ЛИНЕЙНАЯ СКОРОСТЬ СХОДИМОСТИ МДМ-МЕТОДА*

Н. А. Соловьёва

vinyo@mail.ru

29 сентября 2016 г.

Аннотация. На основе работы [1] устанавливается линейная сходимость МДМ-метода. Детальное описание метода приведено в [2].

1°. Напомним постановку задачи. Пусть в пространстве $\mathbb{R}^n$ заданы m точек,

$$H = \{a_i\}_{i=1}^m.$$

Обозначим через G выпуклую оболочку множества H.

Ставится задача: *найти точку из G, ближайшую (в евклидовой норме) к началу координат.* Задачу можно записать так:

$$\|v\|^2 \to \min_{v \in G}. \tag{1}$$

Задача (1) имеет решение и оно единственно. Обозначим его v_*.

Для решения этой задачи в 1971 году был предложен итерационный метод, который в дальнейшем получил название «МДМ-метод» [2].

Обозначим через A матрицу со столбцами $a_1, \dots, a_m$. Тогда любой вектор v из выпуклой оболочки G множества H допускает представление

$$v = Ap, \quad p \geqslant \mathbb{O}, \quad \sum_{i=1}^m p[i] = 1. \tag{2}$$

Множество векторов p, удовлетворяющих условиям, указанным в формуле (2), назовём P. Носитель вектора коэффициентов p обозначим $M_+(p)$, так что

$$M_+(p) = \{i \in 1:m \mid p[i] > 0\}.$$

Введём величину

$$\Delta(p) = \max_{i \in M_+(p)} \langle a_i, v\rangle - \min_{i \in 1:m} \langle a_i, v\rangle,$$

где $v = Ap$, $p \in P$.

*Семинар по конструктивному негладкому анализу и недифференцируемой оптимизации «CNSA & NDO»: `http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/`

В докладе [2] было показано, что

$$\Delta(p) \geqslant 0 \quad \forall p \in P. \tag{3}$$

Кроме того, справедливо следующее утверждение (см. [2]).

ЛЕММА 1. *Равенство в* (3) *достигается тогда и только тогда, когда вектор* $v = Ap$ *является решением задачи* (1).

Обратимся к МДМ-методу. Возьмём начальное приближение $v_0 \in G$.

Пусть уже имеется k-е приближение $v_k = Ap_k$, $p_k \in P$. Опишем построение v_{k+1}.

Найдём индексы $i'_k \in M_+(p_k)$ и $i''_k \in 1:m$, такие, что

$$\max_{i \in M_+(p_k)} \langle a_i, v_k \rangle = \langle a_{i'_k}, v_k \rangle,$$
$$\min_{i \in 1:m} \langle a_i, v_k \rangle = \langle a_{i''_k}, v_k \rangle.$$

Для простоты будем использовать обозначения

$$a_{i'_k} = a'_k, \quad a_{i''_k} = a''_k.$$

В этом случае

$$\Delta_k := \Delta(p_k) = \langle a'_k - a''_k, v_k \rangle.$$

Если $\Delta_k = 0$, то, согласно лемме 1, v_k — решение задачи (1). Процесс закончен.

Пусть $\Delta_k > 0$. Введём вектор

$$\hat{v}_k = v_k - p'_k(a'_k - a''_k),$$

где $p'_k = p_k[i'_k]$. Очевидно, что $\hat{v}_k \in G$. Рассмотрим отрезок

$$v_k(t) = v_k + t(\hat{v}_k - v_k) = v_k - t\,p'_k(a'_k - a''_k), \quad t \in [0,1].$$

В силу выпуклости множества G все точки $v_k(t)$ этого отрезка принадлежат G. Выберем $t_k \in [0,1]$ из условия

$$\|v_k(t_k)\|^2 = \min_{t \in [0,1]} \|v_k(t)\|^2.$$

Положим $v_{k+1} = v_k(t_k)$.

