МАТРИЧНЫЕ ИГРЫ И ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ*

В. Н. Малозёмов
malv@math.spbu.ru

14 апреля 2016 г.

Аннотация. В докладе матричные игры анализируются с точки зрения линейного программирования. Приведены два нестандартных примера.

1°. Пусть задана квадратная или прямоугольная матрица $A = A[M, N]$ с вещественными элементами. Назовём её *матрицей платежей* (или *матрицей выигрышей*). Имеются два игрока, первый — *строчный* и второй — *столбцовый*.

Партия матричной игры заключается в следующем. Первый игрок произвольным образом выбирает индекс строки $i \in M$, второй игрок независимо выбирает индекс столбца $j \in N$. Число $A[i, j]$ есть величина выигрыша — такую сумму второй игрок выплачивает первому[1]. Матричная игра состоит из бесконечного числа таких партий.

В этой бесконечной серии каждый игрок должен выбрать свою *стратегию*. Стратегией первого игрока является вектор $p = p[M]$, компоненты которого удовлетворяют условиям

$$p[i] \geqslant 0 \quad \text{при всех} \quad i \in M; \quad \sum_{i \in M} p[i] = 1. \tag{1}$$

Здесь $p[i]$ — вероятность (частота) выбора i-й строки. Орты $e_i = e_i[M]$, $i \in M$, называются *чистыми стратегиями*. Остальные стратегии называются *смешанными*. Всё множество стратегий первого игрока обозначим $\mathcal{P}$.

---

*Семинар по конструктивному негладкому анализу и недифференцируемой оптимизации «CNSA & NDO»: `http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/`

[1]Строго говоря, величина выигрыша равна $\big|A[i, j]\big|$. Если $A[i, j] > 0$, то второй игрок платит первому сумму $A[i, j]$, если $A[i, j] < 0$, то первый игрок платит втором сумму $-A[i, j]$. При $A[i, j] = 0$ партия является ничейной. Во всех случаях первый игрок заинтересован в том, чтобы величина $A[i, j]$ была возможно большей, а второй игрок заинтересован в том, чтобы эта величина была возможно меньшей.

Аналогично стратегией второго игрока является вектор $q = q[N]$, компоненты которого удовлетворяют условиям

$$q[j] \geqslant 0 \quad \text{при всех} \quad j \in N; \quad \sum_{j \in N} q[j] = 1. \tag{2}$$

Орты $\hat{e}_j = \hat{e}_j[N]$, $j \in N$, называются *чистыми стратегиями.* Остальные стратегии называются *смешанными.* Всё множество стратегий второго игрока обозначим $\mathcal{Q}$.

В зависимости от стратегий игроков определяется средняя величина выигрыша в каждой партии:

$$a(p, q) = p[M] \times A[M, N] \times q[N]. \tag{3}$$

Допустим, что первый игрок выбрал стратегию p. Тогда его гарантированный выигрыш равен величине

$$\varphi(p) = \min_{q \in \mathcal{Q}} a(p, q). \tag{4}$$

Оптимальной естественно назвать ту стратегию p_*, на которой

$$\varphi(p_*) = \max_{p \in \mathcal{P}} \varphi(p). \tag{5}$$

Аналогично, если второй игрок выбрал стратегию q, то максимально возможный его «проигрыш» равен величине

$$\psi(q) = \max_{p \in \mathcal{P}} a(p, q). \tag{6}$$

Оптимальной естественно назвать ту стратегию q_*, на которой

$$\psi(q_*) = \min_{q \in \mathcal{Q}} \psi(q). \tag{7}$$

Справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1 (фон Нейман)**.** *Оптимальные стратегии игроков существуют. Для того чтобы пара стратегий p_*, q_* была оптимальной необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство*

$$\varphi(p_*) = \psi(q_*). \tag{8}$$

2°. Для доказательства теоремы фон Неймана потребуется некоторая подготовка.

