ПРИМЕР НАИЛУЧШЕГО РАВНОМЕРНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ В МНОГОМЕРНОМ СЛУЧАЕ*

В. Н. Малозёмов А. В. Плоткин
v.malozemov@spbu.ru avplotkin@gmail.com

8 декабря 2016 г.

1°. Пусть $n \geqslant 2$ — фиксированное натуральное число, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — вектор с положительными компонентами и

$$H(x) = n\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}\right)^{-1}$$

— функция, значение которой равно среднему гармоническому её аргументов. Доопределим $H(x)$ на множестве $\mathbb{R}^n_+$ векторов с неотрицательными компонентами, положив по непрерывности $H(x) = 0$, если хотя бы одна компонента вектора x равна нулю.

Обозначим через Ω телесный симплекс, состоящий из векторов $x \in \mathbb{R}^n_+$, у которых $\sum_{k=1}^{n} x_k \leqslant 1$, и рассмотрим задачу наилучшего равномерного приближения:

$$\varphi(c) := \max_{x\in\Omega}\bigl|H(x) - \langle c, x\rangle\bigr| \to \min_{c\in\mathbb{R}^n}. \tag{1}$$

В докладе указано единственное решение задачи (1), обладающее к тому же полным альтернансом. Установлена сильная единственность решения с асимптотически точной константой сильной единственности.

2°. Введём стандартный симплекс

$$\Lambda = \bigl\{x = (x_1, \ldots, x_n) \mid x \geqslant \mathbb{O},\ \sum_{k=1}^{n} x_k = 1\bigr\}.$$

ЛЕММА 1. *Справедливо представление*

$$\varphi(c) = \max_{x\in\Lambda}\bigl|H(x) - \langle c, x\rangle\bigr|. \tag{2}$$

*Семинар по конструктивному негладкому анализу и недифференцируемой оптимизации «CNSA & NDO»: `http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/`

Доказательство. Отметим, что функция $H(x)$ положительно однородна, а аппроксимирующая линейная форма $\langle c, x\rangle$ однородна. Как следствие, разность $f(c, x) = H(x) - \langle c, x\rangle$ положительно однородна, то есть

$$f(c, \lambda x) = \lambda f(c, x) \quad \forall \lambda > 0. \tag{3}$$

Зафиксируем точку $x \neq \mathbb{O}$ из телесного симплекса Ω и положим

$$\lambda = \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

В силу определения Ω выполняется неравенство $\lambda \leqslant 1$. Введём точку $y = \frac{1}{\lambda}x$. Ясно, что y принадлежит стандартному симплексу Λ. Согласно (3) имеем

$$|f(c, x)| = |f(c, \lambda y)| = \lambda |f(c, y)| \leqslant \lambda \max_{y\in\Lambda} |f(c, y)| \leqslant \max_{y\in\Lambda} |f(c, y)|.$$

Это неравенство справедливо и при $x = \mathbb{O}$. Значит,

$$\max_{x\in\Omega} |f(c, x)| \leqslant \max_{y\in\Lambda} |f(c, x)|.$$

Обратное неравенство очевидно. Объединяя два полученных неравенства, приходим к равенству (2). $\square$

3°. Обозначим через e вектор из $\mathbb{R}^n$, у которого все компоненты равны единице, и положим

$$c_* = \frac{1}{2n}e.$$

ЛЕММА 2. *Справедливо равенство*

$$\varphi(c_*) = \frac{1}{2n}. \tag{4}$$

Доказательство. Для любого вектора $x \in \Lambda$ в силу неравенства между средним гармоническим и средним арифметическим имеем

$$H(x) \leqslant \frac{1}{n}.$$

Значит,

$$H(x) - \langle c_*, x\rangle = H(x) - \frac{1}{2n} \leqslant \frac{1}{2n} \quad \forall x \in \Lambda.$$

Вместе с тем, $H(x) \geqslant 0$, поэтому

$$-H(x) + \langle c_*, x\rangle \leqslant \langle c_*, x\rangle = \frac{1}{2n} \quad \forall x \in \Lambda.$$

Приходим к неравенству

$$\varphi(c_*) = \max_{x\in\Lambda} \bigl| H(x) - \langle c_*, x\rangle \bigr| \leqslant \frac{1}{2n}. \tag{5}$$