Нетрудно понять, что

$$p_{k+1}[i] = \begin{cases} p_k[i], & \text{при } i \neq i'_k,\ i \neq i''_k, \\ (1 - t_k)p_k[i'_k], & \text{при } i = i'_k, \\ p_k[i''_k] + t_k\,p_k[i'_k], & \text{при } i = i''_k. \end{cases} \tag{4}$$

Укажем явную формулу для t_k. Абсолютный минимум $\|v_k(t)\|^2$ на $\mathbb{R}$ достигается в точке

$$\hat{t}_k = \frac{p'_k\,\Delta_k}{\|\hat{v}_k - v_k\|^2} = \frac{p'_k\,\Delta_k}{(p'_k)^2\,\|a'_k - a''_k\|^2} = \frac{\Delta_k}{p'_k\|a'_k - a''_k\|^2}. \tag{5}$$

Ясно, что $\hat{t}_k > 0$, поэтому

$$t_k = \begin{cases} \hat{t}_k, & \text{если } \hat{t}_k < 1, \\ 1, & \text{если } \hat{t}_k \geqslant 1. \end{cases}$$

Если $t_k = \hat{t}_k$, то итерацию метода будем называть «необрезанной» (*unclipped* в работе [1]), если $t_k = 1$ — «обрезанной» (*clipped*). Принимая во внимание (5), заметим, что на «необрезанной» итерации верно равенство

$$v_{k+1} = v_k - \frac{\Delta_k\,(a'_k - a''_k)}{\|a'_k - a''_k\|^2}. \tag{6}$$

Описание МДМ-метода завершено.

Построена последовательность $v_0, v_1, \ldots$ точек из G. Если она конечна, то последний её элемент является решением задачи (1). Вообще говоря, последовательность $\{v_k\}$ бесконечна. Такая ситуация возникает, когда

$$\Delta_k > 0 \quad \text{и, как следствие,} \quad \|v_{k+1}\| < \|v_k\| \quad \text{при всех} \quad k = 0, 1, \ldots. \tag{7}$$

В работе [2] было доказано следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. *При выполнении условия* (7) *последовательность* $\{v_k\}$, *построенная МДМ-методом, сходится к* v_*.

Сформулируем основной результат данного доклада.

ТЕОРЕМА 2. *Найдётся такой номер K и такое натуральное число N, что при всех $k \geqslant K + N$ верно неравенство*

$$\|v_k - v_*\| \leqslant \gamma^{k-K}\,\|v_K - v_*\|,$$

где $\gamma \in (0, 1)$.

Для доказательства теоремы 2 потребуется некоторая подготовка.

2°. Введём гиперплоскость

$$L = \big\{x \mid \langle v_*, x\rangle = \langle v_*, v_*\rangle\big\}. \tag{8}$$

В докладе [2] была доказана

ТЕОРЕМА 3. *Если $v_* \neq \mathbb{O}$, то, начиная с некоторого номера, все точки последовательности $\{v_k\}$ принадлежат L.*

Замечание 1. На протяжении всего доклада будем считать, что $v_* \neq \mathbb{O}$.

Замечание 2. Номер, начиная с которого все точки v_k лежат в гиперплоскости L, обозначим K_L.

Пусть $M = 1 : m$ и

$$M_0 = \{i \in M \mid a_i \in L\}, \quad M_1 = M \setminus M_0.$$

Внутри доказательства теоремы 3 (см. [2]) была установлена справедливость следующего утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *При всех $k \geqslant K_L$ вектор v_k допускает представление*

$$v_k = \sum_{i \in M_0} p_k[i] a_i, \quad p_k \geqslant \mathbb{O}, \quad \sum_{i \in M_0} p_k[i] = 1.$$

Дополним приведённые результаты доклада [2] ещё одним утверждением.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *При всех $k \geqslant K_L$ верно равенство*

$$\Delta_k = \langle v_k - v_*, a'_k - a''_k\rangle.$$

Доказательство. В доказательстве теоремы 3 (см. [2]) было показано, что существует такой номер k_0 ($k_0 \leqslant K_L$), что при $k \geqslant k_0$ и некотором положительном τ верны следующие неравенства:

$$\begin{aligned} \langle a_i, v_k\rangle &\leqslant \langle v_*, v_*\rangle + \tfrac{\tau}{4}, \quad i \in M_0, \\ \langle a_i, v_k\rangle &\geqslant \langle v_*, v_*\rangle + \tfrac{3\tau}{4}, \quad i \in M_1. \end{aligned}$$

Значит, при $k \geqslant k_0$

$$\min_{i \in 1:m} \langle a_i, v_k\rangle = \min_{i \in M_0} \langle a_i, v_k\rangle.$$

При этом значение скалярного произведения $\langle a_i, v_k\rangle$ на индексах $i \in M_1$ строго больше, чем $\min\limits_{i \in M_0} \langle a_i, v_k\rangle$. Следовательно, a''_k принадлежит гиперплоскости L, начиная с номера k_0 ($k_0 \leqslant K_L$).