ЛЕММА. *Справедливы формулы*

$$\min_{q\in\mathcal{Q}}\langle c,q\rangle = \min_{j\in N} c[j], \tag{9}$$

$$\max_{p\in\mathcal{P}}\langle d,p\rangle = \max_{i\in M} d[i]. \tag{10}$$

Доказательство. Проверим, например, первое равенство. Обозначим

$$\alpha = \min_{j\in N} c[j], \quad J = \big\{ j\in N \mid c[j]=\alpha \big\}.$$

При всех $q\in\mathcal{Q}$ имеем

$$\langle c,q\rangle - \alpha = \sum_{j\in N}\big(c[j]-\alpha\big)\times q[j] = \sum_{j\in N\setminus J}\big(c[j]-\alpha\big)\times q[j] \geqslant 0,$$

то есть $\langle c,q\rangle \geqslant \alpha$. Равенство достигается, когда $q[j]=0$ при всех $j\in N\setminus J$. Формула (9) установлена.

Аналогично проверяется формула (10). $\square$

На основании соотношений (4), (3) и (9) функция $\varphi(p)$ допускает представление

$$\begin{aligned}\varphi(p) &= \min_{q\in\mathcal{Q}}\big(p[M]\times A[M,N]\big)\times q[N] = \\ &= \min_{j\in N} p[M]\times A[M,j].\end{aligned} \tag{11}$$

На основании соотношений (6), (3) и (10) функция $\psi(q)$ допускает представление

$$\begin{aligned}\psi(q) &= \max_{p\in\mathcal{P}} p[M]\times\big(A[M,N]\times q[N]\big) = \\ &= \max_{i\in M} A[i,N]\times q[N].\end{aligned} \tag{12}$$

3°. Согласно (5) и (11), (7) и (12) оптимальные стратегии первого и второго игроков определяются как решения следующих экстремальных задач:

$$\varphi(p) := \min_{j\in N} p[M]\times A[M,j] \to \max_{p\in\mathcal{P}}, \tag{13}$$

$$\psi(q) := \max_{i\in M} A[i,N]\times q[N] \to \min_{q\in\mathcal{Q}}. \tag{14}$$

Задача (13) эквивалентна задаче линейного программирования (см. [1, с. 11–13])

$$\begin{aligned} &s \to \max, \\ -p[M]\times A[M,j] + s &\leqslant 0, \quad j\in N; \\ \sum_{i\in M} p[i] &= 1; \\ p[i] &\geqslant 0, \quad i\in M. \end{aligned} \tag{15}$$

При доказательстве эквивалентности плану p задачи (13) сопоставляется план (p, s) задачи (15), где

$$s = \min_{j \in N} p[M] \times A[M, j] = \varphi(p). \tag{16}$$

Далее, задача (14) также эквивалентна задаче линейного программирования

$$\begin{gathered} t \to \min, \\ -A[i, N] \times q[N] + t \geqslant 0, \quad i \in M; \\ \sum_{j \in N} q[j] \qquad = 1; \\ q[j] \geqslant 0, \quad j \in N. \end{gathered} \tag{17}$$

При доказательстве эквивалентности плану q задачи (14) сопоставляется план (q, t) задачи (17), где

$$t = \max_{i \in M} A[i, N] \times q[N] = \psi(q). \tag{18}$$

Матрица ограничений задачи (17) имеет вид

$$\begin{bmatrix} & & & 1 \\ & -A[M, N] & & \vdots \\ & & & 1 \\ 1 & \ldots\ldots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Принципиальный факт заключается в том, что задачи линейного программирования (17) и (15) — двойственные! Это проверяется непосредственно.

Множества планов задач (17) и (15) непусты (по любому $q \in \mathcal{Q}$ легко подбирается подходящее t и по любому $p \in \mathcal{P}$ легко подбирается подходящее s). Значит, обе задачи имеют оптимальные планы (q_*, t_*) и (p_*, s_*). По эквивалентности, q_* и p_* — оптимальные планы задач (14) и (13) соответственно. Тем самым, установлено существование оптимальных стратегий у обоих игроков. Чтобы найти эти стратегии, нужно решить пару двойственных задач линейного программирования.