Чтобы получить обратное неравенство, вычислим значение разности $f(c_*, x) = H(x) - \langle c_*, x\rangle$ на ортах $e_1, \ldots, e_n$ пространства $\mathbb{R}^n$ (которые принадлежат симплексу Λ):

$$f(c_*, e_i) = -\langle c_*, e_i\rangle = -\frac{1}{2n}, \quad i \in 1:n. \tag{6}$$

Отсюда следует, что

$$\varphi(c_*) \geqslant \max_{i\in 1:n} |f(c_*, e_i)| = \frac{1}{2n}. \tag{7}$$

Объединив неравенства (5) и (7), придём к равенству (4). $\square$

На рисунке представлены графики функций $H(x)$ и $\langle c_*, x\rangle$ на множестве Ω при $n = 2$.

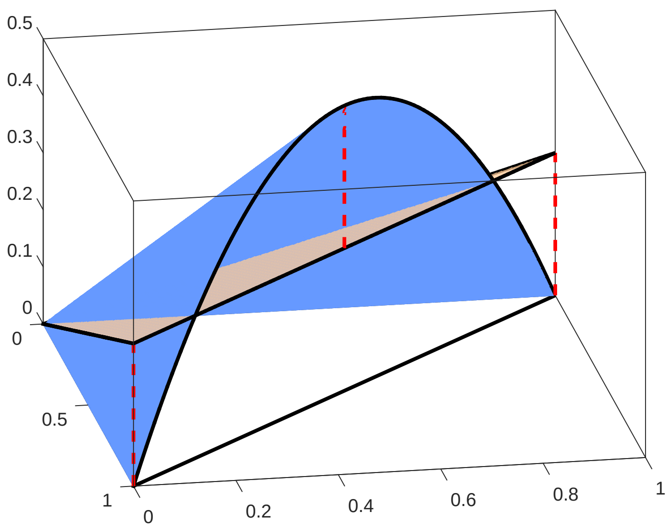

Рис. 1. Графики функций $H(x)$ и $\langle c_*, x\rangle$ на множестве Ω при $n = 2$

4°. Обозначим $a_i = e_i$, $\xi_i = -1$ при $i \in 1:n$. Тогда соотношение (6) можно переписать в виде

$$\xi_i f(c_*, a_i) = \frac{1}{2n}, \quad i \in 1:n.$$

Положим дополнительно $a_{n+1} = \frac{1}{n}e$, $\xi_{n+1} = 1$. Имеем $a_{n+1} \in \Lambda$ и

$$\xi_{n+1} f(c_*, a_{n+1}) = \frac{1}{n}\big[H(e) - \langle c_*, e\rangle\big] = \frac{1}{2n}.$$

Множество $A = \{a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}\}$ назовём *альтернансом.* Для точек альтернанса справедливо соотношение

$$\xi_i f(c_*, a_i) = \frac{1}{2n}, \quad i \in 1:n+1. \tag{8}$$

5°. Сформулируем первый основной результат доклада.

ТЕОРЕМА 1. *Вектор c_* является единственным решением задачи* (1).

Доказательство. Достаточно проверить, что из неравенства $\varphi(c) \leqslant \varphi(c_*)$ следует равенство $c = c_*$.

Пусть $\varphi(c) \leqslant \varphi(c_*)$ на некотором векторе $c \in \mathbb{R}^n$. Так как

$$H(a_i) = H(e_i) = 0, \quad \langle c, a_i\rangle = \langle c, e_i\rangle = c_i,$$

то $f(c, a_i) = -c_i$. Неравенство $\varphi(c) \leqslant \frac{1}{2n}$ имеет своим следствием

$$\max_{k \in 1:n} |c_k| \leqslant \frac{1}{2n}. \tag{9}$$

В частности,

$$\langle c, a_{n+1}\rangle = \frac{1}{n}\langle c, e\rangle = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} c_k \leqslant \frac{1}{2n}. \tag{10}$$

Вместе с тем, $H(a_{n+1}) = \frac{1}{n}H(e) = \frac{1}{n}$. Из неравенства $\varphi(c) \leqslant \frac{1}{2n}$ следует, что $H(a_{n+1}) - \langle c, a_{n+1}\rangle \leqslant \frac{1}{2n}$ или

$$\langle c, a_{n+1}\rangle \geqslant H(a_{n+1}) - \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n}. \tag{11}$$

На основании (10) и (11) заключаем, что

$$\langle c, a_{n+1}\rangle = \frac{1}{2n}.$$

Перепишем последнее равенство в виде

$$\sum_{k=1}^{n} c_k = \frac{1}{2}.$$

В силу (9) это равенство возможно только тогда, когда $c_k = \frac{1}{2n}$ при всех $k \in 1:n$, то есть когда $c = c_*$.

