СИММЕТРИЧЕСКИЕ СУБДИФФЕРЕНЦИАЛЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ В ВАРИАЦИОННОМ ИСЧИСЛЕНИИ*

И. В. БАРАН

matemain@mail.ru

30 ноября 2017 г.

1°. Введение. В последнее десятилетие была построена и нашла значимые применения теория так называемых компактных субдифференциалов. В наших работах [1], [5] рассмотрен вопрос о построении основ теории симметрических компактных субдифференциалов отображений в банаховых пространствах.

Симметрические локальные характеристики отображений, с самого их возникновения, занимают особую позицию в вещественном анализе. Их возникновение связано со знаменитым методом Римана обобщенного суммирования тригонометрических рядов.

В 1908 г. Ш.–Ж. Валле-Пуссен [14] ввел обобщенные симметрические производные высших порядков, которые в дальнейшем нашли некоторые применения.

В дискретном анализе на протяжении XX века получили широкое применение симметрические, или так называемые центральные, разностные отношения (central differences) как первого так и высших порядков.

Однако симметрическое дифференциальное исчисление, в отличие от классического не получило обобщения на бесконечномерный случай — аналог исчисления Гато–Адамара–Фреше для симметрического случая не был построен. Как представляется, одной из причин этого служит очевидная невозможность обобщить классические условия локального экстремума (начиная с леммы Ферма) на симметрические производные функционалов.

Такая тенденция сохранилась и после появления, в связи с задачами негладкой оптимизации, субдифференциального исчисления. Отметим, в частности, работы таких отечественных математиков и математиков отечественного происхождения, как В. М. Тихомиров, А. Д. Иоффе, Б. Н. Пшеничный,

*Семинар по конструктивному негладкому анализу и недифференцируемой оптимизации «CNSA & NDO»: `http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/`

А. Г. Кусраев, С. С. Кутателадзе, В. Ф. Демьянов, А. М. Рубинов, В. Н. Малозёмов, М. Л. Гольдман, Е. С. Половинкин, М. В. Балашов, Б. Ш. Мордухович, А. В. Арутюнов и другие.

В прикладном плане целесообразность построения симметрической версии субдифференциального исчисления мы связываем со следующими возможностями приложений. Первая из них связана с заменой в известном методе суммирования Римана второй симметрической производной от функции Римана на второй симметрический субдифференциал.

Вторая возможность связана с применением симметрических характеристик в экстремальных задачах «на втором этапе»: для уже найденной точки экстремума определить оптимальное (в некотором смысле) линейное направление движения к точке экстремума.

В нашей работе понятие оптимальности направления мы связываем с локальными аналогами известных в теории вероятностей понятий асимметрии и эксцесса. Эти характеристики оказываются тесно связанными с симметрическими дифференциалами либо, при соответствующем обобщении, с субдифференциалами.

2°. Симметрические производные и симметрические дифференциалы в скалярном случае. Рассмотрим отображение $f : \mathbb{R} \supset U(x) \to F$, определенное в некоторой окрестности $U(x)$ точки $x \in \mathbb{R}$, где F — произвольное вещественное банахово пространство. Напомним классические определения первой и высших симметрических производных [2], которые без труда распространяются на отображения со значениями в банаховых пространствах.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Первой симметрической производной f в точке x называется предел

$$f^{[\prime]}(x) = \lim_{h\to+0} \frac{\Delta^1 f(x,h)}{2h} = \lim_{h\to+0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Симметрической производной n–го порядка* отображения f в точке x называется величина

$$f^{[n]}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\Delta^n f(x,h)}{(2h)^n} = \lim_{h\to+0} \frac{1}{(2h)^n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k f\big(x + (n-2k)h\big).$$

Отметим связь между симметрическими производными и обычными производными высших порядков.

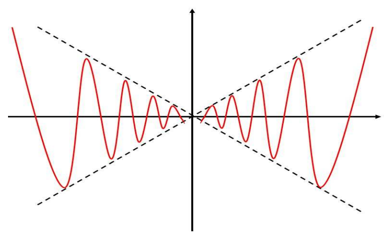
ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Если существует $(f^{(n-k)})^{[k]}(x)$, то существует симметрическая производная n-го порядка $f^{[n]}(x)$ в точке x и имеет место равенство:*

$$f^{[n]}(x) = (f^{(n-k)})^{[k]}(x). \tag{1}$$

Пример 1 показывает, что из существования второй симметрической производной не следует, вообще говоря, существование первой симметрической производной.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin \frac{1}{x^2}\ , & \text{если } x \neq 0\ ; \\ 0, & \text{если } x = 0\ . \end{cases} \tag{2}$$



$$f^{[\prime\prime]}(0) = 0 \ (f \text{ нечетная}) \qquad (f^{[\prime]}(0) \text{ не существует}). \tag{3}$$

