КОМПАКТНЫЙ СУБДИФФЕРЕНЦИАЛ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ*

И. В. ОРЛОВ Ф. С. СТОНЯКИН

igor_orlov@mail.ru fedyor@mail.ru

6 октября 2016 г.

1°. Введение. В докладе рассмотрено новое понятие субдифференциала отображений в бесконечномерных пространствах, а также его приложения к теории векторного интегрирования, вариационного исчисления и другим вопросам. Тематика доклада основана на исследованиях, проведённых нами в период с 2007 по 2016 годы, которые подробно описаны, в частности, в работах [1, 2].

На начальном этапе, в случае скалярного аргумента, мы связали новый тип субдифференциала с известной проблемой Радона—Никодима для интеграла Бохнера. Хорошо известно, что наиболее эффективный аналог интеграла Лебега в бесконечномерном случае — интеграл Бохнера — не сохраняет, вообще говоря, одно из принципиальных свойств интеграла Лебега: не всякое абсолютно непрерывное отображение является неопределённым интегралом Бохнера [3]. Наиболее известный подход к этой проблеме заключается в выделении специального класса пространств со свойством Радона—Никодима (RNP), в которых всякое абсолютно непрерывное отображение является неопределённым интегралом Бохнера [4]. Таковы, например, все рефлексивные банаховы пространства. Однако свойством Радона—Никодима не обладают пространства c_0, $L_1[a;b]$ и $C[a;b]$. Это означает, что класс таких пространств недостаточно широк для многих конкретных задач анализа.

Мы подходим к указанной проблеме на базе нового понятия компактного субдифференциала отображений вещественного отрезка в произвольные отделимые локально выпуклые пространства (далее — ЛВП).

2°. Понятие компактного субдифференциала отображений вещественного отрезка в ЛВП. Проблема Радона—Никодима для интеграла Бохнера в ЛВП. Далее под *субпределом* убывающей системы замкнутых

*Семинар по конструктивному негладкому анализу и недифференцируемой оптимизации «CNSA & NDO»: `http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/`

выпуклых подмножеств некоторого ЛВП F мы понимаем предел в метрике Хаусдорфа при условии непустоты и компактности пересечения, под $\overline{\mathrm{co}}\, A$ мы будем понимать выпуклое замыкание множества A в ЛВП E.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Если субпредел

$$\partial_{sub} F(x) = \operatorname*{sublim}_{\delta \downarrow 0} \left(\overline{\mathrm{co}} \left\{ \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \;\middle|\; 0 < |h| < \delta \right\} \right)$$

существует, то он называется *компактным субдифференциалом* (или *K-субдифференциалом*) отображения F в точке $x \in I$. Если $\partial_{sub} F(x)$ существует, то отображение F называется *компактно субдифференцируемым* (или *K-субдифференцируемым*) в точке x.

Если F дифференцируемо в точке x, то $\partial_{sub} F(x) = \{F'(x)\}$. В то же время нетрудно построить примеры компактно субдифференцируемых отображений, не имеющих обычной производной. Например, такой будет функция вещественная функция $f(x) = |x|$ в точке $x_0 = 0$. Приведём более нетривиальный пример.

ПРИМЕР 1. Пусть $f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin \frac{1}{x}\ , & \text{если } x \neq 0\ ; \\ 0, & \text{если } x = 0\ . \end{cases}$

Непосредственно проверяется, что

$$\partial_{sub} f(0) = [-1; 1]\ .$$

Сделаем замечание о связи компактной субдифференцируемости с классической дифференцируемостью на отрезке. Доказано, что в случаях конечномерного и бесконечномерного ЛВП E ситуация в этом вопросе полярна: если E конечномерно, то из компактной субдифференцируемости на отрезке вытекает обычная дифференцируемость почти всюду, в то время, как для бесконечномерных E построен следующий пример всюду компактно субдифференцируемого отображения на $[a; b]$, которое нигде не дифференцируемо, кроме как в одной точке.

ПРИМЕР 2. Пусть $E = E_S$ — пространство всех вещественных функций на $S = \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$ с топологией поточечной сходимости. Определим отображение $F : S \to E$; $F(s) = \xi(s, \cdot)$, $s \in S$, следующим образом:

$$\xi_s(\theta) = \begin{cases} \frac{s}{\theta}, & \text{если } s \leqslant \theta < \frac{2}{3}\ ; \\ \frac{s-1}{\theta-1}, & \text{если } \frac{1}{3} < \theta \leqslant s\ . \end{cases}$$

Непосредственными вычислениями можно установить, что $\forall s \in [0; 1]$ $\partial_{sub} F(s) = [F'_-(s); F'_+(s)]$, причём $F'_-(s)(\cdot) \neq F'_+(s)(\cdot)$ $\forall s \neq 0$, т.е. F недифференцируемо всюду, кроме $s = 0$.