Покажем, что критерием оптимальности является равенство (8). Если p_*, q_* — оптимальные стратегии, то по эквивалентности (p_*, s_*) и (q_*, t_*) — оптимальные планы двойственных задач (15) и (17). Здесь, согласно (16) и (18), $s_* = \varphi(p_*)$, $t_* = \psi(q_*)$. По первой теореме двойственности $s_* = t_*$, что равносильно (8).

Наоборот, пусть для некоторых стратегий $p_* \in \mathcal{P}$, $q_* \in \mathcal{Q}$ выполнено равенство (8). Для планов (p_*, s_*), (q_*, t_*) задач (15), (17) при $s_* = \varphi(p_*)$, $t_* = \psi(q_*)$ имеет место равенство $s_* = t_*$. Значит, эти планы — оптимальные. По эквивалентности p_* и q_* — оптимальные стратегии первого и второго игроков.

Теорема доказана. $\square$

Замечание 1. В силу (11) и (12) критерий оптимальности (8) можно переписать в виде

$$\min_{j\in N} p_*[M] \times A[M,j] = \max_{i\in M} A[i,N] \times q_*[N]. \tag{19}$$

Замечание 2. Критерий оптимальности (8) допускает ещё одну эквивалентную формулировку (в теории матричных игр она считается основной): для того чтобы пара стратегий p_*, q_* была оптимальной, необходимо и достаточно, чтобы при всех $p \in \mathcal{P}$ и всех $q \in \mathcal{Q}$ выполнялись неравенства

$$a(p,q_*) \leqslant a(p_*,q_*) \leqslant a(p_*,q). \tag{20}$$

Докажем это утверждение. Если p_*, q_* — оптимальные стратегии, то согласно (8) имеем

$$a(p_*,q_*) \leqslant \max_{p\in\mathcal{P}} a(p,q_*) = \psi(q_*) = \varphi(p_*) =$$
$$= \min_{q\in\mathcal{Q}} a(p_*,q) \leqslant a(p_*,q_*).$$

Отсюда следует, что

$$\max_{p\in\mathcal{P}} a(p,q_*) = a(p_*,q_*) = \min_{q\in\mathcal{Q}} a(p_*,q). \tag{21}$$

Это равносильно неравенствам (20).

Наоборот, пусть выполнены неравенства (20). Тогда справедливы соотношения (21). Их можно переписать в виде

$$\psi(q_*) = a(p_*,q_*) = \varphi(p_*).$$

В частности, $\varphi(p_*) = \psi(q_*)$. Утверждение доказано.

Величина $a(p_*,q_*)$ называется *ценой игры*.

Неравенства (20) характеризуют пару оптимальных стратегий p_*, q_* как *ситуацию равновесия*.

Замечание 3. Согласно (5) и (4)

$$\varphi(p_*) = \max_{p\in\mathcal{P}} \min_{q\in\mathcal{Q}} a(p,q).$$

Согласно (7) и (6)

$$\psi(q_*) = \min_{q\in\mathcal{Q}} \max_{p\in\mathcal{P}} a(p,q).$$

Пусть $A = A[M,N]$ — произвольная матрица. По теореме 1 существуют векторы p_* и q_*, такие что $\varphi(p_*) = \psi(q_*)$. Это значит, что для любой матрицы A выполняется равенство

$$\max_{p\in\mathcal{P}} \min_{q\in\mathcal{Q}} a(p,q) = \min_{q\in\mathcal{Q}} \max_{p\in\mathcal{P}} a(p,q).$$

В этой связи теорему фон Неймана часто называют *теоремой о минимаксе*.

4°. Выясним, когда ситуацию равновесия образует пара чистых стратегий.

