# СРАВНЕНИЕ КЛАССА КВАЗИДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ С КЛАССОМ ФУНКЦИЙ, ИМЕЮЩИХ ЭКЗОСТЕРЫ*

М. Э. Аббасов

abbasov.majid@gmail.com

21 ноября 2017 г.

В докладе [1] сравнивалось понятие экзостеров и квазидифференциалов. Было показано, что класс функций, имеющих экзостеры, включает в себя класс квазидифференцируемых функций, а также что исследовать квазидифференцируемые функции удобнее с помощью экзостеров. В данной заметке показывается, что класс функций, имеющих экзостеры, шире класса квазидифференцируемых функций.

**1°. Необходимые сведения.** Рассмотрим функцию $f\colon X \to \mathbb{R}$, где $X \subset \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество. Обозначим $h(g) = f'(x, g)$, где $f'(x, g)$ — производная по направлению.

Поведение функции $f$ в окрестности точки $x$ определяется поведением функции $h$ в окрестности точки $\mathbf{0}$ (производная $f$ в точке $x$ по направлению $g$ совпадает с производной функции $h$ в нуле по направлению $g$). Поэтому везде далее будем работать с функцией $h$ в окрестности нуля.

Функция $h$ называется квазидифференцируемой (в точке $\mathbf{0}$), если она дифференцируема по любому направлению $g \in \mathbb{R}^n$ (в точке $\mathbf{0}$), и представима в виде

$$h(g) = \max_{v \in \underline{\partial} h} \langle v, g\rangle + \min_{w \in \overline{\partial} h} \langle w, g\rangle \quad \forall g \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

где $\underline{\partial} h \subset \mathbb{R}^n$, $\overline{\partial} h \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклые компакты. Пара множеств $\mathcal{D}h = \left[\underline{\partial} h, \overline{\partial} h\right]$ называется квазидифференциалом функции $h$ в точке $\mathbf{0}$. Это понятие впервые появилось в работах [2, 3].

*Семинар по конструктивному негладкому анализу и недифференцируемой оптимизации «CNSA & NDO»: `http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/`

Отметим, что если $h$ квазидифференцируема, то она липшицева. Действительно, для произвольных $g_1$, $g_2$ из $\mathbb{R}^n$ имеем

$$|h(g_1) - h(g_2)| = \left| \max_{v \in \underline{\partial} h - \overline{\partial} h} \langle v, g_1 - g_2 \rangle + \min_{w \in \overline{\partial} h - \underline{\partial} h} \langle w, g_1 - g_2 \rangle \right| \leq 2L \|g_1 - g_2\|,$$

где

$$L = \max_{v \in \left(\underline{\partial} h - \overline{\partial} h\right) \bigcup \left(\overline{\partial} h - \underline{\partial} h\right)} \|v\|.$$

Пусть функция $h(g)$ липшицева. Тогда она может быть представлена (см. [4, 5]) как в форме

$$h(g) = \min_{C \in E^*} \max_{v \in C} \langle v, g \rangle,$$

так и в форме

$$h(g) = \max_{C \in E_*} \min_{v \in C} \langle v, g \rangle,$$

где $E^*$, $E_*$ — семейства выпуклых компактов в $\mathbb{R}^n$, называемых верхним и нижним экзостером соответственно. Понятие экзостеров было введено в [4, 6].

Так как квазидифференциальное и экзостерное представления являются положительно однородными, можно рассматривать $h(g)$ лишь на единичной сфере $\mathbb{S} = \{g \in \mathbb{R}^n \mid \|g\| = 1\}$.

**2°. Основная часть.** Класс квазидифференцируемых функций содержит гладкие функции и замкнут относительно алгебраических операций, а также операций максимума, минимума и композиции. Любая квазидифференцируемая функция имеет экзостер.