Отметим, что описана связь компактного субдифференциала с другими типами субдифференциалов (типа Кларка, Мишеля—Пено, Фреше, Б.Н. Пшеничного и др.). Подробнее об этом можно почитать в работах [5, 6]. Исследованы арифметические свойства компактного субдифференциала.

ТЕОРЕМА 1. (i) *Если отображение $F : [a; b] \to E$ K-субдифференцируемо в точке x, то для всякого числа $\lambda \in \mathbb{R}$ отображение $\lambda \cdot F$ также K-субдифференцируемо в точке x, причём верно равенство $\partial_{sub}(\lambda \cdot F)(x) = \lambda \cdot \partial_{sub} F(x)$;*

(ii) *(субаддитивность) если отображения $F_{1,2} : [a; b] \to E$ K-субдифференцируемы в точке x, то их сумма $F_1 + F_2 : [a; b] \to E$ также K-субдифференцируема в точке x и верно включение*

$$\partial_{sub}(F_1 + F_2)(x) \subset \partial_{sub} F_1(x) + \partial_{sub} F_2(x) \ .$$

ТЕОРЕМА 2. *Если функция $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ и отображение $F : [a; b] \to E$ K-субдифференцируемы в точке x, то их произведение $f \cdot F$ также K-субдифференцируемо в точке x, причём*

$$\partial_{sub}(f \cdot F)(x) \subset F(x) \cdot \partial_{sub} f(x) + f(x) \cdot \partial_{sub} F(x) \ . \tag{1}$$

ТЕОРЕМА 3. *Если функция $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ K-субдифференцируема в точке x, а отображение $F : [a; b] \to E$ K-субдифференцируемо в точке $y = f(x)$, то композиция $f \circ F$ K-субдифференцируемо в точке x, причём*

$$\partial_{sub} F(f(x)) \subset \partial_{sub} F(y) \cdot \partial_{sub} f(x) \ . \tag{2}$$

Если хотя бы одно из отображений F и f в (1) и (2) является дифференцируемым в обычном смысле, то включения (1) и (2) заменяются на равенства.

Получен также аналог теоремы о среднем для компактно субдифференцируемых отображений.

ТЕОРЕМА 4. *Если отображение $F : [a; b] \to E$ непрерывно на $[a; b]$ и K-субдифференцируемо на $(a; b)$, то*

$$\frac{F(b) - F(a)}{b - a} \in \overline{co} \bigcup_{c \in (a;b)} \partial_{sub} F(c) \ . \tag{3}$$

Далее, исследован ряд свойств сечений (селекторов) $\widehat{\partial}_{sub} F : I \to E$ многозначных отображений $\partial_{sub} F : I \to 2^E$, включая почти всюду сепарабельнозначность. Это позволило получить следующий результат.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть $F : I = [a;b] \to E$ сильно абсолютно непрерывно и почти всюду компактно субдифференцируемо на I. Тогда любое сечение $\widehat{\partial}_{sub}F \in \partial_{sub}F$ интегрируемо по Бохнеру на I и верно равенство*

$$F(x) = F(a) + (B)\int\limits_a^x \widehat{\partial}_{sub}F(t)dt \quad (a \leqslant x \leqslant b)\ . \tag{4}$$

Далее, мы вводим класс *компактно абсолютно непрерывных отображений* $F : I \to E$. Через $E_C = (\operatorname{span} C, \|\cdot\|_C)$ будем обозначать банаховы пространства, порождённые абсолютно выпуклыми компактами $C \in \mathcal{C}(E)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Отображение $F : I \to E$ назовём *компактно абсолютно непрерывным* на I, если

(i) $F : I \to F(a) + E_C$ для некоторого абсолютно выпуклого компакта $C \in \mathcal{C}(E)$;

(ii) F является абсолютно непрерывным в пространстве E_C ($F \in AC(I, E_C)$).

Примем обозначение: $F \in AC_K(I, E)$.

Получен следующий критерий компактной абсолютной непрерывности.

ТЕОРЕМА 6. *Пусть E — отделимое ЛВП. Тогда $F \in AC_K(I,E) \Longleftrightarrow$*

(i) F — неопределённый интеграл Бохнера некоторого отображения $f : I \to E$:

$$F(x) = F(a) + (B)\int\limits_a^x f(t)dt \quad (a \leqslant x \leqslant b)\ ;$$

(ii) $\int\limits_a^b \|f(t)\|_C dt < \infty$ для некоторого $C \in \mathcal{C}(E)$.

В классе пространств Фреше справедливо также обратное утверждение.

ТЕОРЕМА 7. *Пусть E — пространство Фреше. Тогда для любого интегрируемого по Бохнеру отображения $f : I \to E$ существует такой абсолютно выпуклый компакт $C \subset E$, что отображение*

$$F(x) = F(a) + (B)\int\limits_a^x f(t)dt$$

принадлежит классу $AC(I, E_C)$.