Пример 2 показывает, что в симметрическом случае обычное правило дифференцирования композиции может не выполнятся:

$$(g \circ f)^{[\prime]}(x) \neq g^{[\prime]}(f(x)) \cdot f^{[\prime]}(x).$$

ПРИМЕР 2. Пусть

$$g(y) = \begin{cases} y \cdot \sin \frac{1}{y}\ , & \text{если } y \neq 0\ ; \\ 0, & \text{если } y = 0\ . \end{cases} \quad \text{Тогда } g^{[\prime]}(0) = 0. \tag{4}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \geqslant 0\ ; \\ x, & \text{если } x < 0\ . \end{cases} \quad \text{Тогда } f^{[\prime]}(0) = 1. \tag{5}$$

$$g(f(x)) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin \frac{1}{x^2}\ , & \text{если } x > 0\ ; \\ x \cdot \sin \frac{1}{x}\ , & \text{если } x < 0\ ; \\ 0, & \text{если } x = 0\ . \end{cases} \tag{6}$$

Здесь $g(f(x))^{[\prime]}(0)$ не существует.

Однако при некоторых дополнительных условиях «цепное правило» для симметрического случая выполняется.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Если*

1. $\Big(\exists\, f^{[\prime]}(x),\ \exists\, g'(y)$ *в т.* $y = f(x)$ *и* $g(y)$ *строго дифф-ма*$\Big) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \Big((g \circ f)^{[\prime]}(x) = g'(y) \cdot f^{[\prime]}(x)\Big). \tag{7}$$

2. $\Bigl(\exists\ f'(x),\ \exists\ g^{[\prime]}(y)\ \ \textit{в т. } y=f(x) \textit{ и } g(y)\in Lip(U(y))\Bigr)\Rightarrow$

$$\Rightarrow\Bigl((g\circ f)^{[\prime]}(x)=g^{[\prime]}(y)\cdot f'(x)\Bigr). \qquad (8)$$

3. $\Bigl(\exists\ f''(x) \textit{ и } f'(x)=0,\ \exists\ g^{[\prime\prime]}(y) \textit{ и } g(y)\in Lip(U(y))\Bigr)\Rightarrow$

$$\Rightarrow\Bigl((g\circ f)^{[\prime\prime]}(x)=\frac{1}{2}g^{[\prime\prime]}(y)\cdot f''(x)\Bigr). \qquad (9)$$

Заметим, что, как хорошо известно, классическая формула Лагранжа $f(x+h)-f(x)=f'(x+\theta h)\cdot h\quad(0<\theta<1)$ не переносится на симметрические производные. Приведем простейший пример.

Пусть $f(x)=|x|,\quad -1\leqslant x\leqslant 2$. Непосредственные вычисления показывают, что $f(2)-f(-1)\neq f^{[\prime]}(\xi)\cdot 3$ ни при каком $\xi\in(-1;2)$.

Имеет место следующая теорема о среднем для симметрически дифференцируемых отображений (далее $\overline{co}$ — выпуклая замкнутая оболочка множества).

ТЕОРЕМА 1. *Пусть отображение $f:\mathbb{R}\supset[x;x+h]\to F$ абсолютно непрерывно на $[x;x+h]$ и симметрически дифференцируемо в $(x;x+h)$. Тогда выполняется оценка:*

$$f(x+h)-f(x)\in\overline{co}\,f^{[\prime]}\bigl((x;x+h)\bigr)\cdot h. \qquad (10)$$

Справедлива следующая асимптотическая формула Тейлора для симметрических производных (более слабая по сравнению со случаем обычной дифференцируемости).

ТЕОРЕМА 2. *Предположим, что существует $(f^{(n-1)})^{[\prime]}(x)$ и отображение f сильно абсолютно непрерывно в окрестности $U(x)$. Тогда имеет место оценка:*

$$f(x+h)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x)}{k!}h^k\in\frac{1}{n!}\,\overline{co}\,f^{[n]}\bigl((x;x+h)\bigr)\cdot h^n+o(h^n). \qquad (11)$$

3°. Симметрическая субдифференцируемость в вещественнозначном случае. Прежде всего, по образцу определения компактного субдифференциала (см. [6], [7]), заменяя обычное разностное отношение на симметрическое, введем понятие симметрического субдифференциала (или s–субдифференциала) первого порядка. Всюду далее F — вещественное банахово пространство, $f:\mathbb{R}\supset U(x)\to F$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Симметрический субдифференциал отображения f в точке x (или s-субдифференциал) есть субпредел (см. [6]):

$$\partial_{sub}^{[\prime]} f(x) = \operatorname*{sublim}_{h\to+0} \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}.$$

ТЕОРЕМА 3. *Если существует компактный субдифференциал $\partial_{sub} f(x)$, то существует и s–субдифференциал $\partial_{sub}^{[\prime]} f(x)$, причем*

$$\partial_{sub}^{[\prime]} f(x) \subset \partial_{sub} f(x). \tag{12}$$

ПРИМЕР 3. Пусть $f(x)=|x|$. Тогда, как легко вычислить, $\partial_{sub} f(0) = [-1,1]$, но $\partial_{sub}^{[\prime]} f(0)=\{0\}$. Таким образом, $\partial_{sub}^{[\prime]} f(0) \subsetneqq \partial_{sub} f(0)$.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Если функция $f(x)$ п.в. симметрически субдифференцируема на отрезке $[a;b]$, то функция $f(x)$ п.в. субдифференцируема обычным образом, причем $\partial_{sub} f(x) = \partial_{sub}^{[\prime]} f(x)$.*