**ТЕОРЕМА 1.** *Пусть функция $h$ квазидифференцируема. Тогда существуют верхний и нижний экзостеры вида*

$$E^* = \left\{ C = w + \underline{\partial} h \;\middle|\; w \in \overline{\partial} h \right\},$$

$$E_* = \left\{ C = v + \overline{\partial} h \;\middle|\; v \in \underline{\partial} h \right\},$$

*где $[\underline{\partial} h, \overline{\partial} h]$ — квазидифференциал функции $h$ в точке $\mathbf{0}$.*

Доказательство. Пусть квазидифференцируема в точке $x_0$. Тогда производная по направлению функции $f$ в точке $x_0$ имеет вид

$$\begin{aligned} h(g) &= \min_{w \in \overline{\partial} h} \langle w, g \rangle + \max_{v \in \underline{\partial} h} \langle v, g \rangle = \\ &= \min_{w \in \overline{\partial} h} \left[ \langle w, g \rangle + \max_{v \in \underline{\partial} h} \langle v, g \rangle \right] = \min_{w \in \overline{\partial} h} \max_{v \in \underline{\partial} h} \langle w + v, g \rangle = \\ &= \min_{w \in \overline{\partial} h} \max_{v \in w + \underline{\partial} h} \langle v, g \rangle = \min_{C \in E^*} \max_{v \in C} \langle v, g \rangle. \end{aligned}$$

Отсюда получаем верхний экзостер функции $h$.

Аналогично, строим нижний экзостер функции $h$

$$\begin{aligned} h(g) = & \max_{v \in \underline{\partial} h} \langle v, g\rangle + \min_{w \in \overline{\partial} h} \langle w, g\rangle = \\ & = \max_{v \in \underline{\partial} h} \left[ \langle v, g\rangle + \min_{w \in \overline{\partial} h} \langle w, g\rangle \right] = \max_{v \in \underline{\partial} h} \min_{w \in \overline{\partial} h} \langle v + w, g\rangle = \\ & = \max_{v \in \underline{\partial} h} \min_{w \in v + \overline{\partial} h} \langle w, g\rangle = \max_{C \in E_*} \min_{v \in C} \langle v, g\rangle. \end{aligned}$$

□

Рассмотрим функцию [7, 8] $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (см. рис. 1)

$$f(x) = \|x\|_{\frac{1}{2}} = \left(\sqrt{|x_1|} + \sqrt{|x_2|}\right)^2.$$

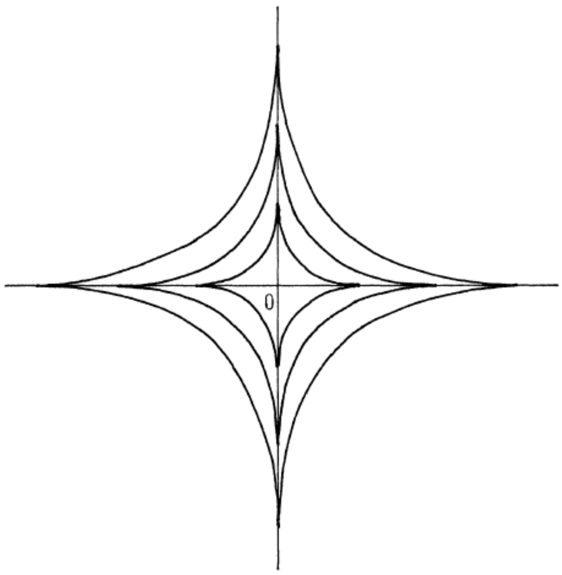


Рис. 1. Линии уровня функции $f(x) = \|x\|_{\frac{1}{2}}$

Она является непрерывной и положительно однородной. Ее производная в нуле

$$h(g) = f'(\mathbf{0}, g) = f(g) = \left(\sqrt{|g_1|} + \sqrt{|g_2|}\right)^2, \; g = (g_1, g_2) \in \mathbb{R}^2$$

совпадает с самой функцией $f$, которая не является локально липшицевой в окрестности любой точки, лежащей на любой из координатных осей. Покажем, например, что $f$ не является локально липшицевой в первом квадранте, в окрестности любой точки, лежащей на положительной части оси $Ox_2$.

