АНАЛИЗ ОДНОЙ ИГРЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ*

В. Н. Малозёмов — v.malozemov@sbpu.ru

Н. А. Соловьёва — vinyo@mail.ru

26 декабря 2017 г.

Аннотация. Данный доклад примыкает к докладу [1]. Он основан на материале из книги [2, с. 24–31].

1°. Военный бюджет некоторого государства выделяет X финансовых единиц на приобретение вооружения. Рассматриваются n видов вооружения. Нужно сформировать план закупок $x = (x_1, \ldots, x_n)$, где x_i — часть X, которая будет направлена на приобретение вооружения i-го вида. Ясно, что

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = X; \quad x_i \geqslant 0 \;\; \forall\, i \in 1:n.$$

Множество всех планов x обозначим Λ. Само государство будем называть x-игроком.

Имеется враждебное государство, которому становится известен план x. Оно выделяет Y финансовых единиц на приобретение вооружения, противостоящего вооружению x-игрока. Формируется план закупок $y = (y_1, \ldots, y_n)$, где y_i — часть Y, которая направляется на приобретение вооружения, противостоящего вооружению i-го вида x-игрока. Ясно, что

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_n = Y; \quad y_i \geqslant 0 \;\; \forall\, i \in 1:n.$$

Множество всех планов y обозначим V. Второе государство будем называть y-игроком.

Анализируется ситуация, когда y-игрок первым наносит удар. Взвешенная стоимость вооружения i-го вида x-игрока, оставшегося после удара, определяется формулой

$$x_i' = v_i\, x_i\, e^{-\alpha_i y_i}.$$

Здесь $\alpha_i > 0$ — коэффициент уязвимости вооружения i-го вида x-игрока. Весовой коэффициент v_i представляет собой безразмерную величину, значение

*Семинар по конструктивному негладкому анализу и недифференцируемой оптимизации «CNSA & NDO»: `http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/`

которой равно стоимости единицы вооружения i-го вида x-игрока. Такой выбор v_i означает, что x-игрок заинтересован в сохранении более дорогих видов вооружения.

Общая взвешенная стоимость вооружений x-игрока, оставшихся после нанесения удара y-игроком, имеет вид

$$F(x,y) = \sum_{i=1}^{n} v_i\, x_i\, e^{-\alpha_i y_i}. \tag{1}$$

При этом x-игрок стремится максимизировать функцию F, а y-игрок — минимизировать её.

Если x-игрок выбрал план закупок $\widehat{x}$, то y-игрок выберет план закупок $\widehat{y}$, на котором достигается минимум функции $F(\widehat{x}, y)$ по $y \in V$. В этом случае

$$F(\widehat{x}, \widehat{y}) = \min_{y \in V} F(\widehat{x}, y).$$

Естественно, что x-игроку следует сформировать такой план закупок $\widehat{x}$, на котором величина $F(\widehat{x}, \widehat{y})$ максимальна. Другими словами, x-игроку нужно решать экстремальную задачу

$$\min_{y \in V} F(x,y) \to \max_{x \in \Lambda}. \tag{2}$$

Именно этой задачей мы и будем заниматься.

2°. Функция $F(x,y)$ вида (1) вогнута по x на Λ при каждом фиксированном $y \in V$ и выпукла по y на V при каждом фиксированном $x \in \Lambda$. По теореме о минимаксе (см., например, [3]) справедливо равенство

$$\max_{x \in \Lambda} \min_{y \in V} F(x,y) = \min_{y \in V} \max_{x \in \Lambda} F(x,y). \tag{3}$$

Рассмотрим двойственную к (2) задачу

$$\max_{x \in \Lambda} F(x,y) \to \min_{y \in V}. \tag{4}$$

Очевидно, что задачи (2) и (4) имеют решение.

ЛЕММА 1. *Для того чтобы планы x^*, y^* задач* (2) *и* (4) *соответственно были оптимальными, необходимо и достаточно, чтобы при всех $x \in \Lambda$ и всех $y \in V$ выполнялись неравенства*

$$F(x, y^*) \leqslant F(x^*, y^*) \leqslant F(x^*, y). \tag{5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть x^*, y^* — оптимальные планы, то есть

$$\min_{y\in V} F(x^*, y) = \max_{x\in\Lambda}\min_{y\in V} F(x, y), \tag{6}$$

$$\max_{x\in\Lambda} F(x, y^*) = \min_{y\in V}\max_{x\in\Lambda} F(x, y). \tag{7}$$

В силу (3) получаем

$$\max_{x\in\Lambda} F(x, y^*) = \min_{y\in V} F(x^*, y).$$

Далее,

$$F(x^*, y^*) \leqslant \max_{x\in\Lambda} F(x, y^*) = \min_{y\in V} F(x^*, y) \leqslant F(x^*, y^*).$$

Отсюда следует, что

$$\max_{x\in\Lambda} F(x, y^*) = F(x^*, y^*) = \min_{y\in V} F(x^*, y). \tag{8}$$

Это равносильно (5).