Отметим интересное следствие из предыдущей теоремы — аналог формулы Лагранжа для отображений в пространства Фреше. Особенностью этого результата является использование замыкания в топологии некоторого пространства E_C вместо исходной топологии пространства E, что несколько уточняет оценку по сравнению с теоремой 4.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Пусть E — пространство Фреше, отображение $F : [a;b] \to E$ непрерывно на $[a;b]$ и дифференцируемо на $[a;b] \backslash e$, где $mes(e) = mes_w F(e) = 0$, а множество $F'([a;b]\backslash e)$ ограничено. Тогда существует такой абсолютно выпуклый компакт $C \subset E$, что*

$$\frac{F(b) - F(a)}{b - a} \in \overline{\text{co}}_{E_C} \ F'([a;b]\backslash e). \tag{5}$$

3°. Понятие компактного субдифференциала отображений в банаховых пространствах. Вариационные приложения. Теперь перейдём к понятию первого компактного (или сильного) субдифференциала а категории банаховых пространств и покажем примеры его приложений в вариационных задачах. Пусть в некоторой окрестности $U(x)$ точки $x \in E$ задано отображение $f : E \supset U(x) \to F$ и фиксировано направление $h \in E$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Назовем *(компактным) субдифференциалом f по направлению h* следующий субпредел:

$$\partial_{sub} f(x, h) = \operatorname*{sublim}_{\delta \downarrow 0} \left(\overline{\text{co}} \left\{ \frac{f(x + th) - f(x)}{t} : 0 < t < \delta \right\} \right). \tag{6}$$

Если $\partial_{sub} f(x, h)$ сублинеен по h, сублинейный компактнозначный оператор $\partial_{sub} f(x)h = \partial_{sub} f(x, h)$ ограничен по sup-норме и сходимость в (6) равномерна по $\|h\| \leqslant 1$, то назовем $\partial_{sub} f(x)$ *сильным субдифференциалом* f в точке x.

ПРИМЕР 3. В случае функционала $f : E \to \mathbb{R}$ верно:

$$\partial_{sub} f(x, h) = [\underline{\partial} f(x, h); \overline{\partial} f(x, h)],$$

где концы отрезка — нижнее и верхнее производные числа Дини функционала f по направлению h:

$$\underline{\partial} f(x, h) = \liminf_{\lambda \downarrow 0} \frac{f(x + \lambda h) - f(x)}{\lambda},$$

$$\overline{\partial} f(x, h) = \limsup_{\lambda \downarrow 0} \frac{f(x + \lambda h) - f(x)}{\lambda}.$$

Указанные обозначения производных чисел Дини будем использовать далее.

Простым достаточным условием сильной субдифференцируемости является субгладкость, определение которой мы для простоты приведем лишь для функционалов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Назовем f *субгладким* на $U \subset E$ ($f \in C^1_{sub}(U)$), если $\overline{\partial} f(x, \cdot)$ полунепрерывен на U сверху, а $\underline{\partial} f(x, \cdot)$ — снизу.

ПРИМЕР 4. Рассмотрим вариационный функционал

$$\Phi(y) = \int\limits_a^b f(x, y, y')dx \quad (y \in C^1[a; b]). \tag{7}$$

Если, $f \in C^1_{sub}([a; b] \times \mathbb{R}^2)$, то $\Phi \in C^1_{sub}(C^1[a; b])$ и справедливо включение:

$$\partial_{sub}\Phi(y)h \subset$$

$$\subset \left[\int\limits_a^b \left(\underline{\frac{\partial f}{\partial y}}(x, y, y')h + \underline{\frac{\partial f}{\partial y'}}(x, y, y')h' \right) dx; \int\limits_a^b \left(\frac{\overline{\partial}}{\partial y} f(x, y, y')h + \frac{\overline{\partial}}{\partial y'} f(x, y, y')h' \right) dx \right]. \tag{8}$$

Отметим, что в предыдущем равенстве рассматриваются «частные» аналоги производных чисел Дини, которые будут использованы и далее:

$$\underline{\frac{\partial f}{\partial y}}(x, y, y') = \liminf_{\lambda \downarrow 0} \frac{f(x, y + \lambda h, y') - f(x, y, y')}{\lambda},$$

$$\overline{\frac{\partial f}{\partial y}}(x, y, y') = \limsup_{\lambda \downarrow 0} \frac{f(x, y + \lambda h, y') - f(x, y, y')}{\lambda}.$$

Величины $\underline{\frac{\partial f}{\partial y'}}(x, y, y')$ и $\overline{\frac{\partial f}{\partial y'}}(x, y, y')$ вводятся аналогично.