Выберем и зафиксируем произвольные малые $\delta > 0$, $\mu > 0$, большое $M > 0$ и точки $z^1 = (x_1^1, x_2^1)$, $z^2 = (x_1^2, x_2^2)$ такие, что $x_1^1 = \mu$, $x_2^1 = M$ $x_1^2 = x_1^1 + \delta$, $x_2^2 = x_2^1 + \delta$.

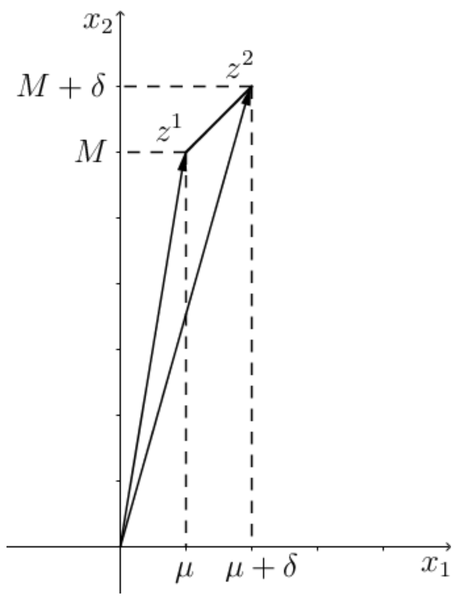


Рис. 2. Построение точек $z^1$, $z^2$

Так как функция $f$ непрерывно дифференцируема во внутренности первого квадранта, то по теореме о среднем можем записать

$$|f(z^2) - f(z^1)| = f(z^2) - f(z^1) = \left\langle \nabla f(\widehat{z}), z^2 - z^1 \right\rangle, \tag{2}$$

где $\widehat{z} = (\widehat{x}_1, \widehat{x}_2) = z^1 + \theta(z^2 - z^1)$, $\theta \in [0,1]$, то есть $\widehat{z} \in \mathrm{co}\,\{z^1, z^2\}$. Имеем

$$\nabla f(\widehat{z}) = \left(1 + \sqrt{\tfrac{\widehat{x}_2}{\widehat{x}_1}}, 1 + \sqrt{\tfrac{\widehat{x}_1}{\widehat{x}_2}}\right).$$

Очевидно, что (см. рис. 2)

$$\frac{x_2}{x_1} \in \left[\tfrac{M+\delta}{\mu+\delta}, \tfrac{M}{\mu}\right] \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathrm{co}\left\{z^1, z^2\right\}.$$

Поэтому

$$\left\langle \nabla f(\widehat{z}), z^2 - z^1 \right\rangle = 2\delta + \delta\left(\sqrt{\tfrac{\widehat{x}_2}{\widehat{x}_1}} + \sqrt{\tfrac{\widehat{x}_1}{\widehat{x}_2}}\right) > \delta\sqrt{\tfrac{M+\delta}{\mu+\delta}}$$

и, значит, за счет выбора $M \gg \mu$, можно последнее выражение сделать больше любого наперед заданного числа. Учитывая (2), заключаем, что $f$ не может удовлетворять условию Липшица в первом квадранте в окрестности любой точки, лежащей на положительной части оси $Ox_2$.

Так как производная по направлению любой квазидифференцируемой функции липшицева, то рассматриваемая функция квазидифференцируемой не является.