Введем понятие s–субдифференциала n–го порядка.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Назовем *s–субдифференциалом n–го порядка* отображения f в точке x следующий субпредел, если он существует:

$$\partial_{sub}^{[n]} f(x) = \operatorname*{sublim}_{h\to+0} \frac{1}{(2h)^n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k f\big(x+(n-2k)h\big).$$

Справедлив следующий аналог предложения 1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Если существует $\partial_{sub}^{[\prime]}(f^{(n-1)})(x)$, то существует s–субдифференциал n–го порядка $\partial_{sub}^{[n]} f(x)$ и имеет место включение:*

$$\partial_{sub}^{[n]} f(x) \subset \partial_{sub}^{[\prime]}(f^{(n-1)})(x).$$

Приведем формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано для s–субдифференциалов.

ТЕОРЕМА 4. *Предположим, что существует $\partial_{sub}^{[\prime]} f^{(n-1)}(x)$ и отображение f абсолютно непрерывно в окрестности точки x. Тогда имеет место оценка:*

$$f(x+h) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} h^k \in \frac{h^n}{n!} \overline{co} \Big\{ \bigcup_{0<\theta<1} \big(\partial_{sub}^{[\prime]} f^{(n-1)}\big)(x+\theta h) \Big\} + o(h^n). \tag{13}$$

4°. **Симметрические субдифференциалы в банаховых пространствах.** Пусть отображение $f : E \to F$, где E и F — вещественные банаховы пространства, F_K — конус выпуклых компактов из F с метрикой Хаусдорфа [6], определено в окрестности точки $x \in E$, $h \in U(0) \subset E$, $\overline{co}$ — замкнутая выпуклая оболочка множества в F. Вводимый ниже симметрический компактный субдифференциал по направлению будем называть также *s–субдифференциалом* по направлению.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Симметрический субдифференциал отображения f в точке x по направлению h есть следующий субпредел (если он существует):

$$\partial^{[\prime]}_{sub} f(x,h) = \operatorname*{sublim}_{t \to +0} \frac{f(x+th) - f(x-th)}{2t}. \tag{14}$$

Перейдем к понятию слабого s–субдифференциала.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Пусть отображение $f : E \to F$ определено в окрестности точки $x \in E$ и s–субдифференцируемо в точке x по любому направлению $h \in U(0) \subset E$. Будем говорить, что f *слабо s–субдифференцируемо* в точке x, если s–субдифференциал по направлению $\partial^{[\prime]}_{sub} f(x,h) : E \to F_K$ s–сублинеен по h.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Пусть отображение $f : E \to F$ определено в окрестности точки $x \in E$ и слабо s–субдифференцируемо в точке x. Будем говорить, что f *s-субдифференцируемо по Гато* в точке x, если слабый s–субдифференциал $\partial^{[\prime]}_{sub} f(x)$ непрерывен в нуле или, что равносильно, ограничен по норме.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Если отображение f s–субдифференцируемо по Гато в точке x, причем сходимость в субпределе (14) равномерна по всем направлениям $\|h\| \leqslant 1$, то s–оператор $\partial^{[\prime]}_{sub} f(x)$ назовем *s–субдифференциалом Фреше* или *сильным s–субдифференциалом* f в точке x.

Рассмотрим важный вопрос о s–субдифференцируемости композиции. Мы покажем, что композиция строго компактно субдифференцируемого отображения и s–субдифференцируемого отображения сохраняет s–субдифференцируемость.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть E, F, G — вещественные банаховы пространства, $f : E \supset U(x) \to F$ и $g : F \supset V(y = f(x)) \to G$. Если отображение g строго компактно субдифференцируемо в точке y, а отображение f непрерывно и s–субдифференцируемо в точке x, то композация $g \circ f$ также s–субдифференцируема в точке x. При этом выполняется оценка:*

$$\partial^{[\prime]}_{sub} (g \circ f)(x) h \subset \left[\partial_{sub} g(y) \circ \partial^{[\prime]}_{sub} f(x)\right] h. \tag{15}$$

Далее, построенный аппарат s–субдифференциального исчисления применяется к оценке первой субвариации одномерного вариационного функционала.

Рассмотрим одномерный вариационный функционал вида:

$$\Phi(y) = \int\limits_a^b f(x,y,y')dx \quad (y \in C^1[a;b], u = f(x,y,z)). \tag{16}$$

ТЕОРЕМА 6. *Пусть для вариационного функционала* (16) *интегрант* f *является* $C^{[\prime]}$*–субгладким:* $f \in C^{[\prime]}_{sub}(\mathbb{R}^3)$*. Тогда* Φ *сильно* s*–субдифференцируем всюду в* $C^1[a;b]$*, причём справедлива оценка:*

$$\partial^{[\prime]}_{sub}\Phi(y)h \subset \Bigg[\int\limits_a^b \left(\frac{\partial^{[\prime]} f}{\underline{\partial y}}(x,y,y')h + \frac{\partial^{[\prime]} f}{\underline{\partial z}}(x,y,y')h'\right)dx;$$

$$\int\limits_a^b \left(\frac{\overline{\partial^{[\prime]} f}}{\partial y}(x,y,y')h + \frac{\overline{\partial^{[\prime]} f}}{\partial z}(x,y,y')h'\right)dx\Bigg] \qquad (\forall h \in C^1[a;b]). \tag{17}$$

Отметим частный случай оценки (17), когда интегрант образован внешней композицией s–субгладкой функции с гладкой.