Теорема доказана. $\square$

6°. Сформулируем второй основной результат доклада — теорему о сильной единственности решения.

ТЕОРЕМА 2. *При всех $c \in \mathbb{R}^n$ выполняется неравенство*

$$\varphi(c) - \varphi(c_*) \geqslant r \, \|c - c_*\| \,, \tag{12}$$

где $r = \frac{1}{\sqrt{n(4n-3)}}$.

Доказательство. При $c = c_*$ неравенство (12) очевидно. В дальнейшем считаем, что $c \neq c_*$. На основании (4) и (8) имеем

$$\varphi(c) - \varphi(c_*) \geqslant \max_{i \in 1:n+1} \big\{ \xi_i f(c, a_i) - \tfrac{1}{2n} \big\} = \max_{i \in 1:n+1} \xi_i \big[f(c, a_i) - f(c_*, a_i) \big] =$$
$$= \max_{i \in 1:n+1} \big\{ -\xi_i \langle c - c_*, a_i \rangle \big\} = \|c - c_*\| \cdot \max_{i \in 1:n+1} \big\langle \tfrac{c - c_*}{\|c - c_*\|}, -\xi_i a_i \big\rangle \geqslant$$
$$\geqslant \|c - c_*\| \cdot \min_{\|g\|=1} \max_{i \in 1:n+1} \langle -\xi_i a_i, g \rangle.$$

Положив

$$r = \min_{\|g\|=1} \max_{i \in 1:n+1} \langle -\xi_i a_i, g \rangle,$$

придём к (12).

7°. Константа r равна минимальному значению целевой функции в следующей экстремальной задаче:

$$\max_{i \in 1:n+1} \langle -\xi_i a_i, g \rangle \to \min_{\|g\|=1} .$$

По теореме Вейерштрасса эта задача имеет решение. Запишем эквивалентную задачу

$$\begin{gathered} s \to \min, \\ \langle -\xi_i a_i, g \rangle \leqslant s, \quad i \in 1 : n+1, \\ \|g\| = 1. \end{gathered} \tag{13}$$

Отметим, что (см. п. 4°)

$$\big\{ -\xi_i a_i \big\}_{i=1}^{n+1} = \big\{ e_1, \ldots, e_n, -\tfrac{1}{n} e \big\},$$

поэтому задачу (13) можно переписать в виде

$$\begin{gathered} s \to \min, \\ g_k \leqslant s, \quad k \in 1 : n, \\ -\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} g_k \leqslant s, \\ \sum_{k=1}^{n} g_k^2 = 1. \end{gathered} \tag{14}$$

По эквивалентности задача (14) имеет решение (g_*, s_*), при этом $s_* = r$. Покажем, что

$$s_* = \frac{1}{\sqrt{n(4n-3)}}.$$

8°. Рассмотрим вспомогательную параметрическую задачу

$$\begin{gathered} p(v) := \sum_{k=1}^{n} v_k^2 \to \max, \\ v_k \leqslant s, \quad k \in 1:n, \\ -\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} v_k \leqslant s, \end{gathered} \tag{15}$$

где $s > 0$ — параметр.

ЛЕММА 3. *Множество V векторов вида*

$$s(e - 2ne_i), \quad i \in 1:n,$$

есть множество всех оптимальных планов задачи (15).

Доказательство. Множество планов задачи (15) непусто (содержит нулевой вектор) и ограничено. Ограниченность компонент плана сверху задана явно: $v_k \leqslant s$, $k \in 1:n$. Ограниченность снизу проверяется так:

$$v_k \geqslant -\sum_{\substack{k'=1 \\ k' \neq k}}^{n} v_{k'} - ns \geqslant (1-2n)s, \quad k \in 1:n.$$

На рис. 2 изображено множество планов при $n = 2$.