Включение (8) позволяет получить многозначный аналог классического уравнения Эйлера—Лагранжа.

ТЕОРЕМА 8. *Если, в обозначениях и условиях примера 4, Φ достигает экстремума в точке y, то справедливо включение Эйлера—Лагранжа*:

$$0 \in \left[\underline{\frac{\partial f}{\partial y}}(x, y, y') - \frac{d}{dx}\left(\underline{\frac{\partial f}{\partial y'}}(x, y, y') \right);\ \overline{\frac{\partial f}{\partial y}}(x, y, y') - \frac{d}{dx}\left(\overline{\frac{\partial f}{\partial y'}}(x, y, y') \right) \right] \quad (\text{п.в.}) \tag{9}$$

ПРИМЕР 5. Пусть

$$\Phi(y) = \int\limits_0^{\pi/2} |y'^2 - y^2|dx.$$

Здесь, как и в более общих примерах с внешним модулированием интегранта (см. [7]), включение (9) сводится к альтернативе, которая в данном случае принимает следующий вид:

$$\left[\begin{array}{l} \text{либо} \quad y'' + y = 0, \ \text{при}\ y' \neq \pm y; \\ \text{либо} \quad y' = \pm y. \end{array}\right.$$

В частности, функция

$$y_0(x) = \begin{cases} \quad \sin x, \ \text{при}\ 0 \leqslant x \leqslant \pi/4; \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} e^{-\pi/4} \cdot e^x, \text{при}\ \pi/4 \leqslant x \leqslant \pi/2; \end{cases}$$

является субэкстремалью класса C^1, на которой достигается локальный минимум.

Перейдем к субдифференциалам высших порядков. Как известно, построение исчисления высших порядков — проблемный момент в современном субдифференциальном исчислении. Известные нам варианты (например, определение второго субдифференциала в замечательной монографии Б. Мордуховича [8, 9]) не связаны с индуктивным подходом по принципу повторного субдифференцирования. Предлагаемый нами путь определения субдифференциала как компактнозначного полисублинейного оператора позволяет в полной мере применить индуктивный подход и построить содержательную версию субдифференциального исчисления высших порядков. Определение 3 распространяется на отображения в выпуклых нормированных конусах и, тем самым, позволяет ставить вопрос о сильной субдифференцируемости субпроизводного отображения $\partial_{sub} f : E \supset U(x) \to L_{sub}(E; F)$, где $L_{sub}(E; F)$ — конус ограниченных компактнозначных операторов. Таким образом,

$$\partial^2_{sub} f(x) = \partial_{sub}(\partial_{sub} f)(x); \qquad \partial^n_{sub} f(x) = \partial_{sub}(\partial^{n-1}_{sub} f)(x).$$

При этом $\partial^n_{sub} f$ можно рассматривать как полисублинейный симметричный компактнозначный оператор.

Отметим, что понятие субгладкости также распространяется на второй и высшие порядки. В частности, для функционалов субгладкость класса C^n_{sub} означает полунепрерывность сверху (снизу), соответственно, верхних (нижних) производных по направлению n-го порядка.

ПРИМЕР 6. Рассмотрим вновь вариационный функционал (7). Если $f \in C^2_{sub}([a;b]\times\mathbb{R}^2)$, то $\Phi \in C^2_{sub}(C^1[a;b])$ и справедливо включение (в краткой записи):

$$\partial^2_{sub}\Phi(y)(h)^2 \subset$$

$$\subset \Bigg[\int\limits_a^b \left(\frac{\partial^2 f}{\underline{\partial y^2}}(x,y,y')h^2 + \frac{\partial^2 f}{\underline{\partial y\partial y'}}(x,y,y')hh'\right)dx;\ \int\limits_a^b \left(\frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial y^2}(x,y,y')h^2 + \frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial y\partial y'}(x,y,y')hh'\right)dx\Bigg] +$$

$$+\Bigg[\int\limits_a^b \left(\frac{\partial^2 f}{\underline{\partial y'\partial y}}(x,y,y')hh' + \frac{\partial^2 f}{\underline{\partial y'^2}}(x,y,y')h'^2\right)dx;\ \int\limits_a^b \left(\frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial y'\partial y}(x,y,y')hh' + \frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial y'^2}(x,y,y')h'^2\right)dx\Bigg]. \tag{10}$$

Отметим, что $f \in C^2_{sub}([a;b]\times\mathbb{R}^2)$ влечёт $f \in C^1([a;b]\times\mathbb{R}^2)$ и поэтому корректны обозначения:

$$\frac{\partial^2 f}{\underline{\partial y^2}}(x,y,y')h^2 = \frac{\partial}{\underline{\partial y}}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),\quad \frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial y^2}(x,y,y')h^2 = \frac{\overline{\partial}}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),$$

аналогично — для других частных производных чисел.