По предложению 1, начиная с номера K_L, носитель $M_+(p_k)$ вектора коэффициентов p_k содержится в множестве M_0. Поэтому a'_k лежит в гиперплоскости L при $k \geqslant K_L$.

Таким образом, a'_k, a''_k принадлежат L при $k \geqslant K_L$. Это означает, что при $k \geqslant K_L$ верно равенство $\langle v_*, a'_k \rangle = \langle v_*, a''_k \rangle = \langle v_*, v_* \rangle$. Принимая его во внимание, получаем

$$\langle v_k - v_*, a'_k - a''_k \rangle = \Delta_k - \langle v_*, a'_k \rangle + \langle v_*, a''_k \rangle = \Delta_k, \quad k \geqslant K_L.$$

Предложение доказано. □

3°. Обозначим через φ_k угол между векторами $v_k - v_*$ и $a'_k - a''_k$. Пользуясь предложением 2, оценку Δ_k при $k \geqslant K_L$ запишем в виде

$$\Delta_k = \big\| v_k - v_* \big\| \, \big\| a'_k - a''_k \big\| \cos \varphi_k. \tag{9}$$

Заметим, что из неотрицательности величин Δ_k (см. (3)) следует неотрицательность $\cos \varphi_k$. Обозначим через φ нижний предел последовательности $\{\cos \varphi_k\}$.

Установим, что число φ положительно. Доказательство неравенства $\varphi > 0$ проведём методом «от противного».

Предположим, что $\varphi = 0$. Тогда в последовательности $\{\cos \varphi_k\}$ существует подпоследовательность с нулевым пределом. Для простоты будем считать, что сходится к нулю сама последовательность: $\lim\limits_{k \to \infty} \cos \varphi_k = 0$. Зададим единичные векторы u_k формулой

$$u_k = \frac{v_k - v_*}{\|v_k - v_*\|} \, .$$

Последовательность $\{u_k\}$ ограничена. Будем считать, что она сходится. (Иначе перейдём к сходящейся подпоследовательности.) Обозначим

$$\lim_{k \to \infty} u_k = u_*.$$

ЛЕММА 2. *Если $\varphi = 0$, то существует такой номер K', что при всех $k \geqslant K'$ верно неравенство*

$$\langle u_*, v_k - v_* \rangle \leqslant 0.$$

Доказательство этой леммы будет приведено в приложении.

ЛЕММА 3. *Нижний предел φ последовательности $\{\cos \varphi_k\}$ положителен.*

Доказательство. Предположим, что утверждение леммы неверно, то есть $\varphi = 0$. С учётом леммы 2 получим

$$\|u_*\|^2 = \lim_{k \to \infty} \langle u_*, u_k \rangle = \lim_{k \to \infty} \frac{\langle u_*, v_k - v_* \rangle}{\|v_k - v_*\|} \leqslant 0.$$

Но $\|u_*\|^2 = 1$, так как $\|u_k\|^2 = 1$ при всех k. Этим противоречием завершается доказательство леммы. □

4°. Справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4. *Найдётся номер $\widehat{K}$, такой, что на «необрезанной» итерации МДМ-метода с номером $k \geqslant \widehat{K}$ выполняется неравенство*

$$\|v_{k+1} - v_*\| \leqslant \theta \|v_k - v_*\|, \tag{10}$$

где $\theta \in (0, 1)$.

Доказательство. В лемме 3 установлено, что $\varphi > 0$. Зафиксируем произвольное положительное $\varepsilon < \varphi$. Выберем такой номер $\widehat{K} \geqslant K_L$, что

$$\cos\varphi_k \geqslant \varphi - \varepsilon \quad \text{при } k \geqslant \widehat{K}. \tag{11}$$

Обозначим $\sigma = 1 - (\varphi - \varepsilon)^2$, $\theta = \sqrt{\sigma}$. Нетрудно проверить, что $0 < \sigma < 1$ и, следовательно, $0 < \theta < 1$.