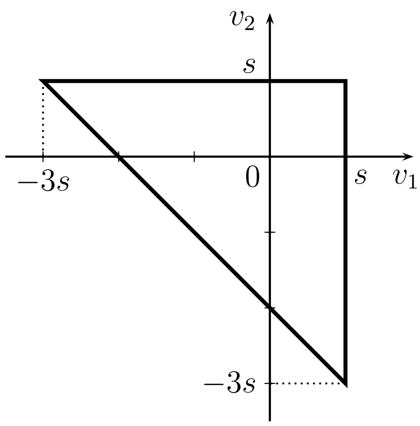

Рис. 2. Множество планов задачи (15) при $n = 2$

По теореме Вейерштрасса задача (15) имеет решение. Обозначим его v^*. Выясним, какими свойствами обладает вектор v^*.

Введём индексные множества

$$K_+ = \big\{k \in 1:n \mid v_k^* \geqslant 0\big\}, \quad K_- = \big\{k \in 1:n \mid v_k^* < 0\big\}.$$

Свойство 1. *Множество K_- состоит из единственного индекса k_0.*

Сначала проверим, что множество K_- непусто. Если все компоненты v^* неотрицательны, то $p(v) \leqslant ns^2$. Вместе с тем, для всех $v \in V$

$$p(v) = s^2(4n^2 - 3n) > ns^2 = p(v^*),$$

что противоречит оптимальности v^*.

Теперь покажем, что K_- состоит из одного индекса. В противном случае зафиксируем произвольный индекс $k_0 \in K_-$ и рассмотрим вектор $\hat{v}$ с компонентами

$$\hat{v}_k = \begin{cases} v_k^* & \text{при } k \in K_+, \\ 0 & \text{при } k \in K_- \setminus \{k_0\}, \\ \sum\limits_{\alpha \in K_-} v_\alpha^* & \text{при } k = k_0. \end{cases}$$

Вектор $\hat{v}$ является планом. Так как

$$\Big(\sum_{k \in K_-} v_k^*\Big)^2 > \sum_{k \in K_-} (v_k^*)^2,$$

то $p(\hat{v}) > p(v^*)$, что снова противоречит оптимальности v^*.

Свойство 2. *Все неотрицательные компоненты вектора v_* равны s.*

Если это не так, то введём вектор $\hat{v}$ с компонентами

$$\hat{v}_k = \begin{cases} s & \text{при } k \in K_+, \\ v_k^* & \text{при } k \in K_-. \end{cases}$$

Вектор $\hat{v}$ является планом и $p(\hat{v}) > p(v^*)$, что противоречит оптимальности v^*.

Свойство 3. *Выполняется равенство $-\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k^* = s$.*

В противном случае

$$\lambda := \sum_{k=1}^{n} v_k^* + ns > 0.$$

Рассмотрим вектор $\hat{v}$ с компонентами

$$\hat{v}_k = \begin{cases} v_k^* & \text{при } k \in K_+, \\ v_k^* - \lambda & \text{при } k = k_0. \end{cases}$$

Вектор $\hat{v}$ является планом. Так как

$$|v_{k_0}^* - \lambda| = |v_{k_0}^*| + \lambda > |v_{k_0}^*|,$$

то $p(\hat{v}) > p(v^*)$. Это противоречит оптимальности v^*.

Остаётся отметить, что свойствам 1–3 удовлетворяют только векторы из множества V, указанного в формулировке леммы. □

9°. Вернёмся к задаче (14). Она имеет решение (g_*, s_*), причём $s_* > 0$ (иначе ограничения будут противоречивыми). Рассмотрим задачу (15) с параметром $s = s_*$. Вектор g_* удовлетворяет ограничениям такой задачи. Учитывая, что наибольшее значение целевой функции равно $s_*^2(4n^2 - 3n)$, получаем

$$1 = \|g_*\|^2 \leqslant s_*^2(4n^2 - 3n).$$

Отсюда следует, что

$$s_* \geqslant \frac{1}{\sqrt{4n^2 - 3n}}. \tag{16}$$

Обозначим $\hat{s} = \frac{1}{\sqrt{4n^2 - 3n}}$ и пусть $\hat{v}$ какое-нибудь решение задачи (15) при $s = \hat{s}$. Согласно лемме 3

$$\|\hat{v}\|^2 = \hat{s}^2(4n^2 - 3n) = 1.$$

Значит, пара $(\hat{v}, \hat{s})$ является планом задачи (14) при $s = \hat{s}$. В силу минимальности s_* имеем

$$s_* \leqslant \hat{s}. \tag{17}$$

Объединив неравенства (16) и (17), придём к формуле

$$r = s_* = \hat{s} = \frac{1}{\sqrt{4n^2 - 3n}}.$$

Теорема 2 доказана. □

10°. Покажем, что константа сильной единственности $r = \frac{1}{\sqrt{n(4n-3)}}$ асимптотически точна. Введём направление