Оценка (10) позволяет, в частности, получить многозначный аналог классических достаточных условий Лежандра—Якоби для минимума одномерного вариационного функционала.

ТЕОРЕМА 9. *Пусть, в обозначениях и условиях примера 6, y — субэкстремаль функционала (7). Если выполнены условия (в краткой записи):*

(i) $\frac{\partial^2 f}{\underline{\partial y'^2}}(x,y,y') > 0$ *(«нижнее» усиленное условие Лежандра);*

(ii) для каждого из четырех «угловых» уравнений Якоби:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\partial^2 f}{\underline{\partial y'^2}}(x,y,y')\cdot h'\right] - \left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^2 f}{\underline{\partial y\partial y'}}(x,y,y') + \frac{\partial^2 f}{\underline{\partial y'\partial y}}(x,y,y')\right) + \frac{\partial^2 f}{\underline{\partial y^2}}(x,y,y')\right]\cdot h = 0,$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial y'^2}(x,y,y')\cdot h'\right] - \left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial y\partial y'}(x,y,y') + \frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial y'\partial y}(x,y,y')\right) + \frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial y^2}(x,y,y')\right]\cdot h = 0,$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial y'^2}(x,y,y')\cdot h'\right] - \left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^2 f}{\underline{\partial y\partial y'}}(x,y,y') + \frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial y'\partial y}(x,y,y')\right) + \frac{\partial^2 f}{\underline{\partial y^2}}(x,y,y')\right]\cdot h = 0,$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\partial^2 f}{\underline{\partial y'^2}}(x,y,y')\cdot h'\right] - \left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial y\partial y'}(x,y,y') + \frac{\partial^2 f}{\underline{\partial y'\partial y}}(x,y,y')\right) + \frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial y^2}(x,y,y')\right]\cdot h = 0$$

$$(\text{п. в.};\ h(a)=0,\ h'(a)=1) \tag{11}$$

выполнено условие Якоби отсутствия сопряженных точек, то функционал (7) достигает строгого локального минимума в точке y.

ПРИМЕР 7. Пусть

$$\Phi(y) = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} (y'^2 - y|y|)dx \quad \left(y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,\ y\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -sh\,\frac{\pi}{2}\right). \tag{12}$$

Здесь уравнение Эйлера—Лагранжа принимает вид:

$$\left[\begin{array}{l} y'' + y = 0 \ \ (\text{при } y' \geqslant 0); \\ y'' - y = 0 \ \ (\text{при } y' \leqslant 0). \end{array}\right.$$

Таким образом, функция

$$y_0(x) = \begin{cases} \sin x, & (0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}), \\ -shx, & (-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant 0) \end{cases}$$

является субэкстремалью функционала (12); при этом $y_0 \in C^2[a;b]$. «Нижнее» условие Лежандра:

$$\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}}(x,y,y') = \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}(x,y,y') = 2 > 0.$$

выполнено. Проверка «угловых» уравнений Якоби (11) также показывает выполнение условия Якоби. Таким образом, вариационный функционал (12) достигает строгого локального минимума в точке y_0.

4°. **Комментарии о субгладкости.** Сделаем некоторые комментарии о субгладкости функционалов. По сути, субгладкость функционала n переменных $f(x_1, \ldots, x_n)$ — это ключ к применению построенного аппарата субдифференциального исчисления в экстремальных задачах, что обусловлено двумя обстоятельствами:

а) Класс C^1_{sub} — промежуточный между C^1 (и всеми его кусочно-гладкими итерациями) и классом липшицевых функционалов Lip. Однако свойство полунепрерывности субградиента $\big[\underline{\nabla f}; \overline{\nabla f}\big] = \big\{(1-t)\underline{\nabla f} + t\overline{\nabla f} \mid 0 \leqslant t \leqslant 1\big\}$ по направлениям существенно улучшает возможности применений (по сравнению с классом Lip). Отметим, что здесь мы обозначаем:

$$\underline{\nabla f} = \left(\underline{\frac{\partial f}{\partial x_1}}, \ldots, \underline{\frac{\partial f}{\partial x_n}}\right), \quad \overline{\nabla f} = \left(\overline{\frac{\partial f}{\partial x_1}}, \ldots, \overline{\frac{\partial f}{\partial x_n}}\right).$$

б) В классе C^1_{sub} оценки субдифференциалов через нижние и верхние производные по направлениям позволяют уйти от прямого вычисления субдифференциалов и получать условия экстремума в терминах оценок с нижними и верхними производными. Приведем два примера (далее $\Phi : E \to \mathbb{R}, u \in E$ — направление).