Рассмотрим произвольный индекс $k \geqslant \widehat{K}$. Так как $\widehat{K} \geqslant K_L$, то по теореме 3 вектор v_k лежит в гиперплоскости L. С учётом определения (8) гиперплоскости L имеем

$$\|v_k - v_*\|^2 = \|v_k\|^2 - 2\langle v_k, v_*\rangle + \|v_*\|^2 = \|v_k\|^2 - \|v_*\|^2. \tag{12}$$

Аналогично устанавливается равенство

$$\|v_{k+1} - v_*\|^2 = \|v_{k+1}\|^2 - \|v_*\|^2. \tag{13}$$

На основании (12) и (13) получим

$$\|v_k - v_*\|^2 - \|v_{k+1} - v_*\|^2 = \|v_k\|^2 - \|v_{k+1}\|^2.$$

Подставим вид (6) вектора v_{k+1} на «необрезанной» итерации в правую часть последнего соотношения. Запишем

$$\|v_k - v_*\|^2 - \|v_{k+1} - v_*\|^2 = \|v_k\|^2 - \left\|v_k - \tfrac{\Delta_k(a'_k - a''_k)}{\|a'_k - a''_k\|^2}\right\|^2 =$$
$$= 2\left\langle v_k, \tfrac{\Delta_k(a'_k - a''_k)}{\|a'_k - a''_k\|^2}\right\rangle - \tfrac{\Delta_k^2}{\|a'_k - a''_k\|^2}.$$

Так как по определению $\Delta_k = \langle v_k, a'_k - a''_k\rangle$, то

$$\|v_k - v_*\|^2 - \|v_{k+1} - v_*\|^2 = \tfrac{\Delta_k^2}{\|a'_k - a''_k\|^2}.$$

Перепишем правую часть последнего равенства с учётом (9). Имеем

$$\|v_k - v_*\|^2 - \|v_{k+1} - v_*\|^2 = \|v_k - v_*\|^2 \cos^2\varphi_k.$$

Принимая во внимание (11), получаем соотношение

$$\|v_k - v_*\|^2 - \|v_{k+1} - v_*\|^2 \geqslant \|v_k - v_*\|^2 (\varphi - \varepsilon)^2. \tag{14}$$

Из (14) следует требуемое неравенство (10).

Теорема доказана. □

5°. Проверим, что «необрезанные» итерации встречаются регулярно.

ТЕОРЕМА 5. *Существует такое натуральное число N, что среди любых N последовательных итераций МДМ-метода найдётся «необрезанная».*

Доказательство. Пусть итерация с номером k — «обрезанная». Тогда $t_k = 1$ и в соответствии с (4)

$$p_{k+1}[i] = \begin{cases} p_k[i], & \text{при } i \neq i'_k,\ i \neq i''_k, \\ 0, & \text{при } i = i'_k, \\ p_k[i''_k] + p_k[i'_k], & \text{при } i = i''_k. \end{cases} \tag{15}$$

Предположим, что, начиная с ℓ-й итерации, подряд идут «обрезанные» итерации с номерами $r \geqslant \ell$. Компоненты $p_r[i]$ вектора p_r, определяющего v_r, получаются путём перераспределения значений $p_\ell[i]$, $i \in 1 : m$ (см. (15)). Поэтому в цепочке последовательных «обрезанных» итераций может получиться лишь конечное число попарно различных элементов p_r. С учётом строгого убывания $\|v_k\|$ заключаем, что подряд идущих «обрезанных» итераций может быть только конечное число, которое не зависит от номера ℓ. □

6°. Обратимся к доказательству теоремы 2. Возьмём произвольное $j = 0, 1, \ldots$ Рассмотрим промежуток вида

$$\big[\widehat{K} + jN, \widehat{K} + (j+1)N\big). \tag{16}$$

(Здесь $\widehat{K}$ — номер из теоремы 4, N — натуральное число из теоремы 5.) По теореме 5 в промежутке (16) есть «необрезанная» итерация с номером $\widetilde{k}$,

$$\widehat{K} + jN \leqslant \widetilde{k} < \widehat{K} + (j+1)N. \tag{17}$$

По теореме 4 на «необрезанной» итерации с номером $\widetilde{k}$ выполняется неравенство

$$\big\|v_{\widetilde{k}+1} - v_*\big\| \leqslant \theta\, \big\|v_{\widetilde{k}} - v_*\big\|, \tag{18}$$

где $\theta \in (0, 1)$.

При $k \geqslant \widehat{K}$ рассмотрим величину

$$Q_k = \|v_k - v_*\|^2.$$

Возведём в квадрат обе части неравенства (18). Получим соотношение

$$Q_{\widetilde{k}+1} \leqslant \sigma Q_{\widetilde{k}}, \tag{19}$$

где $\sigma = \theta^2$.

