ПОСТРОЕНИЕ ПОЛЯРНОГО КОНУСА К МНОГОГРАННОМУ ВЫПУКЛОМУ КОНУСУ*

Л.Н. Полякова

lnpol07@mail.ru

17 марта 2016 г.

1°. Постановка задачи. Задача определение конуса, полярного к данному многогранному конусу, возникает во многих математических проблемах. Например, в определении фундаментальной системы решений однородной системы линейных неравенств [1, 2], в задачах многокритериальной оптимизации [3]. Теория линейных неравенств является одним из хорошо изученных разделов выпуклого анализа. В книге [1] рассматриваются алгоритм Моцкина-Бургера или алгоритм Черниковой [2] для нахождения порождающих векторов двойственного конуса.

В данном докладе предлагаются алгоритмы построения в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ остова и граней заданного многогранного конуса и остова конуса, полярного к данному.

Рассмотрим выпуклый многогранный конус

$$Q = \text{cone co } \left\{ \bigcup_{i=1}^{m} a_i \bigcup O_3 \right\}, \ a_i \in \mathbb{R}^3, \ ||a_i|| \neq 0, \ m \geq 3.$$

Здесь и далее через cone A обозначена замкнутая коническая оболочка множества A, а через co A – выпуклая оболочка A. Будем считать, что среди векторов $a_i, \ i \in I = 1, \dots, m$, нет пропорциональных. Векторы $a_i, \ i \in I$, называются *порождающими или образующими* векторами для конуса Q. Конус Q замкнут. Предположим, что конус Q является телесным (с непустой внутренностью) и острым. Конус называется *острым*, если он не содержит ненулевых подпространств. Таким образом, острый конус не содержит целиком ни одной прямой. Для острого многогранного конуса существует единственное (с точностью до положительного скаляра) порождающее множество, элементы которого называются *остовом* конуса. Полупрямые, содержащие векторы остова, называются его *ребрами* [4].

*Семинар по конструктивному негладкому анализу и недифференцируемой оптимизации «CNSA & NDO»: `http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/`

В трехмерном случае каждая грань многогранного конуса является плоским выпуклым конусом. Необходимо построить конус, полярный к конусу Q [5]

$$Q^o = \left\{ \ x \in \mathbb{R}^3 \ \middle| \ \langle a_i, x \rangle \leqslant 0, \quad a_i \in \mathbb{R}^3, \ i \in I \right\}. \qquad (1)$$

Множество Q^o также является выпуклым телесным многогранным острым конусом [4, 5]. Для того чтобы определить множество точек, являющихся решениями однородной системы линейных неравенств (1), необходимо найти остов конуса Q^o. Тогда конус Q^o может быть представлен в виде

$$Q^o = \text{cone co } \left\{ \bigcup_{j=1}^{p} b_j \right\}, \quad b_j \in \mathbb{R}^3,$$

где b_i, $j \in J = 1, \ldots, p$, — остов конуса Q^o.

2°. Предварительные построения. Так как конус $Q \subset \mathbb{R}^3$ — острый, то его можно повернуть таким образом, чтобы он полностью находился в верхнем полупространстве, и пересечение полученного конуса с координатной плоскостью Oxy состояло бы только из нулевой точки. Для этого необходимо найти ненулевой вектор $v \in Q$, который будет полностью лежать во внутренности конуса Q и составлять с каждым вектором $a_i, i \in I$, острый угол. Тогда

$$\langle v, x \rangle > 0 \quad \forall x \in Q.$$

Такой вектор $v \in Q$ существует в силу нашего предположения. Затем к нему применить преобразование Хаусхолдера [6] таким образом, чтобы после поворота этот вектор лежал на оси Oz, т. е. имел вид $v' = (0, 0, z)^T$, $z > 0$.

Замечание 1. Если оказалось, что у всех векторов $a_i, i \in I$, первая (вторая или третья) координата имеет одинаковый знак, то преобразование Хаусхолдера можно не проводить, поскольку в этом случае данные векторы лежат в одном из полупространств.