$$v = \frac{1}{2n} e - e_n \tag{18}$$

и рассмотрим луч $c_\alpha = c_* + \alpha v$, $\alpha > 0$. Таким образом,

$$c_\alpha = \frac{1+\alpha}{2n} e - \alpha e_n.$$

Очевидно, что

$$\|c_\alpha - c_*\| = \alpha \frac{\sqrt{4n^2 - 3n}}{2n}.$$

ТЕОРЕМА 3. *Справедливо предельное соотношение*

$$\lim_{\alpha \to +0} \frac{\varphi(c_\alpha) - \varphi(c_*)}{\|c_\alpha - c_*\|} = r. \tag{19}$$

Доказательство. Формулу (19) можно переписать так:

$$\lim_{\alpha \to +0} \frac{2n\varphi(c_\alpha) - 1}{\alpha} = 1. \tag{20}$$

В дальнейшем считаем, что $\alpha \in (0, \frac{1}{n})$.

Вычислим $\varphi(c_\alpha)$. Напомним, что

$$\varphi(c_\alpha) = \max_{x \in \Lambda} \bigl| H(x) - \langle c_\alpha, x \rangle \bigr| = \max_{x \in \Lambda} \Bigl| H(x) + \alpha x_n - \frac{1+\alpha}{2n} \Bigr|. \tag{21}$$

Для выражения под модулем при $x = \frac{1}{n} e$ имеем

$$H\Bigl(\frac{1}{n} e\Bigr) + \frac{\alpha}{n} - \frac{1+\alpha}{2n} = \frac{1+\alpha}{2n}.$$

Вместе с тем, при всех $x \in \Lambda$

$$-H(x) - \alpha x_n + \frac{1+\alpha}{2n} \leqslant \frac{1+\alpha}{2n}.$$

Значит, модуль в правой части формулы (21) можно убрать. Получаем

$$\varphi(c_\alpha) = \max_{x \in \Lambda} \bigl(H(x) + \alpha x_n \bigr) - \frac{1+\alpha}{2n}. \tag{22}$$

Зафиксируем $x_n \in [0,1]$, введём множество

$$\Lambda(x_n) = \Bigl\{ \hat{x} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_{n-1}) \mid \hat{x} \geqslant \mathbb{O},\ \sum_{k=1}^{n-1} \hat{x}_k = 1 - x_n \Bigr\}$$

и функцию

$$h(x_n) = \max_{\hat{x} \in \Lambda(x_n)} \frac{n}{\frac{1}{\hat{x}_1} + \dots + \frac{1}{\hat{x}_{n-1}} + \frac{1}{x_n}}.$$

Тогда формулу (22) можно переписать так:

$$\varphi(c_\alpha) = \max_{x_n\in[0,1]} \big\{h(x_n) + \alpha x_n\big\} - \frac{1+\alpha}{2n}.$$

Отметим, что

$$h(x_n) = \frac{n}{\frac{(n-1)^2}{1-x_n} + \frac{1}{x_n}}.$$

Это равенство очевидно при $x_n = 0$ и $x_n = 1$ (в обеих его частях стоит ноль), а при $x_n \in (0,1)$ следует из неравенства между средним гармоническим и средним арифметическим

$$\frac{1}{\hat{x}_1} + \ldots + \frac{1}{\hat{x}_{n-1}} \geqslant \frac{(n-1)^2}{\hat{x}_1 + \ldots + \hat{x}_{n-1}},$$

которое выполняется как равенство только тогда, когда

$$\hat{x}_1 = \ldots = \hat{x}_{n-1} = \frac{1-x_n}{n-1}.$$

В результате приходим к представлению

$$\varphi(c_\alpha) = \max_{y\in[0,1]} \left\{ \frac{n}{\frac{(n-1)^2}{1-y} + \frac{1}{y}} \right\} - \frac{1+\alpha}{2n}.$$

Выражение в фигурных скобках обозначим через $\Theta(y)$ и найдём его максимум при $y \in [0,1]$. Имеем

$$\Theta(0) = 0, \quad \Theta(1) = \alpha, \quad \Theta\Big(\frac{1}{n}\Big) = \frac{1+\alpha}{n}.$$

При $\alpha \in (0, \frac{1}{n})$ значение $\Theta(\frac{1}{n})$ больше, чем на концах отрезка $[0,1]$. Поэтому, если производная $\Theta'(y)$ обращается в ноль в единственной точке интервала $(0,1)$, то в этой точке достигается максимум.