Заметим, что $\widehat{K} \geqslant K_L$ (см. доказательство теоремы 4). Значит, по теореме 3 вектор v_k при $k \geqslant \widehat{K}$ лежит в гиперплоскости L. С учётом определения (8) гиперплоскости L для величины Q_k верно представление

$$Q_k = \|v_k\|^2 - 2\langle v_k, v_*\rangle + \|v_*\|^2 = \|v_k\|^2 - \|v_*\|^2, \quad k \geqslant \widehat{K}.$$

По условию (7) выполняется неравенство $\|v_k\| > \|v_{k+1}\|$. Поэтому величина Q_k с ростом k убывает:

$$Q_{k+1} < Q_k \quad \text{при всех} \ \ k \geqslant \widehat{K}.$$

Из последнего соотношения следует, что

$$Q_\ell \leqslant Q_k \quad \text{при всех} \ \ \ell \geqslant k \geqslant \widehat{K}. \tag{20}$$

Используя формулы (17), (20) и (19), запишем

$$Q_{\widehat{K}+(j+1)N} \leqslant Q_{\widetilde{k}+1} \leqslant \sigma Q_{\widetilde{k}} \leqslant \sigma Q_{\widehat{K}+jN}.$$

Таким образом, при всех $j = 0, 1, \ldots$ справедливо неравенство

$$Q_{\widehat{K}+(j+1)N} \leqslant \sigma Q_{\widehat{K}+jN}. \tag{21}$$

Зафиксируем произвольный номер $k_0 \geqslant \widehat{K} + N$. Найдётся такое натуральное число j_0, что

$$\widehat{K} + j_0 N \leqslant k_0 < \widehat{K} + (j_0+1)N.$$

Учитывая (20) и применяя (21), получаем цепочку неравенств

$$Q_{k_0} \leqslant Q_{\widehat{K}+j_0 N} \leqslant \sigma Q_{\widehat{K}+(j_0-1)N} \leqslant \cdots \leqslant \sigma^{j_0} Q_{\widehat{K}}.$$

Значит, выполняется соотношение

$$Q_{k_0} \leqslant \sigma^{j_0} Q_{\widehat{K}}.$$

Перепишем последнее неравенство в виде

$$Q_{k_0} \leqslant \left(\sigma^{\frac{j_0}{k_0 - \widehat{K}}}\right)^{k_0 - \widehat{K}} Q_{\widehat{K}}. \tag{22}$$

Так как $k_0 - \widehat{K} < (j_0+1)N$, то

$$\frac{j_0}{k_0 - \widehat{K}} > \frac{j_0}{(j_0+1)N}.$$

Нетрудно видеть, что $\frac{j_0}{j_0+1} \geqslant \frac{1}{2}$, поэтому

$$\frac{j_0}{k_0 - \widehat{K}} > \frac{1}{2N}. \tag{23}$$

Напомним, что $\sigma = \theta^2$, где θ — константа из теоремы 4, $\theta \in (0,1)$. Ясно, что $\sigma \in (0,1)$. С учётом (23) из (22) следует, что

$$Q_{k_0} < \left(\sigma^{\frac{1}{2N}}\right)^{k_0 - \widehat{K}} Q_{\widehat{K}}.$$

Из обеих частей последнего неравенства извлечём квадратный корень. Получим

$$\|v_{k_0} - v_*\| < \left(\theta^{\frac{1}{2N}}\right)^{k_0 - \widehat{K}} \|v_{\widehat{K}} - v_*\|.$$

Примем

$$\gamma = \theta^{\frac{1}{2N}}.$$

Ясно, что $\gamma \in (0,1)$.

Таким образом, при всех $k \geqslant \widehat{K} + N$ справедливо неравенство

$$\|v_k - v_*\| \leqslant \gamma^{k-\widehat{K}} \|v_{\widehat{K}} - v_*\|, \quad \gamma \in (0,1).$$

Теорема 2 доказана.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Проведём некоторую подготовку к доказательству леммы 2. Напомним, что, пользуясь предложением 2, оценку Δ_k при $k \geqslant K_L$ можно представить в виде

$$\Delta_k = \big\|v_k - v_*\big\| \, \big\|a'_k - a''_k\big\| \cos\varphi_k.$$

Обозначим через φ нижний предел последовательности $\{\cos\varphi_k\}$. Ясно, что $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$.