3°. Алгоритм преобразования Хаусхолдера. Для того чтобы повернуть вектор в пространстве необходимо подействовать на него ортогональным оператором. Преобразование Хаусхолдера (оператор Хаусхолдера) — линейное преобразование векторного пространства, которое описывает его отображение относительно некоторой гиперплоскости, проходящей через начало координат. Рассмотрим его более подробно. Пусть $v = (v_1, v_2, v_3)^T \in \mathbb{R}^3$, вектор к которому надо применить оператор Хаусхолдера. Матрица такого оператора имеет вид

$$H = E_3 - \frac{2uu^T}{u^T u},$$

где

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad u = v + \sigma\|v\|e_3\,, \quad e_3 = (0,0,1)^T, \quad \sigma = \begin{cases} -1, & v_3 \geqslant 0, \\ 1, & v_3 < 0. \end{cases}$$

Введение константы σ позволяет уменьшить влияние ошибок округления. Матрица H является ортогональной. После применения оператора H к вектору v, получим вектор v', который лежит на оси Oz, $z > 0$, и $v' = (0,0,z)^T$. Подействуем матрицей H на векторы a_i, $i \in I$, т. е. повернем их также с помощью полученной матрицы H. Имеем

$$a_i' = Ha_i, \quad i \in I.$$

Как известно, при действии ортогонального оператора на вектор, его длина не изменится. В нашем случае и угол между каждым из векторов a_i', $i \in I$, и $v' = (0,0,z)^T$ останется прежним. Поэтому все полученные векторы также лежат в верхнем полупространстве, т.е. их третья координата положительна. Таким образом, конус Q повернулся и находится в верхнем полупространстве. Обозначим его через

$$Q' = \text{cone }\ \text{co}\left\{\bigcup_{i=1}^{m} a_i'\right\}, \quad a_i' \in \mathbb{R}^3.$$

Пусть $e = (0,0,1)^T$. Направление вектора e совпадает с направлением вектора v' . Следовательно, вектор e принадлежит внутренности конуса Q'. Разделим все векторы a_i' на их третью координату, чтобы у всех рассматриваемых векторов третья координата была равна единице $\bar{a}_i = \dfrac{a_i'}{||a_i'||}$, $i \in I$. Очевидно, что $\bar{a}_i, i \in I$, лежат в одной плоскости $z = 1$ и имеют координаты $\bar{a}_i = (\bar{a}_{1i}, \bar{a}_{2i}, 1)^T$.

Натянем на эти векторы выпуклую оболочку

$$M = \text{co }\left\{\bigcup_{i\in I} \bar{a}_i\right\}.$$

Отметим, что многогранник M также лежит в плоскости $z = 1$. Заметим также, что

$$Q' = \text{cone }\ \text{co }\ \left\{\bigcup_{i=1}^{m} \bar{a}_i\right\}.$$

Обозначим $b_i = (\bar{a}_{1i}, \bar{a}_{2i})^T \in \mathbb{R}^2$, $i \in I$.

Замечание 2. С помощью преобразования Хаусхолдера можно рассматриваемый конус расположить в любом полупространстве, определяемом декартовыми координатными плоскостями.

Замечание 3. Между остовом конуса Q' и крайними точками (вершинами) многогранника M существует взаимно однозначное соответствие.

4°. Построение выпуклой оболочки на плоскости. Для того чтобы построить конус, полярный к конусу Q', необходимо найти вершины многогранника M и определить в каком порядке они расположены. Прежде всего, надо исключить векторы $\bar{a}_i,\ i \in I$, которые лежат во внутренности конуса Q'.

Рассмотрим алгоритм построения выпуклой оболочки в пространстве $\mathbb{R}^2$, поскольку векторы $\bar{a}_i$ лежат в плоскости $z = 1$. На плоскости существует несколько алгоритмов для ее построения [7, 8], например, алгоритм Грехема. Как и в алгоритме Грехема будем последовательно рассматривать тройки векторов.