(i) Для общих функционалов (при $\Phi \in C^1_{sub}$):

$$\partial_{sub}\Phi(y)h \subset \left[\underline{\frac{\partial\Phi}{\partial h}}(y)h; \overline{\frac{\partial\Phi}{\partial h}}(y)h\right]. \tag{13}$$

В частности, для вариационных функционалов $\Phi(y) = \int\limits_a^b f(x, y, y')\,dx$:

$$\partial_{sub}\Phi(y)h \subset \left[\int\limits_a^b \left(\underline{\frac{\partial f}{\partial y}}h + \underline{\frac{\partial f}{\partial y'}}h'\right)\,dx; \int\limits_a^b \left(\overline{\frac{\partial f}{\partial y}}h + \overline{\frac{\partial f}{\partial y'}}h'\right)\,dx\right].$$

Последнее условие позволяет перейти от классического уравнения Эйлера—Лагранжа: $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, y') - \frac{d}{dx}(\frac{\partial f}{\partial y'}(x, y, y')) = 0$ к так называемому включению Эйлера—Лагранжа:

$$0 \in \left[\underline{\frac{\partial f}{\partial y}} - \frac{d}{dx}\left(\underline{\frac{\partial f}{\partial y'}}\right); \overline{\frac{\partial f}{\partial y}} - \frac{d}{dx}\left(\overline{\frac{\partial f}{\partial y'}}\right)\right]. \tag{14}$$

В свою очередь, последнее условие в случае, скажем, модулированных экстремалей (типа приведенного в тезисах примера $\Phi(y) = \int\limits_0^{\pi/2} \left|y'^2 - y^2\right|dx$) приводит к альтернативам вида: $\left[\begin{array}{l}\text{либо } y'' \pm y = 0;\\ \text{либо } y' \pm y = 0;\end{array}\right.$ с последующим гладким склеиванием полученных «кусков» экстремали (возможно) в бесконечном количестве.

(ii) Для общих функционалов (при $\Phi \in C^2_{sub}$):

$$\partial^2_{sub}\Phi(y)(h, k) \subset \left[\underline{\frac{\partial^2\Phi}{\partial h^2}}(y)(h)^2 + \underline{\frac{\partial^2\Phi}{\partial h\partial k}}(y)(h, k); \overline{\frac{\partial^2\Phi}{\partial h^2}}(y)(h)^2 + \overline{\frac{\partial^2\Phi}{\partial h\partial k}}(y)(h, k)\right] +$$
$$+ \left[\underline{\frac{\partial^2\Phi}{\partial k\partial h}}(y)(k, h) + \underline{\frac{\partial^2\Phi}{\partial k^2}}(y)(k)^2; \overline{\frac{\partial^2\Phi}{\partial k\partial h}}(y)(k, h) + \overline{\frac{\partial^2\Phi}{\partial k^2}}(y)(k)^2\right]. \tag{15}$$

В частности, для вариационных функционалов (для краткости, приводим диагональную форму):

$$\partial^2_{sub}\Phi(y)(h)^2 \subset \left[\int\limits_a^b \left(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}h^2 + \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial y'}}hh'\right)\,dx; \int\limits_a^b \left(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}h^2 + \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial y'}}hh'\right)\,dx\right] +$$
$$+ \left[\int\limits_a^b \left(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y'\partial y}}h'h + \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}}h'^2\right)\,dx; \int\limits_a^b \left(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y'\partial y}}h'h + \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}}h'^2\right)\,dx\right].$$

Последнее условие позволяет перейти от классических достаточных условий Лежандра—Якоби к обобщенным условиям Лежандра—Якоби;

«нижнее» усиленное условие Лежандра: $\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}}(x, y, y') > 0$;

выполнение условия Якоби отсутствия сопряженных точек для четырех типов «угловых» уравнений Якоби:

$$\frac{d}{dx}\left(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}}h'\right) - \left[\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{d}{dx}\left(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'}} + \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y' \partial y}}\right)\right]h = 0,$$

$$\frac{d}{dx}\left(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}}h'\right) - \left[\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{d}{dx}\left(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'}} + \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y' \partial y}}\right)\right]h = 0,$$

$$\frac{d}{dx}\left(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}}h'\right) - \left[\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{d}{dx}\left(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'}} + \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y' \partial y}}\right)\right]h = 0.$$

$$\frac{d}{dx}\left(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}}h'\right) - \left[\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{d}{dx}\left(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'}} + \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y' \partial y}}\right)\right]h = 0.$$

$$(\text{п. в.};\ h(a) = 0,\ h'(a) = 1)$$

Например, в рассмотренном выше (в п. б) (i)) примере модулированного гармонического осциллятора эти условия легко проверяются на субэкстремали

$$y(x) = \begin{cases} \sin x,\ 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}; \\ \frac{1}{\sqrt{2}}e^{x-\frac{\pi}{4}},\ \frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