Будем считать, что выполнено предположение леммы: $\varphi = 0$. Тогда в последовательности $\{\cos\varphi_k\}$ существует подпоследовательность с нулевым пределом. Для простоты будем считать, что сходится к нулю сама последовательность: $\lim\limits_{k\to\infty} \cos\varphi_k = 0$. Зададим единичные векторы u_k формулой

$$u_k = \frac{v_k - v_*}{\|v_k - v_*\|}\,. \tag{24}$$

Последовательность $\{u_k\}$ ограничена. Будем считать, что она сходится. (Иначе перейдём к сходящейся подпоследовательности.) Обозначим

$$\lim_{k\to\infty} u_k = u_*.$$

Рассмотрим векторы коэффициентов p_k приближений v_k. Ясно, что последовательность $\{p_k\}$ ограничена. Будем считать, что она сходится и

$$\lim_{k\to\infty} p_k = p_*.$$

(Если последовательность $\{p_k\}$ расходится, выделим сходящуюся подпоследовательность.)

Обозначим через S множество пар индексов (ℓ, q), $\ell, q \in 1 : m$, обладающих следующим свойством: в последовательности $\{p_k\}$ существует подпоследовательность $\{p_{k_s}\}$, такая, что

$$p_{k_s}[\ell] > 0 \quad \text{и} \quad p_{k_s}[q] < 1 \quad \text{при всех} \;\; s \in \mathbb{N}. \tag{25}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Пусть $\varphi = 0$. Рассмотрим пару индексов (ℓ, q) из множества S. Предположим, что $p_*[q] > 0$. Тогда выполняется неравенство*

$$\langle u_*, a_\ell - a_q \rangle \leqslant 0.$$

Доказательство. Зафиксируем произвольную пару индексов (ℓ, q) из S и подпоследовательность $\{p_{k_s}\}$, обладающую свойством (25). Напомним, что $M = 1 : m$, $M_0 = \{i \in M \mid a_i \in L\}$, $M_1 = M \setminus M_0$.

Покажем, что ℓ, q лежат в множестве M_0. Если бы $\ell \in M_1$, то, начиная с номера K_L, коэффициент $p_k[\ell]$ по предложению 1 стал бы нулевым. Но по формуле (25) существует номер k_s, больший, чем K_L, на котором $p_{k_s}[\ell] > 0$. Таким образом, $\ell \in M_0$. По условию предложения $p_*[q] > 0$, поэтому $q \in M_0$. По определению множества M_0 векторы a_ℓ, a_q лежат в гиперплоскости L. Значит (см. (8)),

$$\langle v_*, a_\ell \rangle = \langle v_*, a_q \rangle = \langle v_*, v_* \rangle. \tag{26}$$

Учитывая (24), записываем

$$\langle u_{k_s}, a_\ell - a_q \rangle = \frac{\langle v_{k_s} - v_*, a_\ell - a_q \rangle}{\|v_{k_s} - v_*\|}. \tag{27}$$

На основании формулы (26) приходим к равенству

$$\langle v_*, a_\ell - a_q \rangle = 0.$$

Из (27) и последнего соотношения следует, что

$$\langle u_{k_s}, a_\ell - a_q \rangle = \frac{\langle v_{k_s}, a_\ell - a_q \rangle}{\|v_{k_s} - v_*\|}. \tag{28}$$

Так как $p_{k_s}[\ell] > 0$, то $\langle v_{k_s}, a_\ell \rangle \leqslant \max\limits_{i \in M_+(p_{k_s})} \langle v_{k_s}, a_i \rangle$. Правую часть равенства (28) можно оценить сверху:

$$\begin{aligned} \frac{\langle v_{k_s}, a_\ell - a_q \rangle}{\|v_{k_s} - v_*\|} &\leqslant \frac{\max\limits_{i \in M_+(p_{k_s})} \langle v_{k_s}, a_i \rangle - \min\limits_{i \in 1:m} \langle v_{k_s}, a_i \rangle}{\|v_{k_s} - v_*\|} = \\ &= \frac{\Delta_{k_s}}{\|v_{k_s} - v_*\|} \overset{(9)}{=} \left\| a'_{k_s} - a''_{k_s} \right\| \cos \varphi_{k_s}, \quad k_s \geqslant K_L. \end{aligned} \tag{29}$$

Обозначим $d = \sup\limits_{i,j \in 1:m} \|a_i - a_j\|$. На основании (28) и (29) получим соотношение

$$\langle u_{k_s}, a_\ell - a_q \rangle \leqslant d \cos \varphi_{k_s}, \quad k_s \geqslant K_L. \tag{30}$$

По условию предложения $\varphi = \lim\limits_{k \to \infty} \cos \varphi_k = 0$. Ясно, что

$$\lim_{s \to \infty} \cos \varphi_{k_s} = 0. \tag{31}$$

Учитывая (31), переходим к пределу в неравенстве (30).