В [7, 8] утверждается, что

$$f'(\mathbf{0}, g) = \min_{t\in(0,1)} \left\{ \frac{|g_1|}{t} + \frac{|g_2|}{1-t} \right\} = \min_{C\in E^*} \max_{v\in C} \langle v, g\rangle, \tag{3}$$

где $E^* = \{C = C(t) \mid t \in (0,1)\}$,

$$C(t) = \mathrm{co}\left\{ \left(-\tfrac{1}{t}, -\tfrac{1}{1-t}\right), \left(\tfrac{1}{t}, -\tfrac{1}{1-t}\right), \left(-\tfrac{1}{t}, \tfrac{1}{1-t}\right), \left(\tfrac{1}{t}, \tfrac{1}{1-t}\right) \right\}.$$

Второе равенство в (3) очевидно. Убедимся в справедливости первого, то есть что

$$\left(\sqrt{|g_1|} + \sqrt{|g_2|}\right)^2 = \min_{t\in(0,1)} \left\{ \frac{|g_1|}{t} + \frac{|g_2|}{1-t} \right\}.$$

Для удобства введем обозначения $|g_1| = a$, $|g_2| = b$. Приравняв производную функции

$$\frac{a}{t} + \frac{b}{1-t}$$

к нулю, получим $t_{1,2} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}$. Вторая производная рассматриваемой функции в точке $t_1$ больше нуля, значит, в ней достигается минимум. Кроме того, $t_1$ содержится в интервале $(0,1)$, а значение функции в $t_1$ равно $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2$.

Таким образом, у рассматриваемой функции существует верхний экзостер (см. рис. 3).

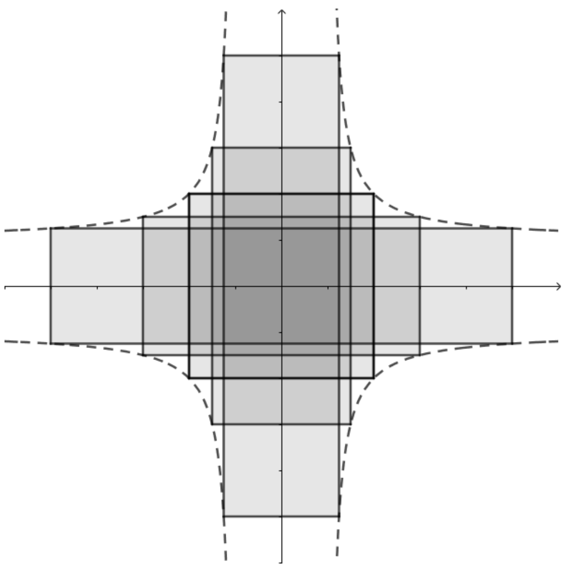

Рис. 3. Множества из верхнего экзостера рассматриваемой функции

Проверим условия экстремума функции $f$ в нуле в терминах построенного экзостера. Верхний экзостер является собственным для задачи на минимум и несобственным для задачи на максимум [1]. Необходимое условие минимума тут выполнено: любое множество, входящее в $E^*$ содержит ноль. Необходимое условие максимума не выполнено: найдутся прямые, проходящие через ноль, которые не разделяют никакие два множества семейства. «Наиболее неотделяющими» прямыми (то есть прямыми, на чьих нормалях достигается максимальное значение выражения $\min\limits_{C\in E^*}\max\limits_{v\in C}\langle v,g\rangle$ при $g\in\mathbb{S}$) являются в данном случае биссектрисы координатных углов. Поэтому здесь четыре направления наискорейшего подъема

$$g_1=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ g_2=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ g_3=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ g_4=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Проверим теперь $E^*$ на минимальность с помощью условий, описанных в [9]. На рисунке 3 показаны некоторые множества построенного семейства, а также кривые, любые точки которых являются вершинами какого-то множества из $E^*$. Выбирая любую вершину произвольного $C\in E^*$, можем построить прямую, касательную к соответствующей кривой в этой вершине. В замкнутом полупространстве, порожденным этой прямой не лежит целиком ни одно множество из $E^*$, кроме $C$. Это означает, что выполнено условие Теоремы 8 из [9], поэтому ни одно из множеств семейства не может быть отброшено, и, следовательно, выполнен критерий минимальности по включению. Таким образом, $E^*$ является минимальным по включению. Совершенно по той же причине выполнено условие Теоремы 12 из [9], поэтому ни одно из множеств, входящих в семейство, невозможно сократить путем отбрасывания некоторых его вершин. Учитывая минимальность $E^*$ по включению, отсюда получаем минимальность $E^*$ по форме.

