наилучшего приближения, достигает своего наибольшего по модулю значения с чередующимися знаками.

Такое условие можно записать как систему нелинейных уравнений

$$H(x, y, t_i) - f(t_i) = \varepsilon(-1)^i \eta, \quad i \in 0 : n + m + 1$$
$$H'(x, y, t_i) - f'(t_i) = 0, \quad i \in 0 : n + m + 1 \text{ и } t_i \neq a, t_i \neq b.$$

Переменными здесь являются векторы x, y, точки альтернанса t_i и максимальное уклонение $\eta = \eta(x, y)$. Константа $\varepsilon = \pm 1$ задаёт порядок чередования знаков. В качестве начального приближения для решения такой системы удобно взять решение, полученное методом дифференциальной коррекции на сетке T.

3°. Практическое испытание метода. Комбинация метода дифференциальной коррекции и метода выравнивания максимумов была реализована в виде программы в среде MATLAB. В качестве примера используем эту программу для приближения с помощью алгебраических дробей достаточно простой функции — экспоненты — на отрезке $[0, 1]$.

На этом отрезке введём сетку из $n + m + 2$ точек вида $t_i = \frac{i}{n+m+1}$, $i \in 0 : n + m + 1$, и запустим метод дифференциальной коррекции. По поводу мотивации выбора сетки из $n + m + 2$ точек см. [3].

После завершения работы метода дифференциальной коррекции вычислялись значения функции $r(t) = H(x_k, y_k, t) - f(t)$ на мелкой сетке (из $3(n + m + 2) + 5$ точек). Находились аргументы последовательных локальных экстремумов, которые в дальнейшем использовались как начальное приближение для альтернанса в методе выравнивания максимумов.

При $n = m = 2$ метод дифференциальной коррекции даёт точность приближения $9.6 \cdot 10^{-6}$, которая с помощью выравнивания максимумов улучшается до $4.5 \cdot 10^{-6}$ (рис. 1). Само приближение выглядит как

$$e^t \approx \frac{1.0000045 + 0.5431055t + 0.1090284t^2}{1 - 0.4567100t + 0.0644987t^2}.$$

Таким образом, информация об экспоненте на отрезке $[0, 1]$ с точностью до пяти верных знаков после запятой сохранена в пяти коэффициентах дроби.

Приведём также точки альтернанса этого приближения:

$$0, \quad 0.1144887, \quad 0.3921377, \quad 0.6978404, \quad 0.9201618, \quad 1.$$

Кроме экспоненты, была также приближена функция стандартного нормального распределения

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-x^2/2} \mathrm{d}x.$$

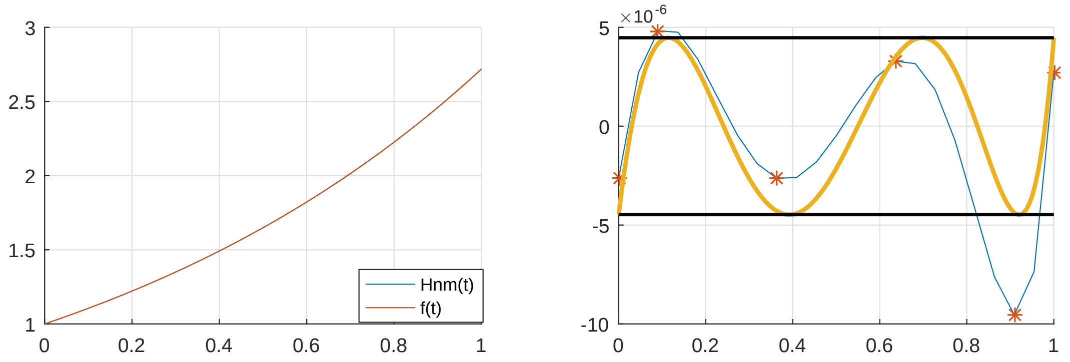

Рис. 1. Приближение e^t с $n = m = 2$

Вычисление значения функции $\Phi(t)$ часто требуется при решении задач статистики и обычно для этого используются таблицы. Попробуем подобрать для этой функции дробно-рациональное представление, которое существенно сокращает объём информации.

Обе функции $\Phi(t)$ и $\Phi'(t)$ содержатся в стандартной библиотеке Matlab, так что можно считать, что их значения известны в каждой точке. Рассматривался отрезок $[-3, 3]$. Снова использовалась сетка из $n + m + 2$ точек с последующим поиском приближения альтернанса на более мелкой.