Предложение доказано. □

Через $\widehat{S}$ обозначим дополнение множества S до декартова квадрата множества $1 : m$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Существует такой номер K_S, что при $k \geqslant K_S$ для произвольной пары индексов (ℓ, q) из $\widehat{S}$ верно хотя бы одно из двух равенств:*

$$p_k[\ell] = 0 \quad \textit{или} \quad p_k[q] = 1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть пара индексов (ℓ, q) не принадлежит S. Тогда найдётся номер $K_{(\ell,q)}$ с таким свойством: для любого номера k, большего $K_{(\ell,q)}$, верно

$$p_k[\ell] = 0 \quad \text{или} \quad p_k[q] = 1.$$

В самом деле, если номера $K_{(\ell,q)}$ с указанным свойством нет, то для любого фиксированного k_1 имеется номер $k_2 > k_1$, такой, что $p_{k_2}[\ell] > 0$ и $p_{k_2}[q] < 1$. Аналогично найдём $k_3 > k_2$, такой, что $p_{k_3}[\ell] > 0$ и $p_{k_3}[q] < 1$. Продолжив процесс, построим подпоследовательность $\{k_s\}$, на элементах которой $p_{k_s}[\ell] > 0$ и $p_{k_s}[q] < 1$. Существование этой подпоследовательности означает, что пара (ℓ, q) принадлежит множеству S. Но по условию это не так.

Обозначим

$$K_S = \max_{(\ell,q) \in \widehat{S}} \left\{ K_{(\ell,q)} \right\} + 1.$$

Возьмём любую пару (ℓ, q) из $\widehat{S}$. Если $k \geqslant K_S$, то $k > K_{(\ell,q)}$ и выполняется хотя бы одно из двух равенств: $p_k[\ell] = 0$ или $p_k[q] = 1$. □

Рассмотрим произвольный индекс $i \in 1:m$. Предположим, что

$$p_*[i] = \lim_{k\to\infty} p_k[i] < 1.$$

Тогда существует такой номер $K(i)$, что $p_k[i] < 1$ при $k \geqslant K(i)$.

Введём обозначения

$$\begin{aligned} N_1 &= \big\{ i \in 1:m \bigm| p_*[i] < 1 \big\}, \\ K_1 &= \max_{i\in N_1} \big\{ K(i) \big\}. \end{aligned}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Положим $K' = \max\{K_S, K_1\}$. Зафиксируем номер $k \geqslant K'$. Рассмотрим произвольную пару $(\ell, q) \in \widehat{S}$. Если $p_k[\ell]\, p_*[q] > 0$, то $p_k[q] = 1$ и $p_*[q] = 1$.*

Доказательство. Возьмём номер $k \geqslant K'$. Из условия $p_k[\ell]\, p_*[q] > 0$ следует, что $p_k[\ell] > 0$. Так как $k \geqslant K' \geqslant K_S$, то по предложению 4

$$p_k[q] = 1. \tag{32}$$

Покажем, что $p_*[q] = 1$. Предположим, что это не так: $p_*[q] < 1$. Тогда $p_r[q] < 1$ при всех $r \geqslant K(q)$. Так как $k \geqslant K' \geqslant K_1 \geqslant K(q)$, то должно выполняться неравенство $p_k[q] < 1$, а это противоречит (32). $\square$

Обратимся к доказательству леммы 2. Напомним, что $\varphi = 0$. Возьмём произвольный номер k. Введём обозначения

$$\begin{aligned} D_k &= \big\{ i \in 1:m \mid p_k[i] \neq p_*[i] \big\}, \\ \gamma_k &= \sum_{i\in D_k} p_k[i]. \end{aligned} \tag{33}$$

Заметим, что $v_k \neq v_*$, поэтому $D_k \neq \varnothing$. Очевидно следующее равенство:

$$\sum_{i:\, p_k[i]=p_*[i]} p_k[i] \;=\; \sum_{i:\, p_k[i]=p_*[i]} p_*[i].$$

Перепишем определение (33) величины γ_k с использованием этого равенства. Получим

$$\gamma_k \;=\; \sum_{i=1}^{m} p_k[i] \;-\; \sum_{i:\, p_k[i]=p_*[i]} p_k[i] \;=\; 1 \;-\; \sum_{i:\, p_k[i]=p_*[i]} p_*[i] \;=\; \sum_{i\in D_k} p_*[i]. \tag{34}$$

Ясно, что величина γ_k неотрицательна. Предположим, что $\gamma_k = 0$. Зафиксируем индекс j из множества D_k. Так как компоненты вектора p_k неотрицательны, то из определения (33) величины γ_k следует, что $p_k[j] = 0$. Так как компоненты вектора p_* неотрицательны, то из выражения (34) для величины γ_k следует, что $p_*[j] = 0$. Но тогда $p_k[j] = p_*[j]$ и j не принадлежит D_k. Получили противоречие. Значит, $\gamma_k > 0$.