Пусть задан на плоскости набор различных точек

$$\mathcal{M} = \bigcup_{k=1}^{r} b_k,\ k = 1, \ldots, r,\ r \geq 3.$$

Обозначим через $\mathcal{C}(\mathcal{M})$ выпуклую оболочку множества $\mathcal{M}$, а через $\mathcal{E}$ – множество ее крайних точек, т. е.

$$\mathcal{C}(\mathcal{M}) = \mathrm{co}\ \mathcal{M}, \quad \mathcal{E} = \mathrm{ext}\ \mathcal{C}(\mathcal{M}).$$

Предположим, что нулевая точка является внутренней многогранника $\mathcal{C}(\mathcal{M})$ $(0 \in \mathrm{ri}\ \mathcal{C}(\mathcal{M})$. Выберем точку $\bar{b}_1 \in \mathcal{M}$ с наименьшей ординатой из данного множества или самую левую из таких точек при наличии совпадений. Эта точка заведомо является вершиной выпуклой оболочки. После этого введем полярную систему координат таким образом, чтобы полюс находился в нулевой точке, а полярная ось проходила через $\bar{b}_1 \in \mathcal{M}$. Под положительным направлением, как правило, понимается направление движения против часовой точки. Найдем полярные координаты точек $b_k \in \mathcal{M},\ k = 1, \ldots, r$, в данной полярной системе координат:

$$b_k = (\rho_k, \varphi_k) \in \mathcal{M},\ k = 1, \ldots, r, \quad \rho_k \in (0, +\infty), \quad \varphi_k \in [0; 2\pi].$$

Отсортируем точки $b_k,\ k = 1, \ldots, r$, в порядке возрастания полярного угла. Если полярный угол какой-либо точки совпадает с углом другой, то точка с наименьшим ρ_k удаляется из списка. Через $\mathcal{M}_1$ обозначим полученное множество

$$\mathcal{M}_1 = \bigcup_{j \in J} \bar{b}_j, \quad \bar{b}_j = (\rho_j, \varphi_j), \quad j \in J = 1, \ldots, r_1, \quad r_1 \leq r, \quad r_1 \geq 3, \quad \bar{b}_j \in \mathcal{M}.$$

Далее тройки последовательных точек многократно проверяются в порядке обхода против часовой стрелки с целью определить, являются ли они вершинами выпуклой оболочки множества $\mathcal{M}$.

Рассмотрим четыре точки на плоскости $O(0,0)$, $A(a_x,a_y)$, $B(b_x,b_y)$, $C(c_x,c_y)$, причем вектор $\overrightarrow{OB}$ лежит между лучами с образующими векторами $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OC}$. Будем считать, что угол между $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OC}$ меньше π. Образуем треугольник OAC. Вычислим косинусы углов между векторами $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{AB}$ и между $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{AC}$:

$$\alpha_1 = \cos\angle\widehat{\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AB}} = \frac{\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}}{||\overrightarrow{AO}||||\overrightarrow{AB}||} = \frac{-a_x(b_x-a_x)-a_y(b_y-a_y)}{\sqrt{a_x^2+a_y^2}\sqrt{(b_x-a_x)^2+(b_y-a_y)^2}},$$

$$\alpha_2 = \cos\angle\widehat{\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AB}} = \frac{\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}}{||\overrightarrow{AO}||||\overrightarrow{AC}||} = \frac{-a_x(c_x-a_x)-a_y(c_y-a_y)}{\sqrt{a_x^2+a_y^2}\sqrt{(c_x-a_x)^2+(c_y-a_y)^2}}.$$

Поскольку тригонометрическая функция косинус является монотонно убывающей на $[0,\pi]$, то если $\alpha_1 \geq \alpha_2$, то точка B лежит внутри треугольника OAC. Если $\alpha_1 < \alpha_2$, то – вне. Этот алгоритм будет использован при нахождении вершин выпуклой оболочки.