Любое подмножество $E^*$ имеет непустое пересечение, представляющее собой четырехугольник. Из рисунка 3 очевидно, что найдется опорная прямая этого четырехугольника, для которой нет ни одного множества из рассматриваемого подмножества $E^*$, полностью лежащего в замкнутом полупространстве этой прямой помимо четырехугольника пересечения. Значит справедливо условие Теоремы 10 из [9] и, таким образом, выполнено необходимое условие невозможности замены любого подмножества $E^*$ его пересечением.

Проверим теперь достаточное условие минимальности множеств из $E^*$, предложенное В.А. Рощиной. Для каждого $g\in\mathbb{S}$ и $C\in E^*$ положим

$$m_C(g)=\{v_0\in C\mid v_0=\operatorname*{argmax}_{v\in C}\langle v,g\rangle;\ \langle v_0,g\rangle=h(g)\}$$

и построим множество

$$\widetilde{M}^*(C)=\operatorname{cl}\operatorname{co}\{m_C(g)\mid g\in\mathbb{S},\ m_C(g)\text{ — одноточечное множество}\}.$$

Очевидно, в нашем случае для любого $C \in E^*$ имеем $\widetilde{M}^*(C) = C$. Значит выполнено условие Теоремы 5 из [9], и, таким образом, ни одно множество $C \in E^*$ не может быть заменено нетривиальным подмножеством $\widetilde{C}$ (то есть $\widetilde{C} \neq \emptyset$), являющимся подмножеством $C$. Поэтому любое множество из $E^*$ является минимальным (несокращаемым).

## ЛИТЕРАТУРА


1. Аббасов М. Э. *Экзостеры: исчисление, условия экстремума, сравнение с квазидифференциалами* // Семинар «CNSA & NDO». Избранные доклады. 17 ноября 2016 г. (`http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/reps16.shtml#1117`)

2. Демьянов В. Ф., Полякова Л. Н., Рубинов А. М. *Об одном обобщении понятия субдифференциала* // Тез. Всес. конф. по динамическому управлению. Свердловск, 1979. С. 79–84.

3. Демьянов В. Ф., Рубинов А. М. *О квазидифференцируемых функционалах* // Докл. АН СССР. Т. 250, № 1. 1980. С. 21–25.

4. Demyanov V. F. *Exhausters and Convexificators — New Tools in Nonsmooth Analysis.* In: V. Demyanov and A. Rubinov (Eds.) Quasidifferentiability and related topics. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000, pp. 85–137.

5. Castellani M. *A Dual Representation for Proper Positively Homogeneous Functions* // Journal of Global Optimization. Vol. 16(4), 2000, pp. 393–400.

6. Demyanov V. F. *Exhausters of a positively homogeneous function* // Optimization. Vol. 45, 1999, pp. 13–29.

7. Ishizuka Y. *Optimality Conditions for Quasi-Differentiable Programs with Application to Two-Level Optimization* //SIAM Journal on Control and Optimization. Vol. 26(6). 1988. P. 1388–1398.

8. Glover B. M., Ishizuka Y. et al. *Complete Characterizations of Global Optimality for Problems Involving the Pointwise Minimum of Sublinear Functions* // SIAM Journal on Optimization. Vol. 6(2). 1996. P. 362–372.

9. Аббасов М. Э. *Геометрические условия сокращения экзостеров* // Семинар «CNSA & NDO». Избранные доклады. 27 октября 2016 г. (`http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/reps16.shtml#1027`)