СТРОГОЕ ПОЛИНОМИАЛЬНОЕ ОТДЕЛЕНИЕ ДВУХ МНОЖЕСТВ*

В. Н. Малозёмов А. В. Плоткин

v.malozemov@spbu.ru avplotkin@gmail.com

20 октября 2016 г.

Аннотация. Как известно, задача *наилучшего линейного отделения* двух конечных множеств в евклидовом пространстве сводится к задаче линейного программирования. В этом докладе мы покажем, что задача *строгого полиномиального отделения* двух конечных множеств также сводится к задаче линейного программирования.

1°. Пусть в пространстве $\mathbb{R}^n$ заданы два конечных множества

$$A = \{a_i\}_{i=1}^m \quad \text{и} \quad B = \{b_j\}_{j=1}^k.$$

Рассмотрим обобщённый полином

$$P(x,t) = \sum_{s=1}^r x[s] u_s(t), \quad t \in \mathbb{R}^n,$$

где $u_s(t)$ — непрерывные функции от n переменных.

Будем говорить, что множества A и B *строго полиномиально отделимы*, если найдётся вектор коэффициентов $x_0 \in \mathbb{R}^r$, такой что

$$\begin{aligned} &P(x_0, a_i) \geqslant 1 \text{ при всех } i \in 1:m, \\ &P(x_0, b_j) \leqslant -1 \text{ при всех } j \in 1:k. \end{aligned} \tag{1}$$

При этом отделяющая «гиперповерхность» определяется уравнением

$$P(x_0, t) = 0.$$

Покажем, что построение отделяющего полинома $P(x_0, t)$ сводится к решению задачи линейного программирования.

*Семинар по конструктивному негладкому анализу и недифференцируемой оптимизации «CNSA & NDO»: `http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/`

2°. Введём функцию

$$f(x) = \max\Big\{\max_{i\in 1:m}\big[1 - P(x,a_i)\big]_+,\ \max_{j\in 1:k}\big[1 + P(x,b_j)\big]_+\Big\},$$

где $[u]_+ = \max\{0,u\}$. Очевидно, что $f(x) \geqslant 0$ при всех $x \in \mathbb{R}^r$.

ЛЕММА. *Полином $P(x_0,t)$ строго отделяет множества A и B тогда и только тогда, когда $f(x_0) = 0$.*

Доказательство. Условия строгого отделения (1) можно переписать в эквивалентном виде

$$\max_{i\in 1:m}\big[1 - P(x_0,a_i)\big]_+ = 0 \quad \text{и} \quad \max_{j\in 1:k}\big[1 + P(x_0,b_j)\big]_+ = 0. \tag{2}$$

Теперь заключение леммы становится очевидным. □

Лемма показывает, что задача строгого полиномиального отделения множеств A и B сводится к минимизации функции $f(x)$ на $\mathbb{R}^r$.

3°. Рассмотрим экстремальную задачу

$$f(x) \to \min_{x\in\mathbb{R}^r}. \tag{3}$$

ТЕОРЕМА 1. *Задача (3) эквивалентна следующей задаче линейного программирования:*

$$\begin{aligned} w &\to \min \\ P(x,a_i) + w &\geqslant 1, \quad i \in 1:m; \\ -P(x,b_j) + w &\geqslant 1, \quad j \in 1:k; \\ w &\geqslant 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Доказательство. Ограничения задачи (4) можно переписать так:

$$\begin{aligned} w &\geqslant \big[1 - P(x,a_i)\big]_+, \quad i \in 1:m; \\ w &\geqslant \big[1 + P(x,b_j)\big]_+, \quad j \in 1:k. \end{aligned} \tag{5}$$

Напомним [1, с. 11–13], что две задачи на минимум называются эквивалентными, если любому плану каждой из этих задач можно сопоставить план другой задачи с равным или меньшим значением целевой функции. В данном случае плану $x \in \mathbb{R}^r$ задачи (3) сопоставим вектор (x,w), где $w = f(x)$. Согласно (5), вектор (x,w) является планом задачи (4), при этом $w = f(x)$.

Наоборот, пусть (x,w) — план задачи (4). Тогда x — план задачи (3). При этом, в силу (5), $f(x) \leqslant w$.

Теорема доказана. □

4°. Задача линейного программирования (4) имеет решение, поскольку множество её планов непусто (за счёт w) и целевая функция ограничена снизу нулём. По лемме об эквивалентных экстремальных задачах задача (3) также имеет решение, причём минимальные значения целевых функций у задач (3) и (4) равны между собой. Обозначим это общее значение через w_*.

ТЕОРЕМА 2. *Величина* w_* *может принимать только два значения:*
0 *или* 1.

Доказательство. Пусть (x_*, w_*) — решение задачи (4). Ясно, что $w_* \geqslant 0$. Так как пара $x = \mathbb{O}$, $w = 1$ является планом задачи (4) со значением целевой функции, равным единице, то $w_* \leqslant 1$. Таким образом, $w_* \in [0, 1]$.