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть для планов $x^* \in \Lambda$, $y^* \in V$ выполняются соотношения (8). Тогда

$$\max_{x\in\Lambda} F(x, y^*) \leqslant \max_{x\in\Lambda}\min_{y\in V} F(x, y),$$

$$\min_{y\in V} F(x^*, y) \geqslant \min_{y\in V}\max_{x\in\Lambda} F(x, y).$$

Имеем

$$\max_{x\in\Lambda}\min_{y\in V} F(x, y) \geqslant \max_{x\in\Lambda} F(x, y^*) = \min_{y\in V} F(x^*, y) \geqslant \min_{y\in V}\max_{x\in\Lambda} F(x, y).$$

Отсюда в силу (3) следуют равенства (6) и (7).

Оптимальность планов x^* и y^* установлена. □

3°. Неравенство

$$F(x, y^*) \leqslant F(x^*, y^*) \qquad \forall\, x \in \Lambda$$

означает, что x^* является решением экстремальной задачи

$$\sum_{i=1}^{n} v_i\, x_i\, e^{-\alpha_i y_i^*} \to \max$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = X; \quad x_i \geqslant 0 \ \ \forall\, i \in 1:n.$$

По лемме Гиббса (см., например, [1]) план x^* характеризуется тем, что при некотором λ выполняются условия

$$v_i\, e^{-\alpha_i y_i^*} = \lambda, \quad \text{если} \;\; x_i^* > 0; \tag{9}$$

$$v_i\, e^{-\alpha_i y_i^*} \leqslant \lambda, \quad \text{если} \;\; x_i^* = 0. \tag{10}$$

Второе неравенство

$$F(x^*, y^*) \leqslant F(x^*, y) \qquad \forall\, y \in V$$

означает, что y^* является решением экстремальной задачи

$$\sum_{i=1}^{n} v_i\, x_i^*\, e^{-\alpha_i y_i} \to \min$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = Y; \quad y_i \geqslant 0 \;\; \forall\, i \in 1:n.$$

По лемме Гиббса план y^* характеризуется тем, что при некотором μ выполняются условия

$$v_i\, \alpha_i\, x_i^*\, e^{-\alpha_i y_i^*} = \mu, \quad \text{если} \;\; y_i^* > 0; \tag{11}$$

$$v_i\, \alpha_i\, x_i^* \qquad \leqslant \mu, \quad \text{если} \;\; y_i^* = 0. \tag{12}$$

Так как $X > 0$, то существует положительное x_i^*. Из (9) следует, что $\lambda > 0$. Положительными будут левые части формул (11) и (12), поэтому и $\mu > 0$.

ТЕОРЕМА 1. *Двойственная задача* (4) *имеет единственное решение*

$$y_i^* = \frac{1}{\alpha_i}\, \ln_+\left(\frac{v_i}{\lambda}\right), \quad i \in 1:n, \tag{13}$$

где

$$\ln_+(u) = \begin{cases} \ln(u) & \textit{при } u > 1, \\ 0 & \textit{при } u \in (0, 1]. \end{cases}$$

Константа λ определяется из уравнения

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\alpha_i}\, \ln_+\left(\frac{v_i}{\lambda}\right) = Y. \tag{14}$$

Доказательство. Уравнение вида (14) рассматривалось в докладе [1]. Там было установлено, что такое уравнение имеет единственное решение и описан быстрый алгоритм его вычисления.

Проверим справедливость формулы (13). Рассмотрим три случая.

1) $v_i > \lambda$. Покажем, что $x_i^* > 0$. В противном случае, при $x_i^* = 0$, в силу (10) будет $y_i^* > 0$. Из (11) следует, что $x_i^* > 0$, что противоречит условию $x_i^* = 0$. На основании (9) получаем

$$y_i^* = \frac{1}{\alpha_i} \ln\left(\frac{v_i}{\lambda}\right).$$

2) $v_i < \lambda$. Покажем, что $y_i^* = 0$. В противном случае, при $y_i^* > 0$, в силу (11) будет $x_i^* > 0$. Но это противоречит (9).