в) Приведенные в п. б) общие оценки (13) – (15) позволяют исследовать и другие типы экстремальных задач для интегральных функционалов, включая задачи на условный экстремум, с соответствующим обобщением метода множителя Лагранжа. В качестве простейшего примера рассмотрим вариационную задачу с подвижной границей.

$$\Phi(x_1, y) = \int\limits_{x_0}^{x_1} f(x, y, y')\,dx \mapsto extr. \quad \left(y|_{x_1} = \varphi(x_1);\ f \in C^1_{sub};\ \varphi \in C^1\right).$$

Здесь классическое условие трансверсальности: $f|_{x_1} + (\varphi' - y')\cdot\frac{\partial f}{\partial y'}|_{x_1} = 0$ переходит в так называемое «включение трансверсальности»:

$$0 \in f|_{x_1} + (\varphi' - y')\cdot\left[\underline{\frac{\partial f}{\partial y'}}; \overline{\frac{\partial f}{\partial y'}}\right],$$

которое комбинируется с включением Эйлера—Лагранжа (14).

5°. Простейшие примеры, приводящие к субгладкости.

(i) Модуляции гладких функционалов: внешние ($|\Phi(y)|$), внутренние ($\Phi|y|$), кратные комбинации. Примеры (в $\mathbb{R}$):

а) $y = |f(x)|$ (рис. 1) сводится к $\left[\underline{\frac{df}{dx}}; \overline{\frac{df}{dx}}\right]$, как и для субдифференциалов Моро—Рокафеллара.

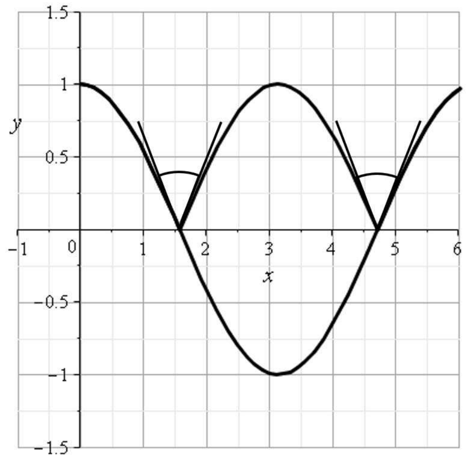

Рис. 1. Модулирование выражения для значения функции

б) $y = f(|x|)$ (рис. 2) сводится к $[-f'(0); +f'(0)]$.

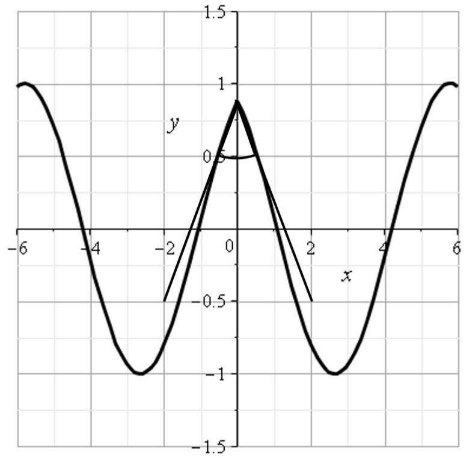

Рис. 2. Пример модулирования аргумента

в) $f_0(x) = |f_1(x)| + |f_2(x)|$; если нули функций не совпадают, сводится к п. а); в случае общего нуля возникают отрезки типа

$$\left[\underline{\frac{d}{dx}}(f_1 - f_2);\ \overline{\frac{d}{dx}}(f_1 + f_2)\right] \text{ и т. п.}$$

г) $f(x) = \big||f_1(x) - f_2(x)| - |f_3(x) - f_4(x)|\big|$ — и т. д. Ситуация усложняется, но если нули f_i различны, все сводится к п. а).

д) Вариационные функционалы. Особый интерес представляют случаи типа

$$\Phi(y) = \int_a^b |f(x, y, y')|\,dx;\ \Phi(y) = \int_a^b f(x, y, |y'|)\,dx \text{ и т. п.}$$

(ii) «Быстрые» осцилляции функционалов и их интегрантов. Простейшие примеры.

а) $\varphi(x) = \int\limits_0^x \sin\frac{1}{t}\,dt \quad (x \neq 0),\ f(0) = 0$ (рис. 3).