Выберем первые три точки $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3 \in \mathcal{M}_1$. Заметим, что по построению, точка $\bar{b}_1$ является вершиной выпуклой оболочки. Если $\varphi_3 \geq \pi$, то точка $\bar{b}_2$ – вершина множества $\mathcal{C}(\mathcal{M})$, т. е. $\bar{b}_2 \in \mathcal{E}$ Если $\varphi_3 < \pi$, то построим треугольник с вершинами в точках $0, \bar{b}_1, \bar{b}_3$ ($\Delta_1 = \text{co}(0,\bar{b}_1,\bar{b}_3)$) и определим по ранее сформулированному алгоритму, принадлежит ли точка $\bar{b}_2$ этому треугольнику или нет. Возможны два варианта:

1) Если точка $\bar{b}_2 \notin \Delta_1$, то $\bar{b}_2 \notin \mathcal{E}$. Переходим к рассмотрению тройки точек $\bar{b}_1$, $\bar{b}_3$, $\bar{b}_4 \in \mathcal{M}_1$.

2) Если точка $\bar{b}_2 \in \Delta_1$, то $\bar{b}_2 \in \mathcal{E}$. Переходим к рассмотрению тройки точек $\bar{b}_2$, $\bar{b}_3$, $\bar{b}_4 \in \mathcal{M}_1$.

Просмотр завершается, когда обойдя все точки множества $\mathcal{M}$ придем в точку $\bar{b}_1$. На последнем шаге в рассматриваемую тройку включается точка $\bar{b}_1$. В результате будет построено множество, состоящее из вершин выпуклой оболочки $\mathcal{M}$ в нужном порядке.

Если снова перейти в трехмерное пространство и через каждую вершину $\mathcal{M}$ провести луч из нулевой точки, то мы получим множество крайних лучей конуса Q'. Будем считать, что

$$\mathcal{E} = \bigcup_{i\in I_1} a_i', \quad I_1 = 1,\dots m_1, \quad m_1 \geq 3, \quad Q' = \text{ cone co } (\mathcal{E}).$$

5°. Построение полярного конуса. Каждая грань конуса Q' представляет из себя плоскость, натянутую на два крайних вектора построенной выпуклой оболочки. Порядок следования граней известен из построения. Для того чтобы найти крайние лучи конуса, полярного к конусу Q', необходимо найти проекцию точки $t = (0, 0, 1)^T$ на каждую грань этого конуса.

Опишем алгоритм проектирования точки на грань натянутую на векторы $c_1,\ c_2$.

$$\begin{cases} c_1' = (x_1, y_1, z_1), \\ c_2' = (x_2, y_2, z_2). \end{cases} \tag{2}$$

Составим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix}.$$

Матрица оператора проектирования на эту грань имеет вид [9]

$$P_{c_1,c_2} = A^T(AA^T)^{-1}A = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}.$$

Проекция точки $t = (0, 0, -1)^T$ на грань, образованную векторами a_1' и a_2' находится по формуле

$$t_{a_1',a_2'} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{13} \\ p_{23} \\ p_{33} \end{pmatrix},$$

где

$$p_{13} = \frac{x_1}{\alpha_1\alpha_2 - \beta^2}(\alpha_2 - \beta) + \frac{x_2}{\alpha_1\alpha_2 - \beta^2}(\alpha_1 - \beta),$$

$$p_{23} = \frac{y_1}{\alpha_1\alpha_2 - \beta^2}(\alpha_2 - \beta) + \frac{y_2}{\alpha_1\alpha_2 - \beta^2}(\alpha_1 - \beta),$$

$$p_{33} = \frac{\alpha_1 - 2\beta + \alpha_2}{\alpha_1\alpha_2 - \beta^2},$$

$$\alpha_1 = x_1^2 + y_1^2 + 1, \quad \alpha_2 = x_2^2 + y_2^2 + 1, \quad \beta = x_1x_2 + y_1y_2 + 1.$$