ТЕОРЕМА 2. *Для того чтобы матричная игра с матрицей выигрышей $A = A[M, N]$ имела ситуацию равновесия в чистых стратегиях, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство*

$$\max_{i\in M}\min_{j\in N} A[i,j] = \min_{j\in N}\max_{i\in M} A[i,j]. \tag{22}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $p_* = e_{i_0}[M]$ и $q_* = \hat{e}_{j_0}[N]$ — оптимальные чистые стратегии. Согласно критерию оптимальности в форме (19) имеем

$$\min_{j\in N} A[i_0, j] = \max_{i\in M} A[i, j_0]. \tag{23}$$

С учётом равенства (23) при всех $i \in M$ получаем

$$\min_{j\in N} A[i,j] \leqslant A[i, j_0] \leqslant \max_{i'\in M} A[i', j_0] = \min_{j\in N} A[i_0, j].$$

Это значит, что

$$\max_{i\in M}\min_{j\in N} A[i,j] = \min_{j\in N} A[i_0, j]. \tag{24}$$

Аналогично при всех $j \in N$

$$\max_{i\in M} A[i,j] \geqslant A[i_0, j] \geqslant \min_{j'\in N} A[i_0, j'] = \max_{i\in M} A[i, j_0].$$

Это значит, что

$$\min_{j\in N}\max_{i\in M} A[i,j] = \max_{i\in M} A[i, j_0]. \tag{25}$$

На основании (24), (25) и (23) приходим к (22).

Достаточность. Обозначим через i_0 и j_0 внешние индексы, на которых достигается максимум и минимум в равенстве (22). Тогда

$$\min_{j\in N} A[i_0, j] = \max_{i\in M} A[i, j_0].$$

Перепишем это равенство в виде

$$\min_{j\in N} e_{i_0}[M] \times A[M, j] = \max_{i\in M} A[i, N] \times \hat{e}_{j_0}[N].$$

По критерию оптимальности в форме (19) чистые стратегии $p_* = e_{i_0}[M]$ и $q_* = \hat{e}_{j_0}[N]$ образуют ситуацию равновесия.

Теорема доказана. $\square$

5°. Обратимся к примерам.

ПРИМЕР 1. В качестве матрицы выигрышей рассмотрим квадратную матрицу второго порядка с параметром c:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & c \end{pmatrix}.$$

Построим график цены игры как функции параметра c.

Параметр c имеет два критических значения $c = -1$ и $c = 0$. Возможны три случая.

1) $c \leqslant -1$. Имеем

$$\max_i \min_j A[i,j] = \max\{-1, c\} = -1,$$
$$\min_j \max_i A[i,j] = \min\{1, -1\} = -1.$$

Если цену игры обозначить через $f(c)$, то по теореме 2 получаем

$$f(c) = -1 \quad \text{при} \quad c \leqslant -1. \tag{26}$$

2) $c \in (-1, 0]$. Имеем

$$\max_i \min_j A[i,j] = \max\{-1, c\} = c,$$
$$\min_j \max_i A[i,j] = \min\{1, c\} = c.$$

По теореме 2

$$f(c) = c \quad \text{при} \quad c \in (-1, 0]. \tag{27}$$

3) $c > 0$. Имеем

$$\max_i \min_j A[i,j] = \max\{-1, 0\} = 0,$$
$$\min_j \max_i A[i,j] = \min\{1, c\} > 0.$$

Равенство (22) нарушается. Будем искать решение в смешанных стратегиях.

Запишем задачи линейного программирования для второго и первого игроков:

$$\begin{array}{lcl}
\qquad t \to \min & \qquad & \qquad s \to \max \\
-q_1 + q_2 + t \geqslant 0 & & -p_1 \qquad + s \leqslant 0 \\
\qquad - c\,q_2 + t \geqslant 0 & & p_1 - c\,p_2 + s \leqslant 0 \\
q_1 + q_2 \qquad = 1 & & p_1 + p_2 \qquad = 1 \\
q_1 \geqslant 0,\ q_2 \geqslant 0, & & p_1 \geqslant 0,\ p_2 \geqslant 0.
\end{array} \tag{28}$$

Поскольку мы ищем решение в смешанных стратегиях, то можно воспользоваться условиями дополнительности

$$\begin{aligned} -q_1 + \ q_2 + t &= 0, \qquad & -p_1 \qquad + s &= 0,\\ -c\,q_2 + t &= 0, & p_1 - c\,p_2 + s &= 0. \end{aligned}$$