ТЕОРЕМА 7. *Пусть*

$$\Phi(y) = \int\limits_a^b \varphi\left[f(x,y,y')\right]dx \quad (y \in C^1[a;b], f \in C^1(\mathbb{R}^3), \varphi \in C^{[\prime]}_{sub}(\mathbb{R})).$$

Тогда справедлива оценка:

$$\partial^{[\prime]}_{sub}\Phi(y)h \subset \Bigg[\int\limits_a^b \underline{\varphi^{[\prime]}}\left(f(x,y,y')\right)\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,y')h + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,y')h'\right)dx\,;$$

$$\int\limits_a^b \overline{\varphi^{[\prime]}}\left(f(x,y,y')\right)\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,y')h + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,y')h'\right)dx\Bigg] \quad (\forall h \in C^1[a;b]). \tag{18}$$

Отметим, в качестве конкретного примера, случай интегранта, образованного композицией гладкой функции и модуля.

ПРИМЕР 4. Пусть

$$\Phi(y) = \int\limits_a^b |f(x,y,y')|dx \quad (y \in C^1[a;b], f \in C^1(\mathbb{R}^3)). \tag{19}$$

Здесь

$$\partial^{[\prime]}_{sub}\Phi(y)h = \partial^{[\prime]}\Phi(y)h = \int\limits_a^b \ sign(f(x,y,y')) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial y}h + \frac{\partial f}{\partial z}h'\right) dx. \tag{20}$$

Заметим, что вычисление несимметрического субдифференциала приводит лишь к оценке.

5°. Локальная асимметрия и локальный эксцесс негладких распределений, их минимизация. Любое распределение вероятностей случайной величины можно изобразить в виде кривой, воспроизводящей основные особенности данного распределения. Выяснение общего характера распределения предполагает, в частности, и вычисление показателей асимметрии и эксцесса.

Асимметрия характеризует степень смещения относительно среднего значения по величине и направлению. Эксцесс характеризует степень концентрации вокруг среднего значения и является своеобразной мерой крутости кривой.

Как известно, классические понятия асимметрии и эксцесса случайной величины в теории вероятностей (см. [3], [4], [8] – [13]) связаны с центральными моментами, соответственно, третьего и четвертого порядков:

$$A_S(f) = \frac{1}{\sigma^3}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-M(\xi))^3 f(x)dx, \quad E_X(f) = \frac{1}{\sigma^4}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-M(\xi))^4 f(x)dx-3, \tag{21}$$

где $M(\xi)$ – математическое ожидание случайной величины ξ, σ — среднеквадратичное отклонение данной случайной величины.

Обратим внимание на следующий факт: *глобальные характеристики* (21) используются для описания *локального поведения* $f(x)$ вблизи точки максимума. Такая связь, приемлемая в гладком случае, уже не оправдана в негладком случае, как показывает следующий пример «склейки» двух распределений в точке максимума.

ПРИМЕР 5. Пусть $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — две плотности распределения с общим максимальным значением в точке $x = x_0$, причем

$$\int\limits_{-\infty}^{x_0} f_1(x)dx + \int\limits_{\infty}^{x_0} f_2(x)dx = 1 \qquad (f_i \in C^1(\mathbb{R})).$$

Положим

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), \ -\infty < x \le x_0; \\ f_2(x), \ x_0 \le x < +\infty. \end{cases}$$

Тогда $f(x)$ также является плотностью распределения, однако, ввиду негладкости, для описания поведения $f(x)$ вблизи x_0 нужны уже *локальные характеристики.* Введем их как пределы соответствующих интегральных средних значений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Назовем *локальной асимметрией* $f(x)$ в точке x_0 величину:

$$Af(x_0) = \lim_{h\to+0}\left(\frac{1}{2h}\int\limits_{x_0-h}^{x_0+h}\frac{f(x)dx}{x-x_0}\right) \tag{22}$$

и *локальным эксцессом* $f(x)$ в точке x_0 величину:

$$Ef(x_0) = \lim_{h\to+0}\left(\frac{1}{2h}\int\limits_{x_0-h}^{x_0+h}\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^2}dx\right), \tag{23}$$

в предположении сходимости соответствующих интегралов (22) и (23).

Введенные характеристики нетрудно выразить через симметрические производные f в точке x_0, соответственно, первого и второго порядков, если они существуют.