Вычислим производную $\Theta'(y)$. Получим

$$\Theta'(y) = \frac{1}{\big(n(n-2)y+1\big)^2} \bigg(y^2 \Big[n^2\big(n-2\big)\big(\alpha(n-2)-1\big)\Big] + y\Big[2n\big(\alpha(n-2)-1\big)\Big] + n + \alpha \bigg).$$

Найдем нули производной. Рассмотрим два случая.

Случай 1: $n = 2$. При $n = 2$ коэффициент при y^2 равен нулю. Производная обращается в ноль в единственной точке $y_0 = \frac{2+\alpha}{4}$, которая принадлежит интервалу $(0,1)$. В ней

$$\Theta(y_0) = \frac{(2+\alpha)^2}{8}.$$

Значит, $\varphi(c_\alpha) = \frac{1}{8}(\alpha^2 + 2\alpha + 2)$ и

$$\frac{4\varphi(c_\alpha) - 1}{\alpha} = \frac{\alpha}{2} + 1.$$

Очевидно, что при $n = 2$ соотношение (20) выполняется.

Случай 2: $n > 2$. Введём обозначение $\beta = \sqrt{1 - \alpha(n-2)}$. Тогда $\alpha = \frac{1-\beta^2}{n-2}$ и $\beta \to 1$ при $\alpha \to +0$. Перепишем выражение для $\Theta'(y)$:

$$\Theta'(y) = \frac{1}{\big(n(n-2)y + 1\big)^2}\left(y^2\Big[-n^2\big(n-2\big)\beta^2\Big] + y\Big[-2n\beta^2\Big] + n + \frac{1-\beta^2}{n-2}\right).$$

В больших круглых скобках стоит квадратный трёхчлен, дискриминант которого равен

$$D = 4n^2(n-1)^2\beta^2 > 0.$$

Для его корней справедлива формула

$$y_{1,2} = \frac{\mp(n-1) - \beta}{n(n-2)\beta}.$$

Интервалу $(0,1)$ принадлежит только один корень $y_2 = \dfrac{n-1-\beta}{n(n-2)\beta}$. Вычислим

$$\Theta\left(\frac{n-1-\beta}{n(n-2)\beta}\right) = \frac{(n-1-\beta)^2}{n(n-2)^2},$$

$$\varphi(c_\alpha) = \frac{(n-1-\beta)^2}{n(n-2)^2} - \frac{\alpha+1}{2n} = \frac{n\beta^2 + (n-1)(n-4\beta)}{2n(n-2)^2},$$

$$\frac{2n\varphi(c_\alpha) - 1}{\alpha} = \frac{(3-\beta)n - 4}{(\beta+1)(n-2)}.$$

Последняя дробь стремится к единице при $\alpha \to +0$ (при $\beta \to 1$).

Теорема 3 доказана. □

З а м е ч а н и е. В силу симметричности функции $H(x)$ направление v, определяемое формулой (18), можно заменить на любое направление вида $v = \frac{1}{2n}e - e_i$ при $i \in 1:n$.

ДОБАВЛЕНИЕ 1

Вогнутость среднего гармонического

Покажем, что функция

$$H(x) = n\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}\right)^{-1},$$

равная среднему гармоническому своих аргументов, вогнута на множестве векторов $\mathbb{R}^n_{++}$ с положительными компонентами. Для этого вычислим её второй дифференциал. Имеем

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H(x)}{\partial x_k} &= \frac{1}{nx_k^2}H^2(x),\\
\frac{\partial^2 H(x)}{\partial x_k \partial x_j} &= \frac{2}{n^2x_k^2x_j^2}H^3(x) \text{ при } k \neq j,\\
\frac{\partial^2 H(x)}{\partial x_k^2} &= \frac{2}{n^2}H^3(x)\biggl(\frac{1}{x_k^4} - \frac{1}{x_k^3}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{x_j}\biggr).
\end{aligned}$$

Обозначим $y_j = x_j^{-1}$, $z = (y_1^2, \ldots, y_n^2)$ и запишем формулу для матрицы вторых производных

$$H''(x) = \frac{2H^3(x)}{n^2}\biggl(zz^\top - \Bigl(\sum_{j=1}^{n} y_j\Bigr)\operatorname{diag}\Bigl(y_1^3, \ldots, y_n^3\Bigr)\biggr).$$