3) $v_i = \lambda$. Покажем, что $y_i^* = 0$. В противном случае, при $y_i^* > 0$, в силу (11) будет $x_i^* > 0$. Из (9) следует, что $y_i^* = 0$, что противоречит условию $y_i^* > 0$.

Объединив полученные результаты, придём к формуле, равносильной (13):

$$y_i^* = \begin{cases} \frac{1}{\alpha_i} \ln\left(\frac{v_i}{\lambda}\right), & \text{если } \frac{v_i}{\lambda} > 1; \\ 0, & \text{если } \frac{v_i}{\lambda} \leqslant 1. \end{cases}$$

Теорема доказана. □

Отметим, что оптимальный план y-игрока не зависит от планов x-игрока, а зависит только от стоимостей v_i и уязвимостей α_i его вооружений. При этом существует порог стоимости λ, такой, что при $v_i \leqslant \lambda$ y-игрок не будет противодействовать вооружению i-го вида x-игрока.

4°. Обозначим

$$c_i = v_i \, e^{-\alpha_i y_i^*}$$

и перепишем задачу нахождения x^* в виде

$$\begin{gathered} \sum_{i=1}^{n} c_i \, x_i \to \max \\ \sum_{i=1}^{n} x_i = X; \quad x_i \geqslant 0 \ \ \forall\, i \in 1:n. \end{gathered} \tag{15}$$

Согласно (9) и (10)

$$\max_{i \in 1:n} \{c_i\} = \lambda.$$

Введём дополнительные обозначения

$$I = 1:n; \quad I_* = \bigl\{ i \in I \mid c_i = \lambda \bigr\}.$$

ЛЕММА 2. *Вектор* $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ *будет решением задачи* (15) *тогда и только тогда, когда*

$$x_i^* = 0 \quad \forall\, i \in I \setminus I_*;$$
$$\sum_{i \in I_*} x_i^* = X; \quad x_i^* \geqslant 0 \;\; \forall\, i \in I_*.$$

Приведём элементарное доказательство этой леммы.

Для любого плана x задачи (15) имеем

$$\sum_{i=1}^{n} c_i\, x_i = \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} (\lambda - c_i) x_i =$$
$$= \lambda X - \sum_{i \in I \setminus I_*} (\lambda - c_i) x_i \leqslant \lambda X.$$

Неравенство выполняется как равенство тогда и только тогда, когда

$$\sum_{i \in I \setminus I_*} (\lambda - c_i) x_i = 0. \tag{16}$$

Так как $\lambda - c_i > 0$ при $i \in I \setminus I_*$ и $x_i \geqslant 0$, то равенство (16) эквивалентно условию $x_i = 0$ при $i \in I \setminus I_*$. Это соответствует заключению леммы. $\square$

5°. Вернёмся к исходной задаче (2). Предположим, что уже найдено решение $y^* = (y_1^*, \dots, y_n^*)$ двойственной задачи (4). Лемма 2 позволяет описать всё множество решений задачи (2).

ТЕОРЕМА 2. *Пусть*

$$c_i = v_i\, e^{-\alpha_i y_i^*}, \quad I_* = \big\{ i \in 1:n \mid c_i = \lambda \big\}.$$

Для того, чтобы вектор $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ *был решением задачи* (2), *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

$$x_i^* = 0 \quad \forall\, i \in (1:n) \setminus I_*;$$
$$\sum_{i \in I_*} x_i^* = X; \quad x_i^* \geqslant 0 \;\; \forall\, i \in I_*.$$

Таким образом, x-игроку не стоит закупать вооружение i-го вида, если $c_i < \lambda$. Что касается остальных видов вооружения, у которых $c_i = \lambda$, то на их закупку в этой модели бюджет X можно распределить произвольным образом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Малозёмов В. Н., Тамасян Г. Ш. *Лемма Гиббса и её приложения* // Семинар CNSA & NDO. Избранные доклады. 10 октября 2017 г. 8 с. (`http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/reps17.shtml#1010`).

2. Данскин Дж. М. *Теория максимина и её приложение к задачам распределения вооружения.* М.: Изд-во «Советское радио», 1970. 200 с.

3. Малозёмов В. Н. *К теореме о минимаксе* // Семинар CNSA & NDO. Избранные доклады. 30 октября 2014 г. 5 с. (`http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/reps14.shtml#1030`).