К этому следует добавить равенства

$$q_1 + \ q_2 \quad = 1, \qquad\qquad p_1 + \ p_2 \quad = 1.$$

Полученные системы линейных уравнений третьего порядка имеют единственные решения

$$\begin{aligned} q_* &= \Big(\frac{1+c}{2+c},\ \frac{1}{2+c}\Big), \quad t_* = \frac{c}{2+c};\\ p_* &= \Big(\frac{c}{2+c},\ \frac{2}{2+c}\Big), \quad s_* = \frac{c}{2+c}. \end{aligned}$$

Векторы (q_*, t_*) и (p_*, s_*) являются планами двойственных задач линейного программирования (28), причём значения целевых функций на этих планах равны между собой,

$$t_* = s_* = \frac{c}{2+c}.$$

Указанные свойства гарантируют оптимальность векторов (q_*, t_*) и (p_*, s_*) и, как следствие, оптимальность стратегий q_* и p_*. При этом

$$f(c) = \frac{c}{2+c} \quad \text{при} \quad c > 0. \tag{29}$$

Объединяя формулы (26), (27), (29), приходим к окончательному результату (см. рис.)

$$f(c) = \begin{cases} -1 & \text{при} \quad c \leqslant -1,\\ c & \text{при} \quad c \in (-1, 0),\\ \frac{c}{2+c} & \text{при} \quad c > 0. \end{cases}$$

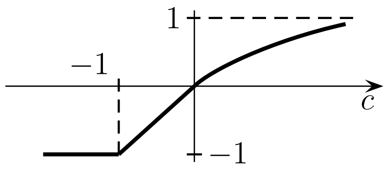

Рис. График цены игры как функции параметра c

Отметим, что

$$f'(-0) = 1, \quad f'(+0) = \frac{1}{2}.$$

ПРИМЕР 2. Найдём все квадратные матрицы второго порядка, которые порождают матричную игру со следующими свойствами:

1) цена игры равна нулю;

2) оптимальными стратегиями игроков являются векторы

$$p_* = \left(\frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right), \quad q_* = \left(\frac{1}{4},\ \frac{3}{4}\right).$$

Запишем матрицу выигрышей в общем виде

$$A = \begin{pmatrix} c & d \\ g & h \end{pmatrix}.$$

Ей соответствуют две задачи линейного программирования

$$\begin{aligned} & t \to \inf \\ -c\,q_1 - d\,q_2 + t &\geqslant 0 \\ -g\,q_1 - h\,q_2 + t &\geqslant 0 \\ q_1 + \quad q_2 \quad &= 1 \\ q_1 \geqslant 0,\ q_2 &\geqslant 0, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} & s \to \sup \\ -\,c\,p_1 - g\,p_2 + s &\leqslant 0 \\ -\,d\,p_1 - h\,p_2 + s &\leqslant 0 \\ p_1 + \quad p_2 \quad &= 1 \\ p_1 \geqslant 0,\ p_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

Оптимальные планы q_*, p_* этих задач известны. Известны и экстремальные значения целевых функций $t_* = s_* = 0$. В силу условий дополнительности имеем

$$-\frac{1}{4}c - \frac{3}{4}d = 0, \qquad -\frac{2}{3}c - \frac{1}{3}g = 0,$$
$$-\frac{1}{4}g - \frac{3}{4}h = 0, \qquad -\frac{2}{3}d - \frac{1}{3}h = 0.$$

Отсюда следует, что

$$d = -\frac{1}{3}c, \quad g = -2c, \quad h = -2d = \frac{2}{3}c.$$

Равенство $g = -3h$ выполняется автоматически. Таким образом,

$$A = \begin{pmatrix} c & -\frac{1}{3}c \\ -2c & \frac{2}{3}c \end{pmatrix} = \frac{1}{3}c \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Гавурин М. К., Малозёмов В. Н. *Экстремальные задачи с линейными ограничениями.* Л.: Изд-во ЛГУ, 1984. 176 с.