При $x \in \mathbb{R}^n_{++}$ второй дифференциал имеет вид

$$\Bigl\langle H''(x)v, v\Bigr\rangle = \frac{2H^3(x)}{n^2}\biggl(\Bigl(\sum_{k=1}^{n} v_k y_k^2\Bigr)^2 - \Bigl(\sum_{k=1}^{n} y_k\Bigr)\Bigl(\sum_{k=1}^{n} v_k^2 y_k^3\Bigr)\biggr).$$

Коэффициент $\dfrac{2H^3(x)}{n^2}$ положительный. По неравенству Коши-Буняковского для векторов

$$b = (y_1^{1/2}, \ldots, y_n^{1/2}), \quad d = (v_1 y_1^{3/2}, \ldots, v_n y_n^{3/2})$$

получим

$$\Bigl(\sum_{k=1}^{n} v_k y_k^2\Bigr)^2 \leqslant \Bigl(\sum_{k=1}^{n} y_k\Bigr)\Bigl(\sum_{k=1}^{n} v_k^2 y_k^3\Bigr).$$

Значит, $\bigl\langle H''(x)v, v\bigr\rangle \leqslant 0$ при всех $v \in \mathbb{R}^n$. Это гарантирует вогнутость функции $H(x)$ на множестве $\mathbb{R}^n_{++}$.

В силу положительной однородности функция $H(x)$ не является строго вогнутой (см. рис. 1).

ДОБАВЛЕНИЕ 2

Наличие полного альтернанса

Покажем, что при $c_* = \frac{1}{2n}e$ разность $f(c_*, x) = H(x) - \langle c_*, x\rangle$ обладает на Ω полным альтернансом. Таким альтернансом будет множество A, состоящее из $n+1$ точек $a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}$, введённое в п. 4°. Согласно (8)

$$\xi_i f(c_*, a_i) = \varphi(c_*), \quad i \in 1 : n+1.$$

Это значит, что в точках a_i достигается максимальное по модулю уклонение функции $f(c_*, x)$ от нуля и что $\xi_i = \operatorname{sign} f(c_*, a_i)$.

Введём векторы $w_i = \xi_i f_c'(c_*, a_i)$. Так как $f_c'(c_*, a_i) = -a_i$ и $a_i = e_i$, $\xi_i = -1$ при $i \in 1 : n$, $a_{n+1} = \frac{1}{n}e$, $\xi_{n+1} = 1$, то

$$w_i = \begin{cases} e_i & \text{при } i \in 1 : n, \\ -\frac{1}{n}e & \text{при } i = n+1. \end{cases}$$

Составим матрицу W из столбцов $w_1, \ldots, w_n, w_{n+1}$,

$$W = \Big[w_1, \ldots, w_n, w_{n+1} \Big],$$

и обозначим через Δ_i определитель подматрицы, которая получается из W исключением i-го столбца, $i \in 1 : n+1$.

Говорят [1–3], что функция $f(c_*, x)$ обладает полным альтернансом, если определители $\Delta_1, \ldots, \Delta_n, \Delta_{n+1}$ отличны от нуля и имеют чередующиеся знаки.

В нашем случае

$$\Delta_i = (-1)^{n+1+i}\, \frac{1}{n} \text{ при } i \in 1 : n, \quad \Delta_{n+1} = 1,$$

то есть функция $f(c_*, x)$ обладает полным альтернансом.

По теории вектор c_* является решением задачи (1) и выполняется неравенство (12) с некоторой константой $r > 0$. В теореме 2 установлено, что неравенство (12) справедливо при $r = \frac{1}{\sqrt{n(4n-3)}}$, а в теореме 3 — что эта константа асимптотически точна.

ЛИТЕРАТУРА

1. Малозёмов В. Н., Певный А. Б. *Альтернансные свойства решений нелинейных минимаксных задач* // ДАН СССР, 1973. Т. 212, № 1. С. 37–39.

2. Даугавет В. А., Малозёмов В. Н. *Нелинейные задачи аппроксимации* // В сб.: Современное состояние теории исследования операций. М.: Наука, 1979. С. 336–363.

3. Demyanov V. F., Malozemov V. N. *Optimality conditions in terms of alternance: two approaches* // JOTA, 2014. Vol. 162, no. 3, pp. 805–820.