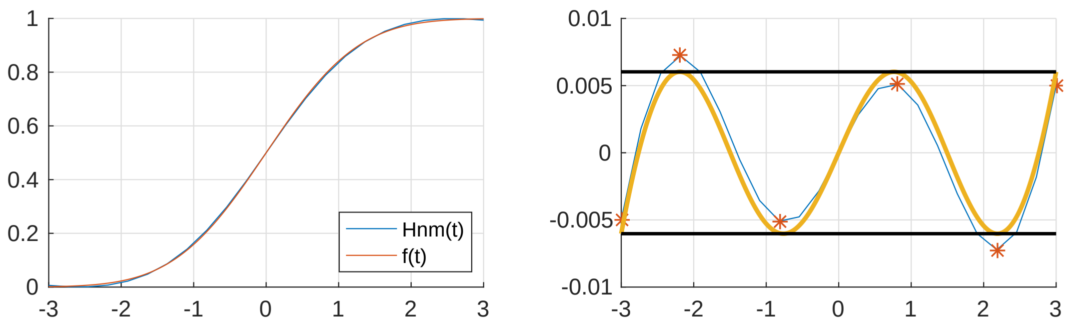

Рис. 2. Приближение с $n = m = 2$

В случае $n = m = 2$ метод дифференциальной коррекции даёт погрешность $7.2 \cdot 10^{-3}$, последующее применение метода выравнивания максимумов улучшает её до $6 \cdot 10^{-3}$ (см. рис. 2). Такое незначительное изменение объясняется тем, что начальное приближение уже почти имеет полный альтернанс. Аналогичная ситуация наблюдается и при $n = m = 3$ и 5. В этих трёх случаях выполняется 7, 8 и 9 шагов дифференциальной коррекции соответственно.

Приведём приближение при $n = m = 5$:

$$\Phi(t) \approx \frac{0.5 + 0.398801t + 0.155246t^2 + 0.057937t^3 + 0.016557t^4 + 0.001930t^5}{1 + 0.310491t^2 + 0.033115t^4}.$$

Точность этого приближения равна $4.7 \cdot 10^{-5}$. Точки альтернанса выглядят как

$$-3, \quad -2.776541, \quad -2.236893, \quad -1.589832, \quad -0.940818, \quad -0.310817$$
$$0.310818, \quad 0.940819, \quad 1.589832, \quad 2.236893, \quad 2.776541, \quad 3.$$

Метод также успешно работает при неравных n и m. На рис. 3 приведён пример приближения с $n = 5$, $m = 8$.

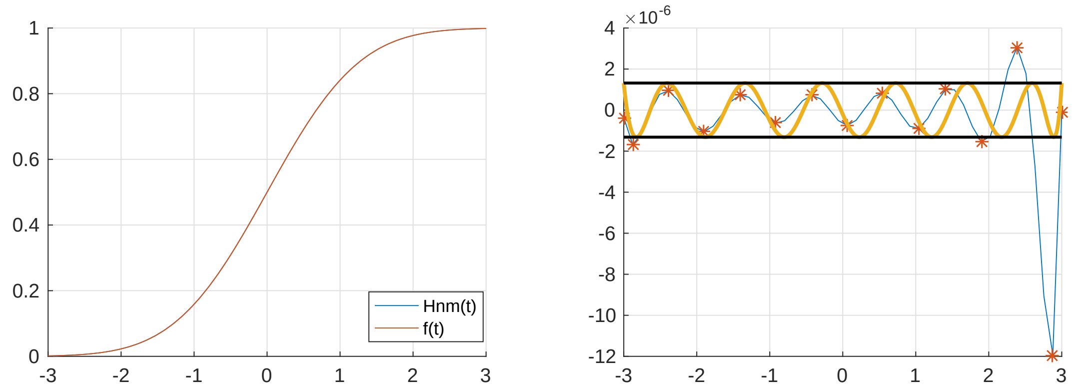

Рис. 3. Приближение с $n = 5$, $m = 8$

ЛИТЕРАТУРА

1. Гавурин М. К., Малозёмов В. Н. *Экстремальные задачи с линейными ограничениями.* Л.: Изд-во ЛГУ, 1984. 176 с.

2. Малоземов В. Н., Соломенников А. В. *Скорость сходимости метода выравнивания максимумов* // Журн. вычисл. мат. и матем. физ. 1978. Т. 18. № 5. С. 1309-1312.

3. Гхашим М. М., Малозёмов В. Н. *Теорема Хелли для конусов и двойственность в задачах наилучшего дробно-рационального приближения* // Семинар «CNSA & NDO». Избранные доклады. 22 сентября 2016 г. (`http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/reps16.shtml#0922`)