Имеем

$$v_k - v_* = \sum_{i=1}^{m} \big(p_k[i] - p_*[i]\big)\, a_i = \sum_{i\in D_k} \big(p_k[i] - p_*[i]\big)\, a_i.$$

Запишем

$$\gamma_k\big(v_k - v_*\big) = \gamma_k \sum_{i\in D_k} \big(p_k[i] - p_*[i]\big) a_i =$$

$$= \ \gamma_k \sum_{\ell\in D_k} p_k[\ell]\, a_\ell \ \ - \ \ \gamma_k \sum_{q\in D_k} p_*[q]\, a_q.$$

В уменьшаемое подставим выражение (34) для γ_k, а в вычитаемое — определение (33) величины γ_k. Получим

$$\begin{aligned}\gamma_k\big(v_k - v_*\big) \ &= \ \sum_{q\in D_k} p_*[q] \sum_{\ell\in D_k} p_k[\ell]\, a_\ell \ - \sum_{\ell\in D_k} p_k[\ell] \sum_{q\in D_k} p_*[q]\, a_q \ = \\ &= \sum_{(\ell,q)\in D_k\times D_k} p_k[\ell]\, p_*[q]\, \big(a_\ell - a_q\big).\end{aligned}$$

С учётом последнего равенства имеем

$$\Big\langle u_*, \gamma_k\big(v_k - v_*\big)\Big\rangle \ = \sum_{(\ell,q)\in D_k\times D_k} p_k[\ell]\, p_*[q]\, \langle u_*, a_\ell - a_q\rangle =$$

$$= \sum_{(\ell,q)\in (D_k\times D_k)\cap S} p_k[\ell]\, p_*[q]\, \langle u_*, a_\ell - a_q\rangle \ + \sum_{(\ell,q)\in (D_k\times D_k)\cap \widehat{S}} p_k[\ell]\, p_*[q]\, \langle u_*, a_\ell - a_q\rangle.$$

Обозначим через B_k первую сумму в правой части последнего равенства, через C_k — вторую сумму. Запишем

$$\langle u_*, \gamma_k(v_k - v_*)\rangle = B_k + C_k. \tag{35}$$

Коэффициенты $p_k[\ell]\, p_*[q]$ в суммах B_k и C_k неотрицательны.

Рассмотрим все слагаемые с положительными коэффициентами $p_k[\ell]\, p_*[q]$ в сумме B_k. Если $p_k[\ell]\, p_*[q] > 0$, то необходимо $p_*[q] > 0$. Тогда по предложению 3 $\langle u_*, a_\ell - a_q\rangle \leqslant 0$. Значит,

$$B_k \leqslant 0. \tag{36}$$

Разберёмся с суммой C_k. Будем считать, что $k \geqslant K'$. Предположим, что найдётся такая пара (ℓ, q) из множества $\widehat{S}$, что

$$p_k[\ell]\, p_*[q] > 0.$$

Тогда по предложению 5 верно равенство $p_k[q] = p_*[q] = 1$. Но это означает, что индекс q не принадлежит множеству D_k. Таким образом, всем парам (ℓ, q) из $(D_k \times D_k) \cap \widehat{S}$ соответствуют нулевые коэффициенты $p_k[\ell]p_*[q]$ в сумме C_k. Заключаем, что

$$C_k = 0 \quad \text{при} \;\; k \geqslant K'. \tag{37}$$

Из (35), (36) и (37) следует справедливость неравенства $\gamma_k\langle u_*, v_k - v_*\rangle \leqslant 0$ при $k \geqslant K'$. Учитывая положительность величины γ_k, получаем, что

$$\langle u_*, v_k - v_*\rangle \leqslant 0 \quad \text{при} \;\; k \geqslant K'.$$

Лемма 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lopez J., Dorronsoro J. R. *Linear convergence rate for the MDM algorithm for the Nearest Point Problem* // Pattern Recognition. 2015. No. 48. P. 1510–1522.

2. Малозёмов В. Н. *МДМ-методу — 40 лет* // Семинар CNSA & NDO. Избранные доклады. 10 декабря 2011 г. 10 с. (`http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/reps11.shtml#1210`).