Предположим, что $w_* \in (0, 1)$. Согласно (4) для полинома $P(x_*, t)$ выполняются неравенства

$$\begin{aligned} &P(x_*, a_i) \geqslant 1 - w_*, \quad i \in 1:m; \\ &P(x_*, b_j) \leqslant -(1 - w_*), \quad j \in 1:k. \end{aligned}$$

Пара $x_0 = \frac{1}{1-w_*} x_*$, $w_0 = 0$ удовлетворяет ограничениям задачи (4). Значит, необходимо $w_* \leqslant w_0$, что противоречит выбору w_*.

Для w_* остаются только две возможности: $w_* = 0$ или $w_* = 1$.

Теорема доказана. □

5°. Строгое полиномиальное отделение множеств A и B сводится к решению задачи линейного программирования (4). Если (x_*, w_*) — решение этой задачи, то при $w_* = 0$ полином $P(x_*, t)$ строго отделяет множества A и B. При $w_* = 1$ строгое полиномиальное отделение множеств A и B невозможно.

6°. Ниже мы приводим восемь примеров строгого отделения двух множеств на плоскости с помощью алгебраических полиномов 4-й степени от двух переменных (см. рисунки).

ЛИТЕРАТУРА

1. Гавурин М. К., Малозёмов В. Н. *Экстремальные задачи с линейными ограничениями.* Л.: Изд-во ЛГУ, 1984. 176 с.

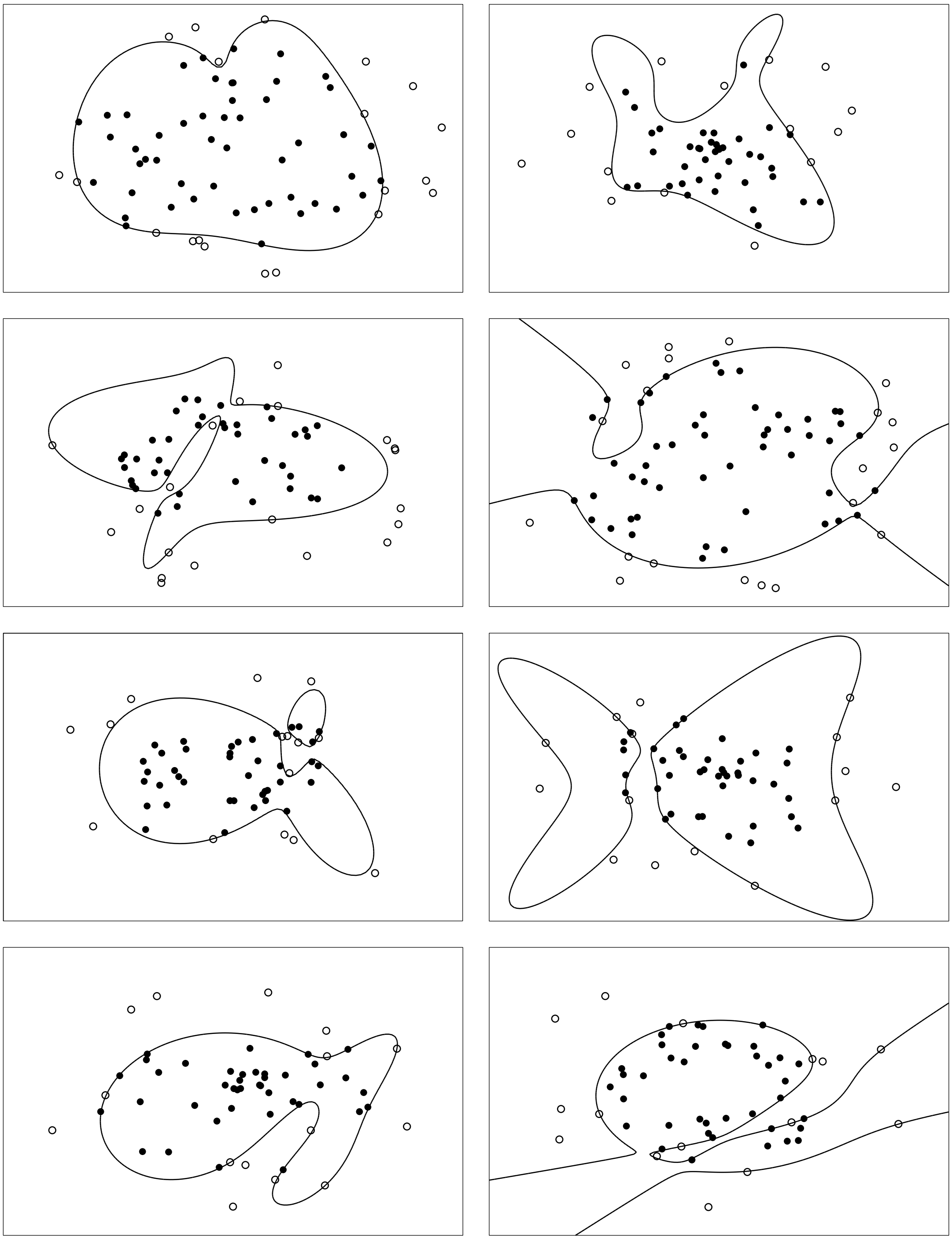

Рис. Строгое отделение двух множеств с помощью полиномов 4-й степени