ТЕОРЕМА 8. *1) Если f симметрически дифференцируема в точке x_0, то*

$$Af(x_0) = \partial^{[\prime]}f(x_0). \tag{24}$$

2) Если f дважды симметрически дифференцируема в точке x_0, то

$$Ef(x_0) = \frac{1}{2}\partial^{[\prime\prime]}f(x_0). \tag{25}$$

Возвращаясь теперь к примеру 5, отметим, что в данном случае

$$Af(x_0) = \partial^{[\prime]}f(x_0) = \frac{1}{2}\left[\partial f_1(x_0) + \partial f_2(x_0)\right].$$

В случае негладкости второго порядка в точке x_0 $(\partial f_1(x_0) = \partial f_2(x_0))$, $\partial^2 f_1(x_0) \neq \neq \partial^2 f_2(x_0)$, локальный эксцесс вычисляется по аналогичной формуле:

$$Ef(x_0) = \frac{1}{2}\partial^{[\prime\prime]}f(x_0) = \frac{1}{4}\left[\partial^2 f_1(x_0) + \partial^2 f_2(x_0)\right].$$

Рассмотрим теперь конкретный пример «склейки» (с точностью до постоянных множителей) двух нормальных распределений.

ПРИМЕР 6. Рассмотрим «склейку» двух нормально распределенных случайных величин $N_1(m_1, \sigma_1)$ и $N_2(m_2, \sigma_2)$ $(m_i, \sigma_i > 0)$:

$$f(x) = \begin{cases} \gamma_1 \cdot \dfrac{1}{\sigma_1}\varphi\left(\dfrac{x-m_1}{\sigma_1}\right), -\infty < x \le 0; \\ \gamma_2 \cdot \dfrac{1}{\sigma_2}\varphi\left(\dfrac{x-m_2}{\sigma_2}\right), 0 \le x < +\infty. \end{cases} \tag{26}$$

Здесь множители γ_1 и γ_2 подбираются из условий непрерывной склейки в нуле:

$$\gamma_1 \cdot \frac{1}{\sigma_1}\varphi\left(\frac{m_1}{\sigma_1}\right) = \gamma_2 \cdot \frac{1}{\sigma_2}\varphi\left(\frac{m_2}{\sigma_2}\right) \tag{27}$$

и нормировки плотности:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \gamma_1 \cdot \left(\frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{m_1}{\sigma_1}\right)\right) + \gamma_2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{m_2}{\sigma_2}\right)\right) = 1, \tag{28}$$

откуда находим:

$$\begin{cases} \gamma_1 = 2\sigma_1 \cdot \varphi\left(\frac{m_2}{\sigma_2}\right) \cdot \\ \cdot \left[\sigma_1 \cdot \varphi\left(\frac{m_2}{\sigma_2}\right) \cdot \left(1 - 2\Phi\left(\frac{m_1}{\sigma_1}\right)\right) + \sigma_2 \cdot \varphi\left(\frac{m_1}{\sigma_1}\right) \cdot \left(1 - 2\Phi\left(\frac{m_2}{\sigma_2}\right)\right)\right]^{-1}; \\ \gamma_2 = 2\sigma_2 \cdot \varphi\left(\frac{m_1}{\sigma_1}\right) \cdot \\ \cdot \left[\sigma_2 \cdot \varphi\left(\frac{m_1}{\sigma_1}\right) \cdot \left(1 - 2\Phi\left(\frac{m_2}{\sigma_2}\right)\right) + \sigma_1 \cdot \varphi\left(\frac{m_2}{\sigma_2}\right) \cdot \left(1 - 2\Phi\left(\frac{m_1}{\sigma_1}\right)\right)\right]^{-1}. \end{cases}$$

1) Вычислим локальную асимметрию распределения (26) в нуле и поставим задачу ее минимизации (по модулю):

$$Af(0) = \frac{1}{2}\left(\gamma_1 \cdot \frac{m_1}{\sigma_1^3} \cdot \varphi\left(\frac{m_1}{\sigma_1}\right) - \gamma_2 \cdot \frac{m_2}{\sigma_2^3} \cdot \varphi\left(\frac{m_2}{\sigma_2}\right)\right).$$

Отсюда, приравнивая $Af(0)$ к нулю, получаем:

$$\gamma_1 \cdot \frac{m_1}{\sigma_1^3} \cdot \varphi\left(\frac{m_1}{\sigma_1}\right) = \gamma_2 \cdot \frac{m_2}{\sigma_2^3} \cdot \varphi\left(\frac{m_2}{\sigma_2}\right). \tag{29}$$

Из уравнений (27) и (29) следует условие минимальности $|Af(0)|$:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}. \tag{30}$$

2) Вопрос о локальном эксцессе распределения (26) мы рассматриваем при дополнительном условии $m_1 = m_2 = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} \gamma_1 \cdot \varphi\left(\frac{x}{\sigma_1}\right), -\infty < x \le 0; \\ \gamma_2 \cdot \varphi\left(\frac{x}{\sigma_2}\right), 0 \le x < +\infty. \end{cases}$$

В этом случае

$$Ef(0) = \frac{1}{2}\partial^{[\prime\prime]} f(0) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}\right).$$