Проектируем точку $t = (0, 0, 1)^T$ на каждую грань, натянутую на векторы $a_i',\ a_{i+1}',\ i = 1, \ldots, m_1 - 1$, и на грань, образованную $a_{m_1}',\ a_1'$. Отрезок $(a_i')^*,\ i \in I_1$, соединяющий точку $t = (0, 0, 1)^T$ и ее проекцию на грань, лежит на луче, который ортогонален соответствующей грани конуса Q'. После проектирования точки $(0, 0, 1)^T$ на все вышеперечисленные грани, найдем образуюшие векторы крайних лучей конуса с вершиной в точке $(0, 0, 1)^T$, который после параллельного переноса его вершины в начало координат является конусом Q'^o, полярным к конусу Q'. К построенному конусу Q'^o снова применим преобразование Хаусхолдера, чтобы повернуть его на прежнее место. Для матрицы обратного преобразования Хаусхолдера в силу симметричности и ортогональности матрицы H справедливо

$$H^{-1} = H^T = H.$$

Таким образом, построенный конус является полярным конусом Q^o для конуса Q. Этот конус является решением системы линейных однородных неравенств (1).

Замечание 4. Основной вычислительной трудностью данного алгоритма является задача определения вектора, лежащего во внутренности заданного конуса и образующего с каждым вектором острый угол. В самом общем случае его можно найти, если решить определенную задачу квадратичного программирования. Обозначим этот вектор через v. Поскольку $v \in Q$, то его можно представить в виде выпуклой линейной комбинации векторов a_i:

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \geqslant 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Найдем коэффициенты λ_i. Рассмотрим матрицу

$$G = \begin{pmatrix} \langle a_1, a_1 \rangle & \langle a_1, a_2 \rangle & ... & \langle a_1, a_n \rangle \\ \langle a_2, a_1 \rangle & \langle a_2, a_2 \rangle & ... & \langle a_2, a_n \rangle \\ ... & ... & ... & ... \\ \langle a_n, a_1 \rangle & \langle a_n, a_2 \rangle & ... & \langle a_n, a_n \rangle \end{pmatrix}.$$

Введем вектор $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ и составим квадратичную функцию:

$$f(\lambda) = \frac{1}{2} \langle G\lambda, \lambda \rangle.$$

Решая задачу квадратичного программирования

$$\min_{\sum \lambda_i = 1,\, \lambda_i \geqslant 0} f(\lambda),$$

найдем коэффициенты λ_i и построим вектор v, обладающий нужным свойством.

Безусловно, прежде чем решать задачу квадратичного программирования можно попробовать разные варианты. Например, пронормировать векторы a_i и найти их среднее арифметическое.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Черников С.Н.* Линейные неравенства. М.: Наука, 1968. 488 с.

2. *Черникова Н.В.* Алгоритм для нахождения общей формулы неотрицательных решений системы линейных уравнений. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1964, том 4, № 4. С. 733-–738.

3. *Ногин В.Д., Басков О.В.* Сужение множества Парето на основе учета произвольного конечного набора числовой информации об отношении предпочтения // Доклады Академии Наук. 2011. т. 438, № 4. С. 1–4.

4. *Чарин В.С.* Линейные преобразования и выпуклые множества. К.: Высшая школа, 1978. 191 р.

5. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 472 с.

6. *Лоусон Ч., Хенсон Р.* Численное решение задач метода наименьших квадратов. М.: Наука, 1986. 232 с.

7. *Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р., Штайн К.* Алгоритмы. Построение и анализ. Вильямс, 2012. 1296 с.

8. *Препарат Ф, Шеймос М.* Вычислительная геометрия: Введение. М: Мир, 1989. 478 с.

9. Пшеничный Б.Н., Данилин Ю.М. Численные методы в экстремальных задачах. М.: Наука, 1975. 320 с.