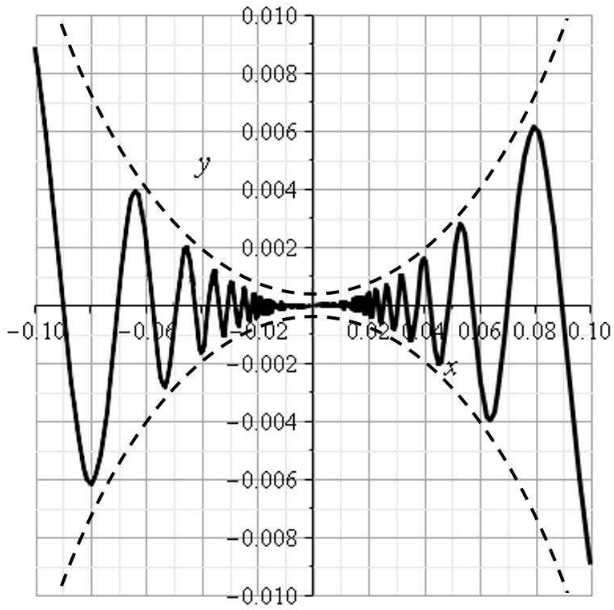

Рис. 3. График к первому примеру функционала с «быстрой» осцилляцией

Здесь $\partial_{sub}\varphi(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x},\ x \neq 0; \\ [-1; 1]\,,\ x = 0, \end{cases}$ откуда следует $\varphi \in C^1_{sub}(0)$.

б) $\Phi(y) = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} xy \cdot \varphi(y')\, dx$, где f задано в примере а).

Здесь $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,y') = y \cdot \varphi(y')$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,y') = x \cdot \varphi(y')$;

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)_{sub}(x,y,y') = \begin{cases} xy \cdot \sin\frac{1}{y'}, \text{ при } y' \neq 0; \\ xy \cdot [-1;1]\,, \text{ при } y' = 0. \end{cases}$$

В частности, включение Эйлера—Лагранжа для данного вариационного функционала принимает вид:

$$\begin{cases} x \cdot \varphi(y') - (y \cdot \sin\frac{1}{y'} + xy' \cdot \sin\frac{1}{y'} - \frac{xy}{y'^2} \cdot \cos\frac{1}{y'}) = 0, \text{ при } y' \neq 0; \\ 0 \in [-y;y]\,, \end{cases}$$

что сводится к первому уравнению системы при $y' \neq 0$.

(iii) Комбинируя предыдущие случаи, можно заметить, что рассмотренная техника позволяет исследовать случаи всевозможных комбинаций модулирования и осциллирования, то есть весьма общий класс экстремальных задач.

Приведем простой пример.

ПРИМЕР 8. $\Phi(y) = \int\limits_{-1}^{1} (|y'| - \cos\ln(x^2+y^2))\, dx$.

Здесь при $y' \neq 0$ и $x^2 + y^2 \neq 0$ лагранжиан имеет вид:

$$L(y) = \frac{2y \cdot \sin\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2},$$

что приводит к альтернативе:

$$\left[\begin{array}{c} y \cdot \sin\ln(x^2+y^2) = 0; \\ y' = 0. \end{array}\right.$$

Вот один из классов C^1-гладких субэкстремалей, полученных «склеиванием» линейного и квадратичного кусков:

$$y_n(x) = \begin{cases} \sqrt{e^{\pi n} - x^2}, & 0 \leqslant x \leqslant 1; \\ e^{\frac{\pi n}{2}}, & -1 \leqslant x \leqslant 0. \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{Z})$$

Реализация экстремума вариационного функционала на данных субэкстремалях проверяется непосредственно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Орлов И. В., Стонякин Ф.С. *Новые методы негладкого анализа и их приложения в векторном интегрировании и теории оптимизации.* — Симферополь: ДИАЙПИ, 2016. — 320 с.

2. Орлов И. В. *Введение в сублинейный анализ.*// Соврем. мат. Фундам. направл. – 2014. – Т. 53. – С. 64–132.

3. *Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы.* — М.: ИЛ, 1962. — 829 с.

4. *Diestel J., Uhl J.J. Vector Measures.* — Providence, Amer. Math. Soc., 1977.

5. Стонякин Ф. С. *Сравнение компактного субдифференциала с субдифференциалами Кларка, Фреше и обобщёнными дифференциалами Сассманна.* // Компьютерная математика. – 2008. – № 2. – С. 50–56.

6. Стонякин Ф. С. *Сравнительный анализ понятия компактного субдифференциала* // Вестник Харьковского национального университета им. В.Н. Каразина. Серия «Математика, прикладная математика и механика» – 2009. – № 850. – С. 11–21.

7. Орлов И. В., Стонякин Ф. С., Смирнова С. И. *Учебно-методическое пособие по курсу «Выпуклый и негладкий анализ» для судентов магистратуры факультета математики и информатики Таврической академии Крымского федерального университета им. В.И. Вернадского.* — Симферополь: ДИАЙПИ, 2016. – 104 с.

8. Mordukhovich B. S. *Variational analysis and generalised differentiation. I. Basic theory.* — Berlin: Springer-Verlag. – 2006. – xxii+579 p.

9. Mordukhovich B. S. *Variational analysis and generalised differentiation. II. Applications. – Berlin: Springer-Verlag.* – 2006. – xxii+610 p.