6°. Локальная асимметрия и локальный эксцесс набора случайных величин. Рассмотрим теперь совместную плотность распределения $f(x_1, \ldots, x_n)$ набора случайных величин $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ (см. [4]). В этом случае мы введем понятия локальной асимметрии и локального эксцесса по заданному направлению $h \in \mathbb{R}^n$, соответствующим образом обобщая определение 9.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Назовем *локальной асимметрией f по направлению h* в точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$ величину

$$Af(x_0)h = \lim_{t \to +0}\left(\frac{1}{2t}\int\limits_{-t}^{t} \frac{f(x_0 + \tau h)d\tau}{\tau}\right) \tag{31}$$

и *локальным эксцессом f по направлению h* в точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$ величину

$$Ef(x_0)(h)^2 = \lim_{t \to +0}\left(\frac{1}{2t}\int\limits_{-t}^{t} \frac{f(x_0 + \tau h) - f(x_0)}{\tau^2} d\tau\right), \tag{32}$$

если соответствующие интегралы сходятся.

Рассмотрим двумерный пример, также связанный со «склейкой» нормальных распределений по лучам в полярных координатах на плоскости $(x = \rho\cos\alpha, y = = \rho\sin\alpha, 0 \le \alpha \le 2\pi)$.

ПРИМЕР 7. Пусть на каждом луче $(\alpha = \text{const}, 0 \le \rho < \infty)$ задано нормальное распределение (с точностью до постоянного множителя):

$$f(\rho, \alpha) = \frac{\gamma(\alpha)}{\sigma(\alpha)} \cdot \varphi\left(\frac{\rho - m(\alpha)}{\sigma(\alpha)}\right) \quad (\sigma(\alpha) > 0).$$

Проведем склейку распределений на каждой паре лучей, соответствующих углам α и $\pi + \alpha$.

Из условия (27) непрерывной склейки (пример 6) получаем:

$$\frac{\gamma(\alpha)}{\sigma(\alpha)} \cdot \varphi\left(\frac{m(\alpha)}{\sigma(\alpha)}\right) = \frac{\gamma(\alpha+\pi)}{\sigma(\alpha+\pi)} \cdot \varphi\left(\frac{m(\alpha+\pi)}{\sigma(\alpha+\pi)}\right). \tag{33}$$

Применяя условие нормировки

$$\int\limits_0^\infty f(\rho,\alpha)d\rho + \int\limits_0^\infty f(\rho,\alpha+\pi)d\rho = 1,$$

получаем:

$$\gamma(\alpha) \cdot \left(\frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{m(\alpha)}{\sigma(\alpha)}\right)\right) + \gamma(\alpha+\pi) \cdot \left(\frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{m(\alpha+\pi)}{\sigma(\alpha+\pi)}\right)\right) = 1. \tag{34}$$

Из системы (33) – (34) выражаются подходящие $\gamma(\alpha)$ и $\gamma(\alpha+\pi)$.
Находим локальную асимметрию $f(\rho,\alpha)$ по ρ в нуле:

$$\left(Af(\rho,\alpha)\big|_{\rho=0} = 0\right) \Leftrightarrow \left(\frac{\gamma}{\sigma^3} \cdot \varphi\left(\frac{m}{\sigma}\right)\Big|_\alpha + \frac{\gamma}{\sigma^3} \cdot \varphi\left(\frac{m}{\sigma}\right)\Big|_{\alpha+\pi} = 0\right). \tag{35}$$

Условия (33) – (35) приводят к равенству:

$$\frac{m(\alpha)}{\sigma^2(\alpha)} + \frac{m(\alpha+\pi)}{\sigma^2(\alpha+\pi)} = 0. \tag{36}$$

Конкретные примеры:
(i) Пусть $m(\alpha) \equiv 0, \sigma(\alpha) = 2 + \cos 2\alpha$. Здесь условия (33) – (34) выполнены при $\gamma(\alpha) \equiv 1$; условие (35) также выполнено для любого α.
(ii) Пусть $m(\alpha) = \sin 2\alpha, \sigma(\alpha) \equiv \sigma$.
Здесь условия (33) – (34) выполнены при $\gamma(\alpha) = \dfrac{1}{1+2\Phi(\frac{\sin 2\alpha}{\sigma})}$; условие (35) выполнено при $\sin 2\alpha = 0$, тогда $\alpha = \dfrac{\pi}{2}, \alpha = \dfrac{3\pi}{2}$.

7°. Общая экстремальная задача поиска оптимальных направлений, минимизирующих локальную асимметрию и локальный эксцесс функционала. Введенные выше понятия нетрудно распространить на общий случай непрерывного функционала $\Phi : E \supset U(y) \to \mathbb{R}$, достигающего локального экстремума в некоторой точке y вещественного банахового пространства E, $h \in E$ — любое направление в E.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. Назовем *локальной асимметрией* функционала Φ в точке y по направлению h следующий предел:

$$A\Phi(y)h = \lim_{t\to+0}\left(\frac{1}{2t}\int\limits_{-t}^{t}\frac{\Phi(y+\tau h)d\tau}{\tau}\right), \tag{37}$$

а *локальным эксцессом* функционала Φ в точке y по направлению h следующий предел:

$$E\Phi(y)(h)^2 = \lim_{t\to+0}\left(\frac{1}{2t}\int\limits_{-t}^{t}\frac{\Phi(y+\tau h)-\Phi(y)}{\tau^2}d\tau\right), \tag{38}$$

в предположении, что пределы (37) и (38) существуют.

Отметим также, что $A\Phi(y)h$ и $E\Phi(y)(h)^2$ могут существовать и при отсутствии симметрической дифференцируемости. Приведем простые скалярные примеры.

ПРИМЕР 8. 1) Пусть $\Phi(x) = x^{\frac{1}{3}}$. Тогда $\partial^{[\prime]}\Phi(0) = \infty$, однако

$$A\Phi(0) = \lim_{t\to+0}\left(\frac{1}{2t}\int\limits_{-t}^{t}\frac{x^{\frac{1}{3}}dx}{x}\right) = 0.$$

2) Пусть $\Phi(x) = x^{\frac{8}{3}}$. Тогда $\partial^{[\prime\prime]}\Phi(0) = \infty$, однако

$$E\Phi(0) = \lim_{t\to+0}\left(\frac{1}{2t}\int\limits_{-t}^{t}\frac{x^{\frac{8}{3}}dx}{x^2}\right) = 0.$$

Заметим теперь, что рассматривая вопрос о вычислении локальной асимметрии и локального эксцесса при произвольно заданном направлении h, естественно поставить вопрос о выборе оптимальных направлений, вдоль которых минимизируются, соответственно, модуль асимметрии и модуль эксцесса. В общем виде эта задача исследована в нашей работе [1].

8°. Многозначные обобщения: локальная суб–асимметрия и локальный суб–эксцесс. Напомним понятие многозначного субпредела в случае функционалов. Далее $\Psi : E \supset U(y) \to \mathbb{R}$, E – банахово пространство, h – направление в E, символы $\underline{\lim}$ и $\overline{\lim}$ обозначает, соответственно, нижний и верхний пределы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. Зададим *субпредел* функционала Ψ в точке y по направлению h равенством

$$\operatorname*{sublim}_{t\to+0}\Psi(y+th)=\left[\varliminf_{t\to+0}\Psi(y+th);\varlimsup_{t\to+0}\Psi(y+th)\right], \tag{39}$$

при условии, что оба предела справа в (39) конечны.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13. Назовем *локальной суб–асимметрией* функционала Φ в точке y по направлению h следующий субпредел (если он существует):

$$A_{sub}\Phi(y,h)=\operatorname*{sublim}_{t\to+0}\left(\frac{1}{2t}\int\limits_{-t}^{t}\frac{\Phi(y+\tau h)d\tau}{\tau}\right).$$

Соответственно, назовем *локальным суб–эксцессом* функционала Φ в точке y по направлению h следующий субпредел (если он существует):

$$E_{sub}\Phi(y)(h)^2=\operatorname*{sublim}_{t\to+0}\left(\frac{1}{2t}\int\limits_{-t}^{t}\frac{\Phi(y+\tau h)-\Phi(y)}{\tau^2}d\tau\right).$$

Из определения 13 и предыдущих результатов вытекает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 9. *Если величины* $\underline{\partial^{[\prime]}}\Phi(y,h)$, $\overline{\partial^{[\prime]}}\Phi(y,h)$ *конечны, то справедлива оценка:*

$$A_{sub}\Phi(y,h)\subset[\underline{\partial^{[\prime]}}\Phi(y,h);\overline{\partial^{[\prime]}}\Phi(y,h)].$$

Если величины $\underline{\partial^{[\prime\prime]}}\Phi(y)(h)^2$, $\overline{\partial^{[\prime\prime]}}\Phi(y)(h)^2$ *конечны, то справедлива оценка:*

$$E_{sub}\Phi(y)(h)^2\subset\frac{1}{2}[\underline{\partial^{[\prime\prime]}}\Phi(y)(h)^2;\overline{\partial^{[\prime\prime]}}\Phi(y)(h)^2].$$

ПРИМЕР 9. Пусть

$$f(t)=\begin{cases} t\cdot\sin^2\frac{1}{t}\ , & \text{если } t\neq 0\ ;\\ 0, & \text{если } t\leqslant 0\ .\end{cases}\qquad \left(\text{Здесь }\ \partial^{[\prime]}f(0)=\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]\right).$$

Рассмотрим вариационных функционал:

$$\Phi(y)=\int\limits_{-a}^{a}f(y+y')dx.$$

Тогда

$$\partial_{sub}^{[\prime]}\Phi(y)h \subset \int\limits_{(y+y'>0)} f_1'(y+y')\cdot(h+h')dx + \left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]\cdot \int\limits_{(y+y'=0)} (h+h')dx. \quad (40)$$

Очевидно, что в любой точке y $\left|\partial_{sub}^{[\prime]}\Phi(y)h\right|$ минимизируется по направлениям $h+h'=0$.

Заметим дополнительно, что если функция y_0 удовлетворяет условию $y_0+y_0' \equiv 0$ и $h(a)=h(b)=0$, то оценка (41) принимает вид

$$|A_{sub}\Phi_1(y)h| \subset \left|\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]\cdot\int\limits_a^b (h+h')dx\right| = \left[0;\frac{1}{2}\right]\cdot\left|\int\limits_a^b h\,dx\right|.$$

Следовательно, в этом случае, суб–асимметрия минимизируется по модулю на направлениях h, удовлетворяющих условию

$$\int\limits_a^b h(x)\,dx = 0.$$

В заключение рассмотрим класс примеров с оценкой суб–эксцесса и поиском направлений его минимизации.

ПРИМЕР 10. Пусть $\varphi(t) \geqslant 0$, $\varphi(t) \in C^2[a;b]$ при $t \neq 0$, $\varphi \in C^1(0)$, $\partial_{sub}^{[\prime\prime]}\varphi(0) = [\alpha;\beta]$. (Например, $\varphi(t) = t^2\cdot\sin\dfrac{1}{t^2}$ $(t\neq 0)$, $\varphi(0)=0$).

Тогда, как нетрудно вычислить, для функции $f(y,z)=\varphi(y^2-z^2)$ верно:

$$\begin{cases} f''_{y^2} = \varphi''(y^2-z^2)\cdot 4y^2 + 2\varphi'(y^2-z^2)\cdot y; \\ f''_{z^2} = \varphi''(y^2-z^2)\cdot 4z^2 + 2\varphi'(y^2-z^2)\cdot z; \end{cases} \qquad (\text{при } y^2-z^2\neq 0). \quad (41)$$

Рассмотрим вариационный функционал:

$$\Phi(y) = \int\limits_a^b f(y^2-y'^2)dx.$$

Легко видеть, что в точке y_0, удовлетворяющей условию $y_0^2 - y_0'^2 = 0$, Φ достигает локального минимума.

В соответствии с общей оценкой и равенствами (41), имеем:

$$\partial_{sub}^{[\prime\prime]}\Phi(y)(h)^2 \subset \int\limits_{(y^2-y'^2\neq 0)} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}h^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}h'^2\right)dx + [\alpha;\beta]\cdot\int\limits_{(y^2-y'^2=0)} (2h^2-2h'^2)dx.$$

В частности, в точке y_0, учитывая $mes\,(y_0^2 - y_0'^2 \neq 0) = 0$, имеем:

$$E_{sub}\Phi(y_0)(h)^2 \subset \frac{1}{2}\partial^{[\prime\prime]}_{sub}\Phi_2(y_0)(h)^2 \subset [\alpha;\beta] \cdot \int\limits_a^b (h^2 - h'^2)dx.$$

Таким образом, модуль локального суб–эксцесса $|E_{sub}\Phi(y_0)(h)^2|$ минимизируется по направлениям h, удовлетворяющим условиям $h' = \pm h$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баран И. В. *Задача поиска направления оптимального перехода через точку экстремума.* // Динамические системы. — 2016. — Т. 6(34), № 4. — С. 337-354.

2. Бари Н. К. *Тригонометрические ряды.* — М.: Физматлит, 1961. — 936 с.

3. Кобзарь А. И. *Прикладная математическая статистика.* — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. — 816 с.

4. Крамер Г. *Математические методы статистики.* — Пер. с англ. — М.: Мир, 1975. — 648 с.

5. Орлов И. В., Баран И. В. *Введение в сублинейный анализ – 2: симметрический вариант.* // Соврем. мат. Фундам. направл. — 2015. — Т. 57. — С. 108–161.

6. Орлов И. В. *Введение в сублинейный анализ.* // Соврем. мат. Фундам. направл. — 2014. — Т. 53. — С. 64–132.

7. Орлов И. В., Стонякин Ф. С. *Компактные субдифференциалы: формула конечных приращений и смежные результаты.* // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2009. — Т. 34. — С. 121–138.

8. Arnold B. C., Groeneveld R. A. *Measuring Skewness with Respect to the Mode.* // The American Statistician. – 1995. – Vol. 49. – P. 34 – 38.

9. Balanda K. P., MacGillivray H. L. *Kurtosis: A Critical Review.* // The American Statistician. – 1988. – Vol. 42. – P. 111 – 119.

10. Doane D. P., Seward L. E. *Measuring skewness: a forgotten statistic.* // Journal of Statistics Education. – 2011. – Vol. 19.2. – P. 1 – 18.

11. Groeneveld R. A. *Measuring Skewness and Kurtosis.* // Journal of the Royal Statistical Society. Series D (The Statistician). – 1984. – Vol. 33. – P. 391 – 399.

12. James R. D. *Generalized nTH primitives.* // Trans. Am. Math. Soc. – 1954. – Vol. 76, № 1. – P. 149 – 176.

13. Joanes D. N., Gill C. A. *Comparing measures of sample skewness and kurtosis.* // Journal of the Royal Statistical Society (Series D): The Statistician. – 1998. – Vol. 47(1). – P. 183 – 189.

14. Vallee Poussin Ch. J. *Sur l'approximation des fonctions d'une variable reelle et de leurs derivees par les polynomes et des suites limitees de Fourier.* // Bull. Acad. de Belgique. – 1908. – Volume 3. P